

## Statistik und Ausgleichsrechnung I

Bonn, 5. April 2018

### 2. Semester, 2V, 2U; 3. Semester 1V, 1U, 1T

Es werden die Standardverfahren Ausgleichung nach kleinsten Quadraten in expliziter Form (Ausgleichung nach Parametern) und in impliziter Form (Ausgleichung nach Bedingungen) sowohl theoretisch hergeleitet als auch in vielen Anwendungen die Leistungsfähigkeit demonstriert. Der Messvorgang wird durchleuchtet und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung des stochastischen Verhaltens eingeführt. Hypothesentests bezüglich der Parameter und der geschätzten Varianz der Gewichtseinheit geben schließlich die Möglichkeit statistisch fundierte Aussagen über die Relevanz der erzielten Ausgleichungsergebnisse zu erhalten.

#### Lehrinhalte:

##### 1 Einführung und Motivation

##### 2 Algebraischer Zugang zur Ausgleichsrechnung

###### 2.1 Direkte Beobachtungen

- 2.1.1 Das arithmetische Mittel (Eigenschaften, Extremwertaufgabe, Genauigkeiten)
- 2.1.2 Das gewichtete arithmetische Mittel (Wiederholungszahlen, Gewichte, Genauigkeiten)
- 2.1.3 Alternative Ausgleichsprinzipien ( $L_1$ -Norm,  $L_2$ -Norm,  $L_\infty$ -Norm)
- 2.1.4 Graphische Zusammenfassung von direkten Beobachtungen (Boxplot)

###### 2.2 Ausgleichung nach Parametern

- 2.2.1 Beispiele und Motivation (Dreieck und Regressionsgerade)
- 2.2.2 Ausgleichung nach Parametern als Minimierungsaufgabe
  - 2.2.2.1 Methode der kleinsten Quadrate
  - 2.2.2.2 Differenzieren von linearen und quadratischen Formen in Matrizenschreibweise
  - 2.2.2.3 Normalgleichungen
  - 2.2.2.4 Orthogonalitätsbedingungen

###### 2.2.3 Drei kleine Ergänzungen

- 2.2.3.1 Beobachtungsgleichungen mit konstantem Anteil
- 2.2.3.2 Beispiel: Höhennetz
- 2.2.3.3 Ausgleichung mit Näherungsparametern (verkürzte Beobachtungen)
- 2.2.3.4 Beispiel: Höhennetz mit Näherungsparametern
- 2.2.3.5 Ausgleichung nach Parametern bei ungleichen Genauigkeiten
- 2.2.3.6 Beispiel: Höhennetz mit ungleichen Gewichten

## 2.2.4 Nichtlineare Beobachtungsgleichungen

### 2.2.4.1 Motivation

### 2.2.4.2 Reihenentwicklung nach Taylor

### 2.2.4.3 Linearisierung, Schlußkontrolle, Newton Iteration

### 2.2.4.4 Differentiation unentwickelter (impliziter) Funktionen (totales Differential)

### 2.2.4.5 Beispiel: Punkteinschaltung durch Streckenmessung

## 2.3 Ausgleichungen nach Bedingungen

### 2.3.1 Explizite und implizite Formen

### 2.3.2 Gaußsches Minimierungsprinzip für implizite Formen

### 2.3.3 Beispiel: Höhennetz

### 2.3.4 Nichtlineare Bedingungsgleichungen

### 2.3.5 Beispiel: rechtwinkliges Dreieck

## 3 Wahrscheinlichkeitstheorie

### 3.1 Ereignisse und Mengensysteme (Mengen, Boolesche Algebra, Messraum)

### 3.2 Wahrscheinlichkeiten für Mengensysteme (Axiome der Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Regel von Bayes, unabhängige Ereignisse)

### 3.3 Wahrscheinlichkeitsraum (diskret-kontinuierlich, $\sigma$ -Algebra)

### 3.4 Konzept der Zufallsvariablen (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, -verteilungsfunktion)

### 3.5 Momente der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Erwartungswert, Varianz, Schiefe, Exzeß)

### 3.6 Wahrscheinlichkeitsabschätzungen aus den Momenten (Ungleichung nach Tschebyschow)

### 3.7 Multivariate Zufallsvariable (Randverteilung, bedingte Verteilung, unabhängige Zufallsvariable)

### 3.8 Multivariate Momente (Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Korrelation, Kovarianzmatrix)

### 3.9 Lineare Abbildungen von Zufallsvariablen (Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz, Varianzfortpflanzung)

### 3.10 Nichtlineare Abbildung von Zufallsvariablen (Linearisierung)

## 4 Stochastischer Zugang zur Ausgleichsrechnung

### 4.1 Bester linearer erwartungstreuer Schätzer (BLUE)

### 4.2 Gegenüberstellung: stochastischer versus deterministischer Zugang (Varianzen der geschätzten Größen)

### 4.3 Kovarianzmatrix, Kofaktorenmatrix, Wiederholungszahlen, Gewichte (Varianz der Gewichtseinheit)

### 4.4 Äquivalenz der Ausgleichung mit Gewichten und Kovarianzmatrizen (nach Parametern)

### 4.5 Ausgleichung bei unbekanntem Varianzfaktor (Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit)

## 5 Stichproben und Zufallsvariable

### 5.1 Messungen und Elementarfehler

### 5.2 Univariate Normalverteilung

(Momente der Normalverteilung, standardisierte Normalverteilung, lineare Skalentransformation, Konfidenzbereiche)

### 5.3 Multivariate Normalverteilung

(Spezialisierung auf zwei Dimensionen, Randverteilung, bedingte Verteilung, Konfidenzregionen, Konfidenzellipsen und -ellipsoide, Punktlagefehler)

## 6 Grundlagen statistischer Prüfverfahren

### 6.1 Statistische Tests

(Hypothesen, Annahmehereich - Ablehnungsbereich, Testablauf, Fehler 1. Art, Fehler 2. Art)

- 6.2 Parametertest bei bekannter Varianz der Gewichtseinheit  
(Testablauf, Zusammenhang Hypothesentest - Konfidenzbereiche)
- 6.3 Globaltest  
(Chi-Quadrat Verteilung, Verteilung von  $\mathbf{V}^T \Sigma \mathbf{V}$ , Globaltest)
- 6.4 Parametertest bei geschätzter Varianz der Gewichtseinheit  
(Studentverteilung, Parametertest bei unbekannter Varianz der Gewichtseinheit)

### **Literatur:**

- CASPARY W., WICHMANN K. (2007): Auswertung von Messdaten. Oldenbourg Verlag, München Wien.
- FAHRMEIR L., KNEIB T., LANG L. (2007): Regression: Modelle, Methoden und Anwendungen. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- JÄGER, R., MÜLLER, T., SALER, H., SCHWÄBLE, R. (2005): Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren. Wichmann Verlag, Heidelberg.
- KOCH, K.R. (1997): Parameterschätzung und Hypothesentests. Dümmler Verlag, Bonn.  
([ftp://skylab.itg.uni-bonn.de/koch/00\\_textbooks/buch97\\_format\\_neu.pdf](ftp://skylab.itg.uni-bonn.de/koch/00_textbooks/buch97_format_neu.pdf))
- KOCH, K.R. (2007): Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. Springer, Berlin.
- MEISSL, P. (1982): Least squares adjustment - a modern approach. Mitteilungen der Geodätischen Institute der TU Graz, Folge 43.  
[ftp://skylab.itg.uni-bonn.de/schuh/Separata\\_Meissl/meissl\\_82b.pdf](ftp://skylab.itg.uni-bonn.de/schuh/Separata_Meissl/meissl_82b.pdf)
- NIEMEIER, W. (2008): Ausgleichungsrechnung - Statistische Auswertemethoden. De Gruyter Verlag, Berlin.
- STAHEL, W (2002): Statistische Datenanalyse: Eine Einführung für Naturwissenschaftler. Vieweg, Braunschweig

### **Übungsleiterin:**

M.Sc. Christina Esch

### **Übungsbetreuung:**

Pia Vetten, Lennart Voß, B.Sc. Markus Schinnen

### **Lehrmethode:**

Vortrag mit audiovisueller Unterstützung. Rechnen von Beispielen an der Tafel unter Mitarbeit der Studierenden; Musteraufgaben, Übungsblätter und Übungsprogramme; Repetitorien nach Bedarf

### **Abschluss:**

Modulprüfung über alle LV des Moduls B26 (schriftlich, 150 min)  
Prüfungsvoraussetzung: anerkannte Studienleistung in allen LV des Moduls