



Masterarbeit
im Studiengang Geodäsie und Geoinformation

Aufgabenstellung

„Genauigkeitsabschätzung bei der Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers unter Verwendung des Median und Berücksichtigung verschiedener Verteilungsmodelle für die wahren Fehler“

angefertigt an der Universität Bonn - Institut für Geodäsie und
Geoinformation
Professur für Theoretische Geodäsie

Vorgelegt von:
Johannes Korte
aus Bonn

Datum der Abgabe:
19. September 2017

Betreuer:
Prof. Dr. Wolf-Dieter Schuh
Christina Esch

Masterarbeit Johannes Korte**Erreichbare Genauigkeit bei der Abschätzung der Meßunsicherheiten
bei unterschiedlichen L_p -Norm Schätzern**

Bei der Analyse von Beobachtungen spielt die Abschätzung der Messunsicherheiten eine wichtige Rolle. Da uns die wahren Abweichungen der Messungen von den idealen Werten meist nicht zur Verfügung stehen, wird versucht aus Verbesserungen eine Schätzung des Skalenparameters der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion zu gewinnen. Bezüglich angenommener Normalverteilung der wahren Abweichung ist hinlänglich bekannt, dass das zweite Moment der Verbesserungen bereinigt um die Freiheitsgrade eine erwartungstreue, lineare Schätzung für den Skalenparameter σ ergibt. Wie schon erwähnt, wird dabei vorausgesetzt, dass die wahren Beobachtungsabweichungen $\mathcal{E}_i, i = 1, \dots, n$ normalverteilt sind und dass der Erwartungswert verschwindet, $\mathcal{E}_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Üblicher Weise werden dabei die Verbesserungen bezüglich des „Kleinsten Quadrate Schätzers“ (L_2 -Norm Schätzers) für die ausgeglichenen Parameter berechnet. Speziell für Beobachtungsreihen mit Ausreißern und *auffälligen Daten* zufolge von Modelldefiziten werden oft andere robuste Schätzer z.B. über die durchschnittlichen Abweichungen und oder den Median der absoluten Abweichungen diskutiert um eine zuverlässigere Schätzung des Skalenparameters zu bekommen.

In dieser Masterarbeit soll diese Vorgehensweise speziell beim Einsatz von Verbesserungen bezüglich bestimmter L_p -Norm Parameterschätzer (im wesentlichen L_1 -Norm Schätzer und L_2 -Norm Schätzer) untersucht werden. Dabei sollen unterschiedliche Verteilungsfunktionen (Normal-Verteilung, Laplace-Verteilung, Student-Verteilung) für die wahren Beobachtungsfehler vorausgesetzt werden. Die Schätzung des Skalenparameters soll dabei sowohl über die Absolutsumme der Verbesserungen (durchschnittliche Abweichungen) als auch die Quadratsumme der Verbesserungen (mittlere Abweichungen) erfolgen. Von besonderen Interesse ist die Genauigkeit der Schätzer der Skalenparameter bei den unterschiedlichen Annahmen.

Zur Reduktion der Komplexität der Untersuchung ist zunächst der Ansatz der direkten Beobachtungen zu untersuchen. Ausgehend vom Arithmetischen Mittel als L_2 -Norm Parameterschätzer ist zu untersuchen, mit welcher Genauigkeit der Skalenparameter geschätzt werden kann, wenn einerseits unterschiedliche Verteilungen (Normalverteilungen, Laplace-Verteilung und Student-Verteilung) und andererseits unterschiedliche Schätzverfahren (durchschnittliche und mittlere Verbesserungen) zum Einsatz kommen. In einer nächsten Stufe ist diese Ansatz auf die L_1 -Norm Parameterschätzung zu erweitern, wo der Mittelwert über den Median berechnet wird. Die Charakteristik der resultierenden Verbesserungen ist zu untersuchen und Abschätzungen für die Genauigkeit der verschiedenen Möglichkeiten zur Schätzung der Skalenparameter zu erarbeiten. Im Ausblick ist die Übertragbarkeit der gewonnen Erkenntnisse auf Ausgleichungsmodelle nach (mehreren) Parametern zu diskutieren.

Aufgabensteller und Betreuer: Prof. Dr. techn. Wolf-Dieter Schuh

Bonn, den 23. Mai 2017

Wolf-Dieter Schuh

Literatur:

- Schuh, W.-D. (2017): Über die Ausgleichung bei „Überschüssigen Messungen und zufälligen Beobachtungen“ — auf den Spuren von Friedrich Robert Helmert. von Stillfried, I., (Hrsg.), *Aufsätze zum „13. Dortmunder Symposium zur Vermessungsgeschichte — Friedrich Robert Helmert zum 100. Todestag“*, Nr. 42 Schriftenreihe des Förderkreises Vermessungstechnisches Museums. Schriftenreihe des Förderkreises Vermessungstechnisches Museum e.V., Dortmund, Dortmund. [BibTeX](#), [PDF](#).
- Schuh, W.-D., J. Korte (2017): Über die Genauigkeit von Schätzern für den Skalenparameter der Verteilungsfunktion. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN)*. (accepted) [BibTeX](#), [PDF](#).
- Helmert, F. R. (1876): Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. *Astronomische Nachrichten*, 88(8-9):113–131. ISSN 1521-3994. doi:10.1002/asna.18760880802.

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass die Masterarbeit mit dem Titel „Genauigkeitsabschätzung bei der Berechnung des Wahrscheinlichen Fehlers unter Verwendung des Median und Berücksichtigung verschiedener Verteilungsmodelle für die wahren Fehler“ von mir selbst und ohne jede unerlaubte Hilfe angefertigt wurde, dass sie noch an keiner anderen Hochschule zur Prüfung vorgelegen hat und dass sie weder ganz noch in Auszügen veröffentlicht worden ist. Die Stellen der Arbeit einschließlich Tabellen, Karten, Abbildungen usw. , die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Fall kenntlich gemacht.

Bonn, den 19. September 2017

Johannes Korte

Zusammenfassung

Die vorliegende Masterarbeit beschäftigt sich mit der Aufgabe den Wahrscheinlichen Fehler (ρ_ϵ) von wahren Beobachtungsfehlern (ϵ) aus direkten Beobachtungen zu schätzen. Dabei wurden der L_2 -Norm Schätzer (das arithmetische Mittel) oder der L_1 -Norm Schätzer (der Median) verwendet. Außerdem wurden für beide L_p -Norm Schätzer jeweils die Verteilung der wahren Beobachtungsfehler mit Normalverteilung, Laplace-Verteilung oder Student t-Verteilung festgelegt.

Für die Normalverteilung und die Laplace-Verteilung konnte die Berechnung von ρ_ϵ immer in der Form $\rho_\epsilon = a \cdot \vartheta_v$ dargestellt werden, wobei a einen konstanten Wert annimmt und ϑ_v den durchschnittlichen Fehler der Verbesserungen (Verbesserungen meinen hier die Differenz zwischen Beobachtungen und L_p -Norm Schätzer). Der Wert für a und somit der Schätzwert von ϑ_v ist für Laplace größer, wenn man von ähnlicher Verteilung ausgeht (ähnlich meint hier nicht eine gleiche Standardabweichung, sondern eine ähnliche Form). Das liegt an der „Langschwänzigkeit“ der Laplace-Verteilung. Die Genauigkeit der Schätzung von ρ_ϵ kann auf die Genauigkeit von ϑ_v reduziert werden, jedoch sind die Ausdrücke der Genauigkeiten sehr kompliziert und langwierig zu berechnen. Trotzdem hat sich herausgestellt, dass die Schätzung über die Normalverteilung genauere Ergebnisse liefert als die Schätzung der Laplace-Verteilung. Bei der Student t-Verteilung ist die Berechnung von ρ_ϵ nicht gelungen, sodass dieser Wert abgeschätzt worden ist, um ihn in eine Form der Art $\rho_\epsilon = a \cdot \vartheta_v$ zu bringen. Dadurch ist auch die Genauigkeitsabschätzung des Wertes mit weiteren Ungenauigkeiten behaftet und nicht mehr aussagekräftig.

Im Ausblick wird dann die Schätzung von ρ_ϵ von direkten Beobachtungen auf den Ausgleich mit mehreren Variablen erweitert. Diese Schätzung wird nur für die Normalverteilung aufgestellt, und ohne explizite Angabe der Genauigkeitsabschätzung durchgeführt. Anstelle von der Genauigkeitsabschätzung wird für den Wert von ρ_ϵ eine obere und eine untere Schranke bestimmt.

Abstract

This master thesis is used to calculate the probable error (ρ_ϵ) for the real observation errors (ϵ). For the first part we assume that the observations are direct the searched parameter. For the calculation there are used the L_2 -norm estimator (least-square estimation or mean) or the L_1 -norm estimator (the median). On top for both L_p -norm estimators the distribution of the real observation errors were established by normal, Laplace or student t-distribution.

For the normal and Laplace distribution the probable error could be calculated by a form like $\rho_\epsilon = a \cdot \vartheta_v$. Here a means a constant value and ϑ_v is the average error of the improvements from the observations to the L_p -norm estimator. Since the Laplace distribution is a long tail distribution the value of a is larger if the real observations are Laplace distributed compared to normal distributed and so is the value of ρ_ϵ . The accuracy of the probable error is the same as of the average error but in both cases the terms are complicated. Anyway by using the normal distribution the accuracy is better than by using the Laplace distribution. For real observation errors with student t-distribution there is no way to write the probable error in a equation like $\rho_\epsilon = a \cdot \vartheta_\epsilon$ without estimating other terms. So there is no way to give a helpful accuracy for this estimation.

In the last part we change from direct observations to observations with more than one parameter. In this case the real observation errors are always normal distributed and the accuracy is estimated by a lower and a upper limit.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	L2-Norm	5
2.1	Normalverteilung	5
2.2	Laplace-Verteilung	6
2.3	Student t-Verteilung	9
3	L1-Norm	13
3.1	Normal-Verteilung	14
3.2	Laplace-Verteilung	18
3.3	Student t-Verteilung	20
4	Ausblick	23
4.1	Weiterführende Überlegungen	23
4.2	Ausgleichsmodelle nach mehreren Parametern	23
5	Fazit	27
	Literatur	31
	Appendix	34
A	Herleitung der Verbesserungen beim Mittelwert	i
B	Die Verteilung von aufsummierten Laplace verteilten Zufallsvariablen	ii
C	Der Wahrscheinliche Fehler von Laplace verteilten Zufallsvariablen	iii
D	Durchschnittlicher Fehler von Laplace verteilten Zufallsvariablen	iv
E	Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei Laplace verteilten Verbesserungen von Beobachtungen zum Mittelwert	v
E.1	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	v
E.2	Erwartungswert	vii
F	Die Verteilung von aufsummierten Student t-verteilter Zufallsvariablen	ix
F.1	Zufallsvariablen mit unterschiedlichen Chi-Quadrat-Verteilungen	ix
F.2	Zufallsvariablen mit gleicher Chi-Quadrat-Verteilungen	x
G	Die Verteilung von skalierten Student t-verteilter Zufallsvariablen multipliziert mit einem Skalar	xiii
H	Überführung des durchschnittlichen Fehlers zum mittleren Fehler bei skaliertem Student t-Verteilung	xiv

I	Wahrscheinlicher Fehler bei skaliert Student t-Verteilten Zufallsvariablen	xvi
I.1	Direkte Berechnung	xvi
I.2	Berechnung über Approximation	xvi
J	Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei skaliert Student t-verteiltten Verbesserungen von Beobachtungen zum Mittelwert	xix
J.1	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	xix
J.2	Erwartungswert	xx
K	Herleitung der Verbesserungen beim Median	xxi
L	Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei Verbesserungen von Beobachtungen zum Median	xxii
L.1	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	xxii
L.2	Erwartungswert	xxiii
M	Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei Laplace verteilten Verbesserungen von Beobachtungen zum Median	xxv
M.1	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	xxv
M.2	Erwartungswert	xxvii
N	Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei skaliert Student t-verteiltten Verbesserungen von Beobachtungen zum Median	xxviii

1 Einleitung

Seit geraumer Zeit wird in vielen Bereichen die Genauigkeit von Messungen durch den mittleren Fehler $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$ (auch Zweites Moment oder Varianz genannt) beziehungsweise dessen Wurzel (der Standardabweichung σ) dargestellt (siehe [Koch, 1997] (Seite 105)). Aber es gibt auch andere Fehlerdefinitionen wie den wahrscheinlichen Fehler ($\rho : \int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx = \frac{1}{2}$) [Schuh, 2017], die jedoch kaum Verwendung finden. Dies ist nach [Schive, 1930] auf den Umstand zurückzuführen, dass sich der mittlere Fehler direkt aus der Rechnung beim Ausgleich über kleinste Quadrate ergibt. Zudem gibt Schive noch drei weitere Probleme bei dem Gebrauch des wahrscheinlichen Fehlers an. Erstens wird der wahrscheinliche Fehler bei einer geraden Anzahl (oder allgemeiner bei einer endlichen Anzahl) von Beobachtungen nicht eindeutig zu bestimmen sein (ähnlich wie bei der Bestimmung des Median), wodurch es sich seiner Meinung nach nur lohnt ihn über den mittleren Fehler zu schätzen. Aber in diesem Fall könnte man den mittleren Fehler direkt verwenden. Sein zweites Argument ist, dass bei der Herleitung des wahrscheinlichen Fehlers das Gaußsche Fehlergesetz verwendet wird, was dieses für Beobachtungen, die dieser Gesetzmäßigkeit nicht folgen, unbrauchbar macht. Und als drittes weist Schive darauf hin, dass ohne das Gaußsche Fehlergesetz auch das Varianzfortpflanzungsgesetz nicht anwendbar ist.

Demgegenüber steht die Idee, dass der wahrscheinliche Fehler (ähnlich wie die Student t-Verteilung oder die Laplace-Verteilung) zwar ungenauer ist, jedoch mit Datensätzen zurecht kommt, die grobe Fehler aufweisen oder deren Modellierungen die Realität unzureichend beschreiben. Beide Fälle resultieren in auffälligen Daten, was beim durchschnittliche Fehler dazu führt, dass der Schätzwert einer Beobachtung im Vergleich zum wahren Wert in die Richtung des Aufreißers verzerrt wird.

In dieser Arbeit soll zunächst die Schätzung des wahrscheinlichen Fehlers aus den Verbesserungen von direkten Beobachtungen hergeleitet werden. Dabei unterscheiden wir die Definition der Verbesserungen als Abstand zum Mittelwert oder als Abstand zum Median (den mittleren Wert aller nach ihrer Größe sortierten Beobachtungen). Eine weitere Unterscheidung ist bei der Verteilung der wahren Beobachtungsfehlern zu machen (in diesem Fall Normalverteilung, Laplace-Verteilung und Student t-Verteilung). Außerdem sollen die Genauigkeiten dieser Schätzungen bestimmt werden, um diese am Ende mit einander zu vergleichen.

Im Ausblick wird der wahrscheinliche Fehler auf einen Ausgleich mit mehreren Parametern erweitert. Dabei wird die Herleitung nicht genauer betrachtet.

2 Direkte Beobachtungen: L₂-Norm

In diesem Kapitel definieren wir die einzelnen Verbesserungen v_i als die Differenz des Mittelwerts μ zu n direkten Beobachtungen ℓ_i . Als Mittelwert gilt nach [Kreyszig, 1991] (Seite 37) die Definition:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \ell_i}{n}$$

Also ergibt sich die Verbesserung v_i zur Beobachtung ℓ_i aus der Differenz des Mittelwerts zur Einzelbeobachtung (Umrechnung siehe Appendix A):

$$\begin{aligned} v_i &= \mu - \ell_i \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_j - (n-1) \cdot \epsilon_i + \sum_{j=i+1}^n \epsilon_j}{n} \end{aligned} \quad (1)$$

2.1 Normalverteilung

In diesem Kapitel nehmen wir die Verteilung der wahren Fehler als normalverteilt an, mit $E\{\mathcal{E}\} = 0$ und $\sigma_{\mathcal{E}} = \sigma$. Dann folgt aus der Linearität des Erwartungswertes ([Koch, 1997](Seite 149)), dass die Verbesserungen wieder normalverteilt sind, mit $E\{\mathcal{V}\} = 0$. Die Standardabweichung einer einzelnen Beobachtung (σ_{v_i}) bestimmen wir über Varianzfortpflanzung der letzten Formel (für die Herleitung siehe [Korte, 2017]):

$$\begin{aligned} \sigma_{v_i} &= \sqrt{\sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\delta v_i}{\delta \epsilon_j} \cdot \sigma \right)^2 + \left(\frac{\delta v_i}{\delta \epsilon_i} \cdot \sigma \right)^2 + \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{\delta v_i}{\delta \epsilon_j} \cdot \sigma \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sigma \end{aligned} \quad (2)$$

Aus [Peters, 1856] folgt, dass für den wahrscheinliche Fehler der wahren Beobachtungen ρ_{ϵ} gilt:

$$\rho_{\epsilon} = 0.845347 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}} \quad (3)$$

(Herleitung siehe [Korte, 2017] (Kapitel 2))

Die Genauigkeitsabschätzung bei der Schätzung des wahrscheinlichen Fehlers aus den Verbesserungen wurde von [Helmert, 1876] aufgestellt:

$$\rho_{\epsilon} = \begin{cases} 0.84535 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\pi-2}{2}} \right) & \text{falls } n = 2 \\ 0.84535 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin \left(\frac{1}{n-1} \right) - n \right)} \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (4)$$

(Herleitung siehe [Korte, 2017] (Kapitel 3))

2.2 Laplace-Verteilung

Nun wollen wir die wahren Beobachtungsfehler mit Laplace-Verteilung festlegen. Dabei sei der Erwartungswert $E\{\mathcal{E}\} = 0$ und die Standardabweichung $\sigma_{\mathcal{E}} = \sigma$. Das heißt, die wahren Beobachtungsfehler haben die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion: $f(\mathcal{E}_i = \epsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} e^{-|\epsilon_i| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}$ (verändert nach [Johnson et al., 1995b] Seite 166). Dann sind die Verbesserungen nach Appendix B wieder Laplace verteilt mit Mittelwert 0 und Varianz

$$\sigma_{v_i} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sigma \quad .$$

Der wahrscheinliche Fehler der Verbesserungen wird in Appendix C allgemein für Laplace verteilte Zufallsvariablen aufgestellt und ergibt:

$$\rho_{\epsilon} = 0.693147 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

Nun soll, wie in [Peters, 1856] und [Korte, 2017], σ durch $\sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma_{v_i}$ ersetzt werden, und dann wird σ_{v_i} mittels Appendix D in $\sqrt{2} \cdot \vartheta_{v_i}$ umgerechnet.

Und da ϑ_{v_i} über $\tilde{d}_v = \frac{\sum_i |v_i|}{n}$ geschätzt werden kann, folgt:

$$\begin{aligned} \rho_{\epsilon} &= 0.693147 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{n} \\ &= 0.693147 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}} \end{aligned} \quad (5)$$

Nun fehlt noch die Fehlerabschätzung für den Schätzwert $\tilde{d}_{\epsilon} = \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$. Hier beginnen wir mit dem Fall das nur zwei Beobachtungen vorliegen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta_{\epsilon}}^2 &\stackrel{(i)}{=} E\{\tilde{D}_{\epsilon}^2\} - \vartheta_{\epsilon}^2 \\ &\stackrel{(ii)}{=} E\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^2 |v_i|\right)^2}{2 \cdot (2-1)}\right\} - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \\ &\stackrel{(iii)}{=} E\left\{\frac{|v_1|^2 + |v_2|^2 + 2 \cdot |v_1| \cdot |v_2|}{2}\right\} - \frac{1}{2} \sigma^2 \\ &\stackrel{(iv)}{=} E\left\{\tilde{S}_v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \tilde{S}_v^2\right\} - \frac{1}{2} \sigma^2 \\ &\stackrel{(v)}{=} E\left\{2 \cdot \tilde{S}_v^2\right\} - \frac{1}{2} \sigma^2 \\ &\stackrel{(vi)}{=} 2 \cdot \sigma_v^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 \\ &\stackrel{(vii)}{=} \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \\ &\stackrel{(viii)}{=} \vartheta_{\epsilon}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

(i) Herleitung aus [Korte, 2017] (Seite 36), (ii) $\tilde{D}_\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$ und $\vartheta_\epsilon = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sigma$, (iii) Quadrat der Summe ausmultiplizieren, (iv) $\tilde{S}_v^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} = |v_1| \cdot |v_2|$ (vergleiche [Korte, 2017] (Seite 10)), (v) Termvereinfachungen, (vi) $E\{\tilde{S}_v^2\} = \sigma_v^2$, (vii) Termvereinfachungen mit $\sigma_v = \sqrt{\frac{2-1}{2}} \cdot \sigma$, (viii) $\sigma = \sqrt{2} \cdot \vartheta_\epsilon$.

Formel (6) ergibt über Varianzfortpflanzung die Genauigkeitsabschätzung von ρ aus Formel (5):

$$\rho_\epsilon = 0.693147 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{2}} \cdot (1 \pm 1) \quad \text{falls } n = 2 \quad (7)$$

Letztendlich fehlt uns nur noch die Fehlerabschätzung für mehr als zwei Beobachtungen. Wir suchen wieder allgemein:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta_\epsilon}^2 &\stackrel{(i)}{=} E\{\tilde{D}_\epsilon^2\} - \vartheta_\epsilon^2 \\ &\stackrel{(ii)}{=} E\left\{\frac{(\sum_i |v_i|)^2}{n \cdot (n-1)}\right\} - \vartheta_\epsilon^2 \\ &\stackrel{(iii)}{=} E\left\{\frac{\sum_i |v_i|^2 + n \cdot (n-1) \cdot |v_i| \cdot |v_j|}{n \cdot (n-1)}\right\} - \vartheta_\epsilon^2 \\ &\stackrel{(iv)}{=} \frac{E\{\sum_i |v_i|^2\} + n \cdot (n-1) \cdot E\{|v_i| \cdot |v_j|\}}{n \cdot (n-1)} - \vartheta_\epsilon^2 \end{aligned} \quad (8)$$

(i) Herleitung aus [Korte, 2017] (Seite 36), (ii) $\tilde{D}_\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$, (iii) Quadrat der Summe ausmultiplizieren, (iv) Linearität des Erwartungswertes verwenden (siehe [Koch, 1997] (Seite 149)).

Wird über Appendix E eingeführt, dass $E\{|v_i| \cdot |v_j|\} = \frac{\sqrt{n-2}}{2+\sqrt{n-2}} \cdot \frac{\sigma_{v_i}^2}{2}$ für $i \neq j$ und $E\{\sum_i v_i^2\} = E\{\tilde{S}_{v_i}^2\} \cdot n = \sigma_{v_i}^2 \cdot n$ für eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 gilt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta_\epsilon}^2 &\stackrel{(i)}{=} \frac{n \cdot \sigma_{v_i}^2 + n \cdot (n-1) \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{2+\sqrt{n-2}} \cdot \frac{\sigma_{v_i}^2}{2}}{n \cdot (n-1)} - \vartheta_\epsilon^2 \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{n \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 + n \cdot (n-1) \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{2+\sqrt{n-2}} \cdot \frac{\frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2}{2}}{n \cdot (n-1)} - \vartheta_\epsilon^2 \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{n \cdot \frac{n-1}{n} \cdot 2 \cdot \vartheta_\epsilon^2 + n \cdot (n-1) \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{2+\sqrt{n-2}} \cdot \frac{\frac{n-1}{n} \cdot 2 \cdot \vartheta_\epsilon^2}{2}}{n \cdot (n-1)} - \vartheta_\epsilon^2 \\ &\stackrel{(iv)}{=} \frac{2 \cdot \vartheta_\epsilon^2 + \frac{\sqrt{n-2} \cdot (n-1)}{2+\sqrt{n-2}} \cdot \vartheta_\epsilon^2}{n} - \vartheta_\epsilon^2 \\ &\stackrel{(v)}{=} \vartheta_\epsilon^2 \cdot \frac{2 + \frac{\sqrt{n-2} \cdot (n-1)}{2+\sqrt{n-2}} - n}{n} \end{aligned}$$

(i) Einsetzen von $E\{\sum_i v_i^2\}$ und $E\{|v_i| \cdot |v_j|\}$, (ii) $\sigma_{v_i} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sigma$, (iii) $\sigma = \sqrt{2} \cdot \vartheta_\epsilon$, (iv) Termvereinfachungen, (v) ϑ_ϵ^2 ausklammern.

Damit folgt über die Varianzfortpflanzung für den wahrscheinlichen Fehler von Verbesserungen

bei Laplace verteilten Beobachtungsfehlern:

$$\rho_\epsilon = \begin{cases} 0.693147 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{2}} \cdot (1 \pm 1) & \text{falls } n = 2 \\ 0.693147 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{2 + \frac{\sqrt{n-2} \cdot (n-1) - n}{2 + \sqrt{n-2}}}{n}} \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (9)$$

2.3 Student t-Verteilung

Für diesen Abschnitt geben wir für die wahren Beobachtungsfehler eine Studentische t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad η vor. Nach [Kreyszig, 1991] (Seite 161) und [Smirnow and Dunin-Barkowski, 1969] (Seite 221 f.) setzten sich die wahren Beobachtungsfehler (ϵ_i) dann aus einer standardnormalverteilten Zufallsvariable \mathcal{X} und einer davon unabhängigen Zufallsvariablen \mathcal{Y} , die eine Chi-Quadrat-Verteilung mit Freiheitsgrad η besitzt, zusammen. Dann gilt für die Zufallsvariable \mathcal{E} , die die wahren Fehler beschreibt:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}}. \quad (10)$$

\mathcal{E} hat nur den Parameter η . Außerdem gelte für zwei unabhängige wahre Fehler \mathcal{E}_i und \mathcal{E}_j , dass sie sich nur in den Variablen \mathcal{X}_1 und \mathcal{X}_2 unterscheiden. Somit gilt: $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$ (vergleiche Appendix F.2).

Der Erwartungswert und die Standardabweichung der Student t-Verteilung sind ebenfalls in [Kreyszig, 1991] (Seite 162) definiert und ergeben sich zu $E\{\mathcal{E}\} = 0$ und $\sigma_\epsilon = \sigma = \sqrt{\frac{\eta}{\eta-2}}$, falls $\eta \geq 3$ ist, ansonsten besitzt die Student t-Verteilung keine Varianz.

Da die Verbesserungen zum Mittelwert nur aus einer Linearkombination der wahren Beobachtungen bestehen (siehe Formel (1)), bleibt der Freiheitsgrad η analog zur Rechnung im Appendix F und G konstant. Die Verbesserungen folgen der skalierten Student t-Verteilung, welche symmetrisch zu y-Achse ist. Also gilt: $E\{\mathcal{V}\} = 0$. Die Varianz der Normalverteilung kann nach Appendix F und G über Varianzfortpflanzung mit der Varianz der wahren Beobachtungsfehler ($\sigma_{\epsilon,N}^2 = 1$) berechnet werden und ergibt für n Beobachtungen:

$$\sigma_{v_i,N} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

Nun soll der wahrscheinliche Fehler der Verbesserungen ρ_v bestimmt werden. Dieser wird in Appendix I als Funktion vom durchschnittlichen Fehler (Formel (45)) dargestellt:

$$\begin{aligned} \rho_{v_i} &= 0.6744898 \cdot \sigma_{v_i,N} \cdot \sigma \\ &= 0.6744898 \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sigma \end{aligned}$$

Hierbei ist $\sigma_{v_i,N} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ von oben eingesetzt.

Für den wahrscheinlichen Fehler der wahren Beobachtungsfehler ρ_ϵ gilt, dass $\sigma_{\epsilon,N} = 1$. Das bedeutet, die ϵ sind Student t-verteilt beziehungsweise skaliert Student t-verteilt mit Skalierung $\sigma_N = 1$. Damit ergibt sich:

$$\rho_\epsilon = 0.6744898 \cdot \sigma$$

Man muss beachten, dass das $\sigma = \sqrt{\frac{\eta}{\eta-2}}$ die Standardabweichung der unskalierten Student t-Verteilung beschreibt und damit in beiden Fällen (ρ_{v_i} und ρ_ϵ) denselben Wert annimmt. Folglich

wird der Unterschied zwischen den Standardabweichungen bei den Verbesserungen und den wahren Fehlern nur durch σ_N (also der Standardabweichung der Normalverteilung) dargestellt.

Wegen der Varianzfortpflanzung gilt, dass $\sigma_{v_i} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sigma$. Dann ist aber auch $\sigma_\epsilon = 1 \cdot \sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma_{v_i}$. Nun ersetzen wir σ in die Gleichung von ρ_ϵ ein und erhalten

$$\rho_\epsilon = 0.6744898 \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma_{v_i}. \quad (11)$$

Mit Appendix H Formel (44) kann die Standardabweichung in den durchschnittlichen Fehler umgerechnet werden:

$$\rho_\epsilon = 0.6744898 \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \cdot \vartheta_{\mathcal{V}}$$

Das Problem an dieser Darstellung ist, dass die Zufallsvariable η unbekannt ist. Demnach muss diese geschätzt und deren Genauigkeit abgeschätzt werden.

Der Einfachheit halber schätzen wir den Term

$$\sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \quad (12)$$

ab. Da der Term (12) mit steigendem Freiheitsgrad η sinkt, schätzen wir den Term für $\eta = 3$ ab. Dann ist $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$ und der Term ergibt $\frac{\pi}{2}$. Damit haben wir:

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon &= 0.6744898 \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \vartheta_{\mathcal{V}} \\ &= 1.0594860 \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \vartheta_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

Dieser Vorfaktor vor dem wahrscheinlichen Fehler ist größer als bei der Normalverteilung. Bei der Betrachtung der nachfolgenden Tabelle, erschließt sich, dass sich der Vorfaktor immer mehr dem Wert 0.84535, also der Schätzung der Normalverteilung, annähert.

Tabelle 1: Vorfaktoren für ρ_ϵ bei verschiedenen η

η	3	4	5	10	15	20	25	30
$\sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)}$	1,5707	1,4142	1,3603	1,2929	1,2776	1,2708	1,2670	1,2645
$0.6744 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)}$	1,0594	0,9538	0,9175	0,8721	0,8617	0,8571	0,8545	0,8529

Nun können wir noch die Zufallsvariable $\vartheta_{\mathcal{V}}$ durch deren Schätzwert aus den Verbesserungen $\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{n}$ ersetzen. Dann kann deren Nenner mit $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ zu $\frac{1}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$ ausmultipliziert werden (siehe [Korte, 2017] (Seite 7)) und somit erhalten wir:

$$\rho_\epsilon = 1.0594860 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$$

Bleibt noch die Herleitung der Genauigkeit. Wie immer beginnen wir mit dem Fall $n = 2$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\vartheta_\epsilon}^2 &\stackrel{(i)}{=} E\{\tilde{D}_\epsilon^2\} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(ii)}{=} E\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^2 |v_i|\right)^2}{2 \cdot (2-1)}\right\} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(iii)}{=} E\left\{\frac{|v_1|^2 + |v_2|^2 + 2 \cdot |v_1| \cdot |v_2|}{2}\right\} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(iv)}{=} E\left\{\tilde{S}_v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \tilde{S}_v^2\right\} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(v)}{=} E\left\{2 \cdot \tilde{S}_v^2\right\} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(vi)}{=} 2 \cdot \sigma_v^2 - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(vii)}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(iix)}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \cdot \vartheta_\epsilon^2 - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(ix)}{=} \vartheta_\epsilon^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} - 1\right)
\end{aligned}$$

(i) Herleitung aus [Korte, 2017] (Seite 36), (ii) $\tilde{D}_\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$, (iii) Quadrat der Summe ausmultiplizieren, (iv) $\tilde{S}_v^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} = |v_1| \cdot |v_2|$ (vergleiche [Korte, 2017] (Seite 10)), (v) Termvereinfachungen, (vi) $E\{\tilde{S}_v^2\} = \sigma_v^2$, (vii) $\sigma_v = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sigma$, (iix) nach Appendix H Formel (44) gilt: $\sigma = \vartheta_\epsilon \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)}$.

Damit erhalten wir über Varianzfortpflanzung die Abschätzung:

$$\rho_\epsilon = 1.0594860 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} - 1}\right) \quad (13)$$

Bemerkung: Auch hier sollte man die Tabelle 1 verwenden, um einen Wert für $\sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)}$ zu erhalten.

Gehen wir über auf n Beobachtungen. Dann können wir in Formel (8) $E\{\sum_i v_i^2\} = E\{\tilde{S}_{v_i}^2\} \cdot n = \sigma_{v_i}^2 \cdot n$ und den in Appendix J hergeleiteten Wert $E\{|v_1| \cdot |v_2|\} = \frac{\eta}{\eta-2} \cdot \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \left(\sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin\left(\frac{1}{n-1}\right)\right)$ einsetzen. Anschließend ersetzen wir

$\frac{\eta}{\eta-2} = \sigma^2$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\vartheta_\epsilon}^2 &\stackrel{(i)}{=} \frac{n \cdot \sigma_{v_i}^2 + n \cdot (n-1) \cdot \sigma^2 \cdot \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \left(\sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin\left(\frac{1}{n-1}\right) \right)}{n \cdot (n-1)} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(ii)}{=} \frac{n \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 + n \cdot (n-1) \cdot \sigma^2 \cdot \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \left(\sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin\left(\frac{1}{n-1}\right) \right)}{n \cdot (n-1)} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(iii)}{=} \frac{\sigma^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin\left(\frac{1}{n-1}\right) \right) \right)}{n} - \vartheta_\epsilon^2 \cdot n \\
&\stackrel{(iv)}{=} \frac{\vartheta_\epsilon^2 \cdot \frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin\left(\frac{1}{n-1}\right) \right) \right)}{n} - \vartheta_\epsilon^2 \cdot n \\
&\stackrel{(v)}{=} \vartheta_\epsilon^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin\left(\frac{1}{n-1}\right) \right) \right) - n}{n}
\end{aligned}$$

(i) Einsetzen von $E\{\sum_i v_i^2\}$ und $E\{|v_i| \cdot |v_j|\}$, (ii) $\sigma_{v_i} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sigma$, (iii) Termvereinfachungen und σ^2 ausklammern, (iv) nach Appendix H Formel (44) ist $\sigma^2 = \vartheta_\epsilon^2 \cdot \frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \right)^2$, (v) ϑ_ϵ^2 ausklammern.

Nun können wir über Varianzfortpflanzung den Schätzwert vom wahrscheinlichen Fehler samt Genauigkeitsabschätzung angeben mit:

$$\rho_\epsilon = \begin{cases} 1.0594860 \cdot \frac{\sum_{i=1}^2 |v_i|}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} - 1} \right) & \text{falls } n = 2 \\ 1.0594860 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{\frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin\left(\frac{1}{n-1}\right) \right) \right) - n}{n}} \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (14)$$

3 Direkte Beobachtungen: L₁-Norm

In diesem Kapitel werden die Verbesserung als Abstand der betrachteten Beobachtung zum Schätzwert, genauer gesagt zum Median ($med(\boldsymbol{\ell})$), definiert. Für die Definition des Median führen wir hier den sortierten Beobachtungsvektor ein und schreiben $\ell_{(i)}$ für den i -ten Eintrag in diesem Vektor (dabei ist die Reihenfolge von gleichwertigen Beobachtungen beliebig aber fest zu wählen). Ab hier betrachten wir nur noch die Werte für die sortierten Beobachtungen ($\ell_{(i)}$), für die in der Regel gilt: $\ell_{(i)} \neq \ell_i$. Damit ergibt sich nach [Kreyszig, 1991] (Seite 43) die Definition des Median für n direkte Beobachtungen:

$$med(\boldsymbol{\ell}) = \begin{cases} \ell_{(\frac{n+1}{2})} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{\ell_{(\frac{n}{2})} + \ell_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \quad (15)$$

Daraus ergibt sich die Definition der Verbesserung zur sortierten Beobachtung $\ell_{(i)}$ als die Differenz des Median der Beobachtungsgruppe zur Einzelbeobachtung $\ell_{(i)}$ (Umrechnung siehe Appendix ??):

$$v_{(i)} = med(\boldsymbol{\ell}) - \ell_{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade und } i = \frac{n+1}{2} \\ \epsilon_{(\frac{n+1}{2})} - \epsilon_{(i)} & \text{falls } n \text{ ungerade und } i \neq \frac{n+1}{2} \\ \frac{-\epsilon_{(\frac{n}{2})} + \epsilon_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} & \text{falls } n \text{ gerade und } i = \frac{n}{2} \\ \frac{\epsilon_{(\frac{n}{2})} - \epsilon_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} & \text{falls } n \text{ gerade und } i = \frac{n}{2} + 1 \\ \frac{\epsilon_{(\frac{n}{2})} + \epsilon_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} - \epsilon_{(i)} & \text{falls } n \text{ gerade und } i \notin \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\} \end{cases} \quad (16)$$

Diese Definitionen führen bei der Bestimmung vom wahrscheinlichen Fehler zu Problemen, so dass wir eine allgemeinere Definition für den Median aufstellen. Dafür betrachten wir die Erweiterung der Definition des Median von [Voß, 2004] (Seite 127 ff.), die besagt, dass der Median nicht mehr ein spezieller Wert, sondern als ein beliebiger Wert \bar{x} dargestellt wird, für den gilt: $f(\mathcal{X} \leq \bar{x}) \geq \frac{1}{2}$ und $f(\mathcal{X} \geq \bar{x}) \geq \frac{1}{2}$. In unserem Fall trifft diese Definition auf alle Werte zwischen $\ell_{(\frac{n}{2})}$ und $\ell_{(\frac{n}{2}+1)}$ zu. Insbesondere für $\frac{\ell_{(\frac{n}{2})} + \ell_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}$, was wir bisher verwendeten. Definieren wir jetzt aber:

$$med(\boldsymbol{\ell}) = \ell_{(\frac{n+1}{2})}, \quad (17)$$

so ist keine Fallunterscheidung mehr bezüglich gerader und ungerader Anzahl von Beobachtungen nötig und es gilt:

$$v_{(i)} = med(\boldsymbol{\ell}) - \ell_{(i)} = \begin{cases} 0 & i = \frac{n+1}{2} \\ \epsilon_{(\frac{n+1}{2})} - \epsilon_{(i)} & i \neq \frac{n+1}{2} \end{cases} \quad (18)$$

3.1 Normal-Verteilung

Gehen wir für dieses Unterkapitel davon aus, dass die wahren Beobachtungsfehler ϵ normalverteilt sind mit Erwartungswert $E\{\mathcal{E}\} = 0$ und Standardabweichung $\sigma_\epsilon = \sigma$. Dann folgt aus Formel (16), dass sich die Verbesserungen zum Median aus Linearkombinationen von wahren Fehlern beschreiben lassen. Wegen der Linearität der Normalverteilung [Koch, 1997] (Seite 149) sind auch die Verbesserungen normalverteilt. Insbesondere folgt aus $E\{\mathcal{E}\} = 0$, dass auch $E\{\mathcal{V}\} = 0$ gilt. Bleibt noch die Standardabweichung zu bestimmen, dies kann allgemein unter Berücksichtigung aller Fallunterscheidungen in Formel (16) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \sigma_{v(i)} &= \sqrt{\left(\frac{\delta v(i)}{\delta \epsilon(i)} \cdot \sigma\right)^2 + \left(\frac{\delta v(i)}{\delta \epsilon(\frac{n+1}{2})} \cdot \sigma\right)^2 + \left(\frac{\delta v(i)}{\delta \epsilon(\frac{n}{2}+1)} \cdot \sigma\right)^2 + \left(\frac{\delta v(i)}{\delta \epsilon(\frac{n}{2})} \cdot \sigma\right)^2} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade und } i = \frac{n+1}{2} \\ \sqrt{2} \cdot \sigma & \text{falls } n \text{ ungerade und } i \neq \frac{n+1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sigma & \text{falls } n \text{ gerade und } i \in \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right\} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sigma & \text{falls } n \text{ gerade und } i \notin \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right\} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Die Herleitung der Formel von Peters verläuft analog zu der Berechnung beim Mittelwert und normalverteilten wahren Beobachtungsfehlern. Und ergibt nach [Peters, 1856] für den wahrscheinlichen Fehler eines wahren Beobachtungsfehlers ρ_ϵ und den wahrscheinlichen Fehler einer Verbesserung $\rho_{v(i)}$:

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon &= 0.4769 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma \\ \rho_{v(i)} &= 0.4769 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_{v(i)} \end{aligned}$$

Daraus und aus der Fallunterscheidung (19) kann der Zusammenhang zwischen $\rho_{v(i)}$ und ρ_ϵ abgeleitet werden:

$$\rho_{v(i)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade und } i = \frac{n+1}{2} \\ \sqrt{2} \cdot \rho_\epsilon & \text{falls } n \text{ ungerade und } i \neq \frac{n+1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \rho_\epsilon & \text{falls } n \text{ gerade und } i \in \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right\} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \rho_\epsilon & \text{falls } n \text{ gerade und } i \notin \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right\} \end{cases}$$

Nun soll ρ_ϵ durch $\rho_{v(i)}$ ausgedrückt werden. Dabei wollen wir nur zwischen n gerade beziehungsweise n ungerade unterscheiden. In beiden Fällen nehmen wir den größeren Faktor. So ergibt sich:

$$\rho_\epsilon = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \rho_v & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \sqrt{2} \cdot \rho_v & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Betrachtet man die Fallunterscheidung nur zwischen ungeraden und geraden n , so ist der durchschnittliche Fehler $\vartheta_v = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)$ als gewichtetes Mittel von Zufallsvariablen mit unter-

schiedlicher Varianz zu interpretieren und über $\tilde{d}_v = \frac{P(|v|) \cdot |v|}{P(v)}$ zu schätzen. Die Gewichte für die einzelnen Verbesserungen werden über die gegebene Standardabweichung mit $P(v) = \frac{1}{\sigma^2}$ angesetzt (für n ungerade und $i = \frac{n+1}{2}$ wählen wir als Gewicht: $P(v_{(i)}) = \frac{1}{(\sqrt{2} \cdot \sigma)^2}$). Dies entspricht der Idee, dass der Median und $v_{(\frac{n+1}{2})}$ zwei unterschiedliche Werte sind. Dadurch schätzen wir den Fehler etwas größer, als er eigentlich ist. Da die Verteilungsfunktion symmetrisch zur y-Achse ist, ist der Wert für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von v der gleiche wie von $-v$. Also gilt $\tilde{d}_v = \frac{P(v) \cdot |v|}{P(v)}$ und es ergibt sich:

$$\tilde{d}_v = \begin{cases} \frac{\sum_{j \neq \frac{n+1}{2}} \frac{1}{(\sqrt{2} \cdot \sigma)^2} \cdot |v_{(j)}| + \frac{1}{(\sqrt{2} \cdot \sigma)^2} \cdot 0}{(n-1) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} \cdot \sigma)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2} \cdot \sigma)^2}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{\sum_{j \notin \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\}} \frac{1}{(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sigma)^2} \cdot |v_{(j)}| + \sum_{k=\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}+1} \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sigma)^2} \cdot |v_{(k)}|}{(n-2) \cdot \frac{1}{(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sigma)^2} + 2 \cdot \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sigma)^2}} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Erweitern wir die Terme mit dem Gewicht der Verbesserungen, die keinen Einfluss auf den Median haben, und ziehen im Fall n ungerade die Null mit in die Summe, so ergibt sich:

$$\tilde{d}_v = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^n |v_{(j)}|}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{\sum_{j \notin \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\}} |v_{(j)}| + \sum_{k=\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}+1} 3 \cdot |v_{(k)}|}{n+4} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \quad (20)$$

Somit ergibt sich aus der Formel für den durchschnittlichen Fehler einer Verbesserung $\rho_{v_i} = 0.845347 \cdot \vartheta_v$ beziehungsweise deren Schätzung ($\rho_{v_i} = 0.845347 \cdot \tilde{d}_v$), die Schätzung für den wahrscheinlichen Fehler von den wahren Fehlern zu:

$$\rho_\epsilon = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0.845347 \cdot \frac{\sum_{j=1}^n |v_{(j)}|}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \sqrt{2} \cdot 0.845347 \cdot \frac{\sum_{j \notin \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\}} |v_{(j)}| + \sum_{k=\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}+1} 3 \cdot |v_{(k)}|}{n+4} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \quad (21)$$

Nun bleibt noch die Fehlerabschätzung des wahrscheinlichen Fehlers. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst nur zwei direkte Beobachtungen. Bei der Betrachtung der Definition des Median und des Mittelwertes bei zwei Beobachtungen fällt auf, dass für beide gilt:

$$\text{med}(\ell) = \mu = \frac{\ell_{(1)} + \ell_{(2)}}{2}.$$

So erkennt man, dass die Verbesserungen in beiden Fällen gleich berechnet werden, und somit auch die selbe Verteilung und Abweichung haben. [Helmert, 1876] hatte die explizite Formel der Abweichung für den wahrscheinlichen Fehler beim Mittelwert (ρ_ϵ^N) für zwei Beobachtungen angegeben mit:

$$\begin{aligned}
\rho_\epsilon^N &\stackrel{(i)}{=} 0.845347 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}} \\
&\stackrel{(ii)}{=} 0.845347 \cdot \frac{\sum_1^2 |v_i|}{\sqrt{2 \cdot (2-1)}} \\
&\stackrel{(iii)}{=} 0.845347 \cdot \frac{\sum_1^2 |v_i|}{\sqrt{2}} \\
&\stackrel{(iv)}{=} 0.845347 \cdot \frac{\sum_1^2 |v_i|}{2} \cdot \sqrt{2}
\end{aligned}$$

(i) Formel von Peters [Peters, 1856], (ii) $n=2$ setzen, (iii) Termvereinfachungen, (iv) mit $\sqrt{2}$ erweitern.

Diese Formel ist identisch mit Formel (21) für $n = 2$, hat also auch dieselbe Genauigkeit. Somit folgt:

$$\rho_\epsilon = 0.84535 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\pi-2}{2}} \right) \quad \text{falls } n = 2$$

Betrachten wir abschließend für dieses Unterkapitel die Genauigkeit bei mehr als zwei Beobachtungen und Verfahren, wie [Helmert, 1876] oder [Korte, 2017]. Dann ergibt sich bei n ungerade die Varianz vom durchschnittlichen Fehler als:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\vartheta_\epsilon}^2 &\stackrel{(i)}{=} E\{\tilde{D}_\epsilon^2\} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(ii)}{=} E\left\{ \frac{(\sum_{i=1}^n |v_i|)^2}{2 \cdot n^2} \right\} - \vartheta_\epsilon \\
&\stackrel{(iii)}{=} \frac{\sigma_v^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot E\{|v_i| \cdot |v_j|\}}{2 \cdot n^2} - \vartheta_\epsilon
\end{aligned}$$

(i) Herleitung aus [Korte, 2017] (Seite 36), (ii) $\tilde{D}_\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{2 \cdot n}}$, (iii) herausziehen von $\frac{1}{2 \cdot n^2}$ aus dem Erwartungswert und dann anwenden von Herleitung aus [Korte, 2017] (Seite 36), und es gilt: ($i \neq j$).

Setzen wir nun den Wert von $E\{|v_i| \cdot |v_j|\}$ aus Appendix L ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\vartheta_\epsilon}^2 &\stackrel{(i)}{=} \frac{\sigma_v^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot \frac{2 \cdot \sigma^2}{\pi} \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2}))}{2 \cdot n^2} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(ii)}{=} \frac{2 \cdot \sigma^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot \frac{2 \cdot \sigma^2}{\pi} \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2}))}{2 \cdot n^2} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(iii)}{=} \frac{\pi \cdot 2 \cdot \sigma^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot \sigma^2 \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2}))}{2 \cdot n^2 \cdot \pi} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(iv)}{=} \frac{\pi \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2}))}{2 \cdot n^2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot \sigma^2)^{-1}} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(v)}{=} \frac{\pi \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2}))}{2 \cdot n^2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot \sigma^2)^{-1}} - \vartheta_\epsilon^2 \\
&\stackrel{(vi)}{=} \vartheta_\epsilon^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2}))}{2 \cdot n^2} - 1 \right) \\
&\stackrel{(vii)}{=} \vartheta_\epsilon^2 \cdot \frac{\pi \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2})) - 2 \cdot n^2}{2 \cdot n^2} \tag{22}
\end{aligned}$$

(i) Einsetzen von $E\{|v_1| \cdot |v_2|\}$, (ii) $\sigma_v^2 = 2 \cdot \sigma^2$ (siehe Formel (19)), (iii) mit $\frac{\pi}{\pi}$ erweitern, (iv) $(2 \cdot \sigma^2)^{-1}$ in den Nenner ziehen, (v) Termvereinfachungen, (vi) $\vartheta_\epsilon^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma\right)^2 = \frac{1}{\pi \cdot (2 \cdot \sigma^2)^{-1}}$, (vii) auf gleichen Nenner bringen.

Kommen wir nun zum Fall n gerade. Hier haben wir das Problem, dass $\rho_\epsilon = \sqrt{2} \cdot \rho_v$ viel zu groß abgeschätzt wird, falls $n \neq 2$, so dass es immer eine Genauigkeitssteigerung gäbe, falls man eine Beobachtung entfernt und nur noch $n-1$ Beobachtungen betrachtet. Somit ist dieses Modell nicht mehr wahrheitskonform und muss ersetzt werden durch Formel (17). Das führt dazu, dass die Formel für ρ_ϵ und deren Genauigkeit analog zum Fall n ungerade zu bestimmen ist.

Somit ergibt sich die abschließende Formel:

$$\rho_\epsilon = \begin{cases} \sqrt{2} \cdot 0.84535 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{\pi-2}{2}}\right) & \text{falls } n = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0.845347 \cdot \frac{\sum_{j=1}^n |v_{(j)}|}{n} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{\pi \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2})) - 2 \cdot n^2}{2 \cdot n^2}}\right) & \text{sonst} \end{cases} \tag{23}$$

Im Fall $n \neq 2$ ist die Anweichung analog zu [Helmert, 1876] oder [Korte, 2017] über Varianzfortpflanzung anzubringen ist.

3.2 Laplace-Verteilung

In diesem Kapitel werden die wahren Beobachtungsfehler mit Laplace-Verteilung um den Mittelwert 0 mit Standardabweichung σ angenommen. Wegen der Linearität der Laplace-Verteilung (siehe Appendix B) sind die nach Formel (18) berechneten Verbesserungen Laplace verteilt mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung $\sigma_{v_i} = \sqrt{2} \cdot \sigma$. (Hierbei nehmen wir an, dass gilt: $i \neq \frac{n+1}{2}$. Die Legitimation dieses Falls ist durch die höheren Standardabweichung gegeben, da das Ergebnis somit schlechter geschätzt wird. Das entspricht Formel (19) für den Fall n ungerade und $i \neq \frac{n+1}{2}$).

Die Herleitung des wahrscheinlichen Fehlers verläuft analog zu der Berechnung in Appendix C und ergibt für den wahrscheinlichen Fehler eines wahren Beobachtungsfehlers ρ_ϵ und den wahrscheinlichen Fehler einer Verbesserung $\rho_{v(i)}$:

$$\begin{aligned}\rho_\epsilon &= 0.693147 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \\ \rho_{v(i)} &= 0.693147 \cdot \frac{\sigma_{v(i)}}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Hieraus folgen zwei Eigenschaften von $\rho_{v(i)}$. Erstens folgt mit $\sigma_{v(i)} = \sqrt{2} \cdot \sigma$ der Zusammenhang zwischen $\rho_{v(i)}$ und ρ_ϵ :

$$\rho_{v(i)} = \sqrt{2} \cdot \rho_\epsilon$$

Und zweitens folgt aus Appendix D, dass $\vartheta_{v(i)} = \frac{\sigma_{v(i)}}{\sqrt{2}}$ und somit gilt:

$$\rho_{v(i)} = 0.693147 \cdot \vartheta_{v(i)}$$

Nun wollen wir ρ_ϵ durch $\rho_{v(i)}$ ausdrücken, indem wir durch $\sqrt{2}$ dividieren. Außerdem setzen wir die Formel von $\rho_{v(i)}$ von oben ein:

$$\rho_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0.693147 \cdot \vartheta_{v(i)}$$

Da die Schätzung vom durchschnittlichen Fehler der Verbesserungen $\left(\tilde{d}_v = \frac{\sum_{j=1}^n |v(j)|}{n}\right)$ unabhängig von der Verteilung ist, entspricht diese der Formel (20) für den Fall n ungerade:

$$\rho_\epsilon = 0.693147 \cdot \frac{\sum_{j=1}^n |v(j)|}{n \cdot \sqrt{2}} \quad (24)$$

Nun bleibt noch die Fehlerabschätzung des wahrscheinlichen Fehlers. Wie sonst auch betrachten wir zunächst nur zwei direkte Beobachtungen. Bei der Definition des Median und der Normalverteilung bei zwei Beobachtungen fällt auf, dass für beide gilt:

$$\text{med}(\ell) = \mu = \frac{\ell_{(1)} + \ell_{(2)}}{2}.$$

So erkennt man, dass die Verbesserungen in beiden Fällen gleich berechnet werden, und somit auch dieselbe Verteilung und Abweichung haben. Somit folgt:

$$0.693147 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{2}} \cdot (1 \pm 1) \quad \text{falls } n = 2$$

Gehen wir nun über zu mehr als zwei Beobachtungen. So ergibt sich die Varianz vom durchschnittlichen Fehler als:

$$\sigma_{\vartheta_\epsilon}^2 = \frac{\sigma_v^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot E\{|v_i| \cdot |v_j|\}}{2 \cdot n^2} - \vartheta_\epsilon^2$$

Herleitung siehe Formel (8).

Setzen wir nun $E\{|v_i| \cdot |v_j|\} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sigma_{v_i}^2$ aus Appendix M ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta_\epsilon}^2 &\stackrel{(i)}{=} \frac{\sigma_{v_i}^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sigma_{v_i}^2}{2 \cdot n^2} - \vartheta_\epsilon^2 \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{2 \cdot \sigma^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \sigma^2}{2 \cdot n^2} - \vartheta_\epsilon^2 \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{2 \cdot 2 \cdot \vartheta_\epsilon^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \vartheta_\epsilon^2}{2 \cdot n^2} - \vartheta_\epsilon^2 \\ &\stackrel{(iv)}{=} \frac{2 \cdot \vartheta_\epsilon^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \vartheta_\epsilon^2 - n^2 \cdot \vartheta_\epsilon^2}{n^2} \\ &\stackrel{(v)}{=} \vartheta_\epsilon^2 \cdot \frac{2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} - n^2}{n^2} \end{aligned} \quad (25)$$

(i) Einsetzen von $E\{|v_1| \cdot |v_2|\}$, (ii) $\sigma_v^2 = 2\sigma^2$, (iii) $\sigma^2 = 2 \cdot \vartheta^2$ (siehe Appendix D), (iv) Termvereinfachungen, (v) ϑ_ϵ^2 ausklammern.

Somit ergibt sich die Genauigkeitsabschätzung:

$$\rho_\epsilon = \begin{cases} 0.693147 \cdot \frac{\sum_i |v_i|}{\sqrt{2}} \cdot (1 \pm 1) & \text{falls } n = 2 \\ 0.693147 \cdot \frac{\sum_{j=1}^n |v_{(j)}|}{n \cdot \sqrt{2}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} - n^2}{n^2}} \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (26)$$

Im Fall $n \neq 2$ ist die Anweichung analog zu [Helmert, 1876] oder [Korte, 2017] über Varianzfortpflanzung anzubringen ist.

3.3 Student t-Verteilung

In diesem Kapitel wird der wahrscheinliche Fehler von Student t-verteilten wahren Beobachtungsfehlern aus den Verbesserungen von n Beobachtungen zum Median bestimmt. Zudem wollen wir die Genauigkeit dieses Fehlers abschätzen.

Die Verbesserungen aus Formel (18) sind nach Appendix F und G wieder skaliert Student t-verteilt mit Freiheitsgrad η und Standardabweichung $\sigma_{N,v_i} = \sqrt{2}$ für die Normalverteilung.

Die Berechnung des durchschnittlichen Fehlers für skaliert Student t-verteilte Zufallsvariablen in Appendix I Formel (45) ergibt für die Verbesserungen (ρ_v) oder für die wahren Beobachtungsfehler (ρ_ϵ):

$$\begin{aligned}\rho_{v_i} &= 0.6744898 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma \\ \rho_\epsilon &= 0.6744898 \cdot \sigma\end{aligned}\tag{27}$$

Hierbei gilt, dass sich σ auf die Standardabweichung der unskalierten Student t-Verteilung bezieht. Da der Freiheitsgrad η unverändert bleibt, ergibt sich nach [Kreyszig, 1991] (Seite 162) in beiden Fällen $\sigma = \sqrt{\frac{\eta}{\eta-2}}$. Insbesondere gilt nach Appendix F und G, dass $\sigma_{v_i} = \sqrt{2} \cdot \sigma$.

Durch Umkehrung dieser Formel erhält man: $\rho_\epsilon = 0.6744898 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sigma_{v_i}$. Und mit dem Übergang von σ_{v_i} auf ϑ_{v_i} nach Appendix H mittels Umkehrung der Formel (44) ergibt sich:

$$\rho_\epsilon = 0.6744898 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \cdot \vartheta_{v_i}$$

Und nun können wir wieder ϑ_{v_i} abschätzen über $\tilde{d}_v = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{n}$. Insbesondere erhalten wir hier mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ die Schätzung von $\tilde{d}_\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{2} \cdot n}$. Somit ergibt sich insgesamt:

$$\rho_\epsilon = 0.6744898 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{2} \cdot n}$$

Nun könnten wir den Term $\sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)}$ wieder mit Tabelle 1 ersetzen. Da aber zu diesem Zeitpunkt η noch nicht bekannt ist, wird der Term größt möglichst abgeschätzt. Dazu wählen wir $\eta = 3$ und erhalten analog zu dem Fall bei L_2 -Norm Schätzer:

$$\rho_\epsilon = 1.0594860 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{2} \cdot n}\tag{28}$$

Bleibt wieder einmal nur die Fehlerabschätzung vom stochastischen Anteil $\vartheta_\epsilon \approx \tilde{d}_\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{2} \cdot n}$. Und wieder führen wir den Fall $n = 2$ wegen der zulässigen Definition des Median als Mittelwert zurück auf den Fall für den L_2 -Norm Schätzer und erhalten:

$$\rho_\epsilon = 1.0594860 \cdot \frac{\sum_{i=1}^2 |v_i|}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} - 1} \right)\tag{29}$$

Bleibt nur noch die Genauigkeitsabschätzung für mehr als zwei Beobachtungen. Schauen wir

uns Formel (8) an und setzen $E\{|v_i| \cdot |v_j|\} = \frac{2}{\pi} \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2})) \cdot \sigma_{v_i}^2$, wie es in Appendix N hergeleitet wurde, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\vartheta_\epsilon}^2 \stackrel{(i)}{=} \frac{\sigma_{v_i}^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2})) \cdot \sigma_{v_i}^2}{2 \cdot n^2} - \vartheta_\epsilon^2 \\
& \stackrel{(ii)}{=} \frac{2 \cdot \sigma^2 \cdot (n-1) + n \cdot (n-1) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2})) \cdot 2 \cdot \sigma^2}{2 \cdot n^2} - \vartheta_\epsilon^2 \\
& \stackrel{(iii)}{=} \frac{2 \cdot \frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})}{\Gamma(\frac{\eta-1}{2})}\right)^2 \cdot \vartheta_\epsilon^2 \cdot (n-1)}{2 \cdot n^2} \dots \\
& \quad + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2})) \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})}{\Gamma(\frac{\eta-1}{2})}\right)^2 \cdot \vartheta_\epsilon^2}{2 \cdot n^2} - \vartheta_\epsilon^2 \\
& \stackrel{(iv)}{=} \frac{\frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})}{\Gamma(\frac{\eta-1}{2})}\right)^2 \cdot \vartheta_\epsilon^2 \cdot (n-1)}{n^2} \dots \\
& \quad + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2})) \cdot \frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})}{\Gamma(\frac{\eta-1}{2})}\right)^2 \cdot \vartheta_\epsilon^2 - n^2 \cdot \vartheta_\epsilon^2}{n^2} \\
& \stackrel{(v)}{=} \vartheta_\epsilon^2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})}{\Gamma(\frac{\eta-1}{2})}\right)^2 \cdot (n-1) \dots \right. \\
& \quad \left. + n \cdot (n-1) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2})) \cdot \frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})}{\Gamma(\frac{\eta-1}{2})}\right)^2 - n^2\right)
\end{aligned}$$

(i) Einsetzen von $E\{|v_i| \cdot |v_j|\}$, (ii) $\sigma_{v_i}^2 = 2 \cdot \sigma^2$, (iii) nach Appendix H Formel (44) gilt: $\sigma_Z = \vartheta_Z \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\eta-2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})}{\Gamma(\frac{\eta-1}{2})}}$, (iv) Termvereinfachungen, (v) $\vartheta_\epsilon^2 \cdot \frac{1}{n^2}$ ausklammern.

Also ergibt sich letztendlich:

$$\begin{aligned}
\rho_\epsilon &= 1.0594860 \cdot \frac{\sum_{i=1}^2 |v_i|}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{\pi}{\eta-2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})}{\Gamma(\frac{\eta-1}{2})} - 1}\right) && \text{falls } n = 2 \\
\rho_\epsilon &= 1.0594860 \cdot \frac{\sum_{i=1}^2 |v_i|}{n \cdot \sqrt{2}} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})}{\Gamma(\frac{\eta-1}{2})}\right)^2 \cdot (n-1) \dots \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + n \cdot (n-1) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (\sqrt{3} + \arcsin(\frac{1}{2})) \cdot \frac{\pi}{\eta-2} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{\eta}{2})}{\Gamma(\frac{\eta-1}{2})}\right)^2 - n^2\right)\right) && \text{sonst}
\end{aligned}$$

4 Ausblick

Der Ausblick teilt sich in zwei Bereiche auf. Der erste beschreibt Verfahrensmöglichkeiten zum weiteren Vorgehen zur Bestimmung der durchschnittlichen und mittleren Abweichung, und der zweite behandelt den Übergang von einem Parameter (direkte Beobachtungen) auf mehrere Parameter (vermittelnde Beobachtungen).

4.1 Weiterführende Überlegungen

In dieser Arbeit wurden mehrere Vereinfachungen vorgenommen, die in weiterführenden Betrachtungen zu verbesserten Ergebnissen führen könnten.

Zunächst haben wir die Genauigkeitsbestimmung bei Laplace verteilten wahren Beobachtungsfehlern vereinfacht. Genauer gesagt wurde beim Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei Laplace verteilten Verbesserungen von Beobachtungen zum Mittelwert oder zum Median (siehe Appendix E und M) nicht sauber gearbeitet. Dabei haben wir die Symmetrie der Laplace-Verteilung verwendet, um die Beträge von $|v_i| \cdot |v_j|$ verschwinden zu lassen. Der korrekte Weg wäre aber den Discontinuitätsfaktor zu verwenden, was die Berechnung aber wesentlich komplizierter machen würde.

Eine zweite Vereinfachung besteht in der Definition der Student t-Verteilung. Hier wurde festgesetzt, dass die Chi-Quadrat-verteilte Zufallsvariable \mathcal{Y} für alle wahren Beobachtungsfehler gleich zusetzen ist. Da die Verbesserungen sowohl für die Schätzung über den Mittelwert als auch über die Schätzung über den Median eine Linearkombination der wahren Beobachtungsfehler sind, konnte durch diese Vereinfachung eine einfache Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Verbesserungen gefunden werden. Den Einfluss dieser Vereinfachung auf den durchschnittlichen und wahrscheinlichen Fehler, sowie dessen Genauigkeit können wir im Moment noch nicht darstellen. Selbes gilt für die Approximation des wahrscheinlichen Fehlers in Appendix I.2 und der Wahl des Freiheitsgrades für Tabelle (1).

4.2 Ausgleichsmodelle nach mehreren Parametern

Oft wird die Erweiterung des wahrscheinlichen Fehlers angegeben mit:

$$\vartheta_\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n - m)}} \quad (30)$$

[Helmert, 1875] hat gezeigt, dass diese Formel nur unter der Annahme stimmt, dass direkte Beobachtungen vorliegen. In diesem Fall kann die Herleitung analog zu [Korte, 2017] (ab Kapitel 2) durchgeführt werden. Ansonsten wird ϑ_ϵ über diese Formel zu groß geschätzt.

Nun wollen wir betrachten, was passiert, wenn wir anstelle von direkten Beobachtungen solche betrachten, die linear von mehreren Parametern abhängig sind. Das heißt, wir können die Beobachtungen als eine Linearkombination von Parametern darstellen. Die entstehende Gleichung für eine Beobachtung ℓ_i , die durch eine Linearkombination von Parametern x_j mit Faktoren $a_{i,j}$

dargestellt werden soll, hat die Form:

$$\ell_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} \cdot x_j$$

Bei mehr als m Beobachtungen hat man kein eindeutiges Ergebnis dieser Gleichung und kommt auf einen vermittelnden Ausgleich der Form:

$$\ell_i + v_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} \cdot x_j$$

Durch Umstellung nach v_i erhält man die von [Helmert, 1875] aufgestellte Formel für die Verbesserungen:

$$v_i = -\ell_i + \sum_{j=1}^m a_{i,j} \cdot x_j \quad i \in 1, \dots, n \quad (31)$$

Weiter bezeichne \bar{x}_j den wahren Wert für den j -ten Parameter, dann gilt für die Wahren Beobachtungsfehler ϵ_i :

$$\epsilon_i = -\ell_i + \sum_{j=1}^m a_{i,j} \cdot \bar{x}_j \quad i \in 1, \dots, n \quad (32)$$

Beschränken wir uns zunächst nur auf zwei Beobachtungen, die gleich genau sind ($m=2$), dann gibt die Ausgleichsrechnung nach den kleinsten Quadraten die Lösung:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (A' \cdot A)^{-1} \cdot A' \cdot \ell$$

Wobei die Einträge der Designmatrix A über $a_{i,j}$, mit i ist die Zeile und j die Spalte vom Eintrag, gegeben sind. Außerdem bedeutet A' , dass die Matrix A an dieser Stelle zu transponieren ist und ℓ beschreibt den Vektor in dem die n Beobachtungen stehen.

Betrachten wir die Matrix $C = (A' \cdot A)^{-1} \cdot A'$, so hat diese die Dimension $2 \times n$. Bezeichnen wir die Zeilen von C mit α und β , so fällt auf, dass wir mit deren Hilfe die Parameter x_1 und x_2 als Linearkombination der Beobachtungen schreiben können:

$$x_1 = \alpha \cdot \ell \quad x_2 = \beta \cdot \ell \quad (33)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bar{x} - \mathbf{x} &\stackrel{(i)}{=} \begin{bmatrix} \alpha \cdot (\ell + \epsilon) \\ \beta \cdot (\ell + \epsilon) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \cdot \ell \\ \beta \cdot \ell \end{bmatrix} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \begin{bmatrix} \alpha \cdot \epsilon \\ \beta \cdot \epsilon \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

(i) Die geschätzten Parameter ergeben sich aus Formel (33) und die wahren Parameter ergeben sich aus der Schätzung der Parameter mit den Beobachtungen, die um die wahren Fehler bereinigt wurden. (ii) Termvereinfachungen.

Mit dieser Erkenntnis können wir die Verbesserungen (v_i) mit den wahren Beobachtungsfehlern (ϵ_i) ins Verhältnis zu einander bringen, indem man sieht:

$$\begin{aligned}
v_i &\stackrel{(i)}{=} -\ell_i + a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 \\
&\stackrel{(ii)}{=} -\ell_i + a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + a_{i,1} \cdot \bar{x}_1 + a_{i,2} \cdot \bar{x}_2 - a_{i,1} \cdot \bar{x}_1 - a_{i,2} \cdot \bar{x}_2 \\
&\stackrel{(iii)}{=} (-\ell_i + a_{i,1} \cdot \bar{x}_1 + a_{i,2} \cdot \bar{x}_2) + a_{i,1} \cdot (x_1 - \bar{x}_1) + a_{i,2} \cdot (x_2 - \bar{x}_2) \\
&\stackrel{(iv)}{=} \epsilon_i + a_{i,1} \cdot (x_1 - \bar{x}_1) + a_{i,2} \cdot (x_2 - \bar{x}_2) \\
&\stackrel{(v)}{=} \epsilon_i - a_{i,1} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) - a_{i,2} \cdot (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\epsilon})
\end{aligned} \tag{35}$$

(i) Formel (31), (ii) erweitern mit $0 = a_{i,1} \cdot \bar{x}_1 + a_{i,2} \cdot \bar{x}_2 - a_{i,1} \cdot \bar{x}_1 - a_{i,2} \cdot \bar{x}_2$, (iii) Termvereinfachungen, (iv) Formel (32), (v) Formel (34).

Um nun den Schätzwert für den wahrscheinlichen Fehler zu erhalten, benötigen wir den durchschnittlichen Wert von $\sum_{i=1}^n |v_i|$. Für eine erste Schätzung betrachten wir die geschätzte Verbesserungen \tilde{v}_i , für die nicht die wahren Beobachtungsfehler verwendet werden, sondern deren Beträge. Somit ergibt sich:

$$\tilde{v}_i = |\epsilon_i| - a_{i,1} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \cdot |\epsilon_j| \right) - a_{i,2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \cdot |\epsilon_j| \right)$$

Für dieses \tilde{v}_i gilt $\tilde{v}_i \leq |v_i|$ und somit gilt auch:

$$\sum_{i=1}^n |v_i| > \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i = \sum_{i=1}^n |\epsilon_i| - a_{i,1} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot |\epsilon_j| \right) - a_{i,2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \cdot |\epsilon_j| \right) \tag{36}$$

Beachtet man jetzt den Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc} \sum_{i=1}^n a_{i,1} \cdot \alpha_i & \sum_{i=1}^n a_{i,1} \cdot \beta_i \\ \sum_{i=1}^n a_{i,2} \cdot \alpha_i & \sum_{i=1}^n a_{i,2} \cdot \beta_i \end{array} \right] &\stackrel{(i)}{=} A' \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}' \\
&\stackrel{(ii)}{=} A' \cdot ((A' \cdot A)^{-1} \cdot A')' \\
&\stackrel{(iii)}{=} (A' \cdot A) \cdot (A' \cdot A)^{-1} \\
&\stackrel{(iv)}{=} \mathbb{1}_2
\end{aligned}$$

(i) Summe als Matrix-Matrix-Multiplikation dargestellt, (ii) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = (A' \cdot A)^{-1} \cdot A'$, (iii) Klammer transponieren, (iv) Termvereinfachungen.

Somit gilt insbesondere $\sum_{i=1}^n a_{i,1} \cdot \alpha_i = \sum_{i=1}^n a_{i,2} \cdot \beta_i = 1$. Zum Schluss können wir den wahrscheinlichen Fehler der wahren Beobachtungsfehler ϑ_ϵ entweder über die Formel $\tilde{d}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n |\epsilon_i|}{n}$, oder durch eine gewichtete Summe mit Gewichten p_i für den i -ten wahren Beobachtungsfehler: $\tilde{d}_2 = \sum_{i=1}^n p_i \cdot |\epsilon_i|$ schätzen. Setzen wir für die Gewichte jetzt $p_i = a_{i,1} \cdot \alpha_i$ beziehungsweise $p_i = \sum_{i=1}^n a_{i,2} \cdot \beta_i$ ein, so ergibt Formel (36):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |v_i| &> \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i = \sum_{i=1}^n |\epsilon_i| - a_{i,1} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot |\epsilon_j| \right) - a_{i,2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \cdot |\epsilon_j| \right) \\
&\stackrel{(i)}{=} \left(\sum_{i=1}^n |\epsilon_i| \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot |\epsilon_j| \right) \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_{i,2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \cdot |\epsilon_j| \right) \right) \\
&\stackrel{(ii)}{=} \tilde{d}_1 \cdot n - \tilde{d}_2 - \tilde{d}_2 \\
&\stackrel{(iii)}{\approx} \vartheta_\epsilon \cdot n - \vartheta_\epsilon - \vartheta_\epsilon \\
&\stackrel{(iv)}{=} \vartheta_\epsilon \cdot (n - 2)
\end{aligned}$$

(i) Die Summe auf die einzelnen Summanden aufteilen, (ii) Abschätzungen des wahrscheinlichen Fehlers von oben einsetzen, (iii) die Abschätzungen ergeben ungefähr den wahren Wert für den wahrscheinlichen Fehler, (iv) Termvereinfachungen.

Für weitere Parameter würden neue Terme in der Berechnung von $\sum_{i=1}^n |v_i|$ auftauchen, so dass allgemein gilt: $\sum_{i=1}^n |v_i| > \vartheta_\epsilon \cdot (n - m)$, wobei m die Anzahl der Parameter beschreibt. Und durch Umstellung nach ϑ_ϵ erhält man:

$$\vartheta_\epsilon < \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{n - m} \tag{37}$$

Bestimmt man nun den Mittelwert aus Formel (30) und Formel (37) und bestimmt dessen Abstand zu den Grenzen, so ergibt sich für ϑ_ϵ die Abschätzung:

$$\vartheta_\epsilon = \sum_{i=1}^n |v_i| \cdot \frac{n - m + \sqrt{n \cdot (n - m)}}{2 \cdot (n - m) \cdot \sqrt{n \cdot (n - m)}} \cdot \left(1 \pm \frac{n - m - 2 \cdot \sqrt{n \cdot (n - m)}}{2 \cdot (n - m) \cdot \sqrt{n \cdot (n - m)}} \right)$$

Da die Bestimmung über diese Schranken sehr ungenau ist, hatte [Helmert, 1875] auch eine exakte Formel über den in [Helmert, 1876] (Seite 358) erwähnten Discontinuitätsfaktor berechnet. Das Ergebnis setzte er dann in Relation zu Formel (30) und hierfür ergab sich:

$$\vartheta_\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n - m)}} \cdot \left(1 - \frac{m}{12 \cdot n} - \frac{m^2}{24 \cdot n^2} - \dots \right)^{-1} \tag{38}$$

5 Fazit

In dieser Arbeit sollte der wahrscheinliche Fehler von wahren Beobachtungsfehlern unter verschiedenen Konstellationen bestimmt und dessen Genauigkeiten analysiert werden. Betrachtet man zunächst nur die Schätzwerte für den wahrscheinlichen Fehler:

Tabelle 2: Schätzungen des wahrscheinlichen Fehlers ρ_ϵ

	Normal-Verteilung	Laplace-Verteilung	Student t-Verteilung
Mittelwert	$0.845347 \cdot \frac{\sum_i v_i }{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$	$0.693147 \cdot \frac{\sum_i v_i }{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$	$1.0594860 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n v_i }{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$
Median	$0.845347 \cdot \frac{\sum_{j=1}^n v(j) }{n \cdot \sqrt{2}}$	$0.693147 \cdot \frac{\sum_{j=1}^n v(j) }{n \cdot \sqrt{2}}$	$1.0594860 \cdot \frac{\sum_{i=1}^2 v_i }{n \cdot \sqrt{2}}$

Es fällt auf, dass sich die Schätzwerte nur in dem Vorfaktor unterscheiden. Dabei ist aber zu beachten, dass die Schätzung bei Student t-verteilten wahren Beobachtungsfehlern mit Tabelle (1) arbeitet, und somit der Wert für den Freiheitsgrad η bekannt sein muss. Außerdem sieht man, dass gerade für kleine Werte für η große Schwankungen in der Abschätzung auftreten. Also muss η genau genug bekannt sein. Da η jedoch der einzige Parameter von der Student t-Verteilung ist, könnte dieser direkt über eine Maximum-Likelihood-Schätzung bestimmt werden. Zudem tritt diese Abschätzung mit Tabelle (1) auch in der Genauigkeitsabschätzung auf, was man durch die Schätzung über die Standardabweichung σ in Formel (11) beziehungsweise Formel (27) umgehen könnte. Dabei würde man aber die Standardabweichung σ schätzen mit $\sigma^2 \approx \tilde{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}$ und die Einflüsse der Verbesserungen gingen quadratisch ein, wodurch die Schätzung weniger robust gegen Ausreißer ist. Das ist genau das Problem, welches wir durch die Wahl des wahrscheinlichen Fehlers lösen wollten.

Beim Vergleich der Schätzung des wahrscheinlichen Fehlers bei der Normalverteilung mit der Laplace-Verteilung fällt auf, dass der Vorfaktor der Laplace-Verteilung der kleinere ist. Dies ist in so weit paradox, da die Laplace-Verteilung größere Wahrscheinlichkeiten für Werte am Rand der Verteilungsfunktion aufweisen sollte als die Normalverteilung. Betrachtet man aber Abbildung (1), so sieht man, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Laplace-Verteilung mit

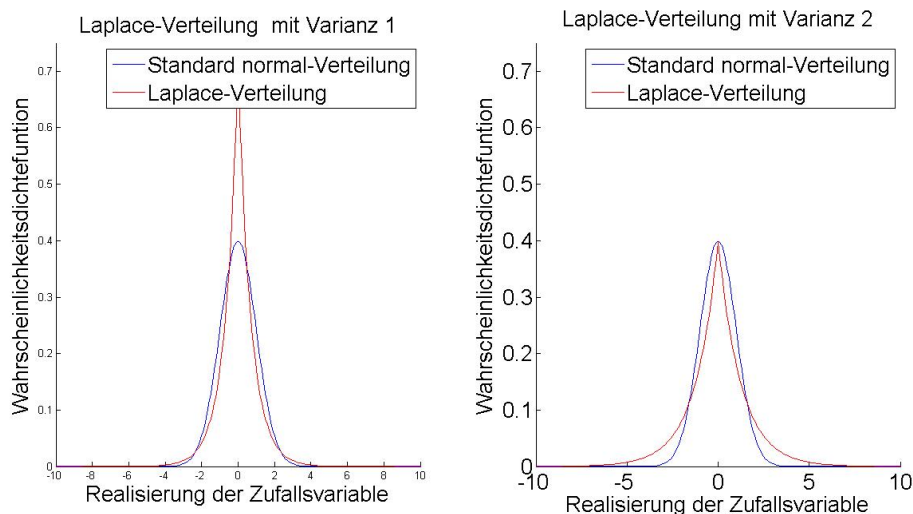


Abbildung 1: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Standardnormalverteilung und Laplace-Verteilung mit Varianz 1

Standardabweichung $\sqrt{2}$ der Standardnormalverteilung viel ähnlicher ist als mit Standardabweichung 1. Betrachtet man weiter das gilt: $\sqrt{2} \cdot 0.693147 = 0.980258$ (genau berechnet mit $0.693147 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$), so ist der Vorfaktor bei Laplace-Verteilten wahren Beobachtungsfehlern größer als bei normalverteilten und das Paradoxon ist gelöst.

Als nächstes werden die Genauigkeiten untersucht. Dabei fällt direkt auf, dass bei der Schätzung von Student t-verteilten wahren Beobachtungsfehlern wieder der Term von Tabelle (1) auftaucht. Da wir diesen Wert schon bei der Schätzung vom wahrscheinlichen Fehler nicht ohne Ungewissheit bestimmen konnten, ist dies noch ein Grund mehr den Weg über die Bestimmung des Freiheitsgrades η mittels Maximum-Likelihood-Schätzung und diesen dann über Appendix H in ϑ_ϵ umzurechnen. Dabei muss die Genauigkeit von η aus der Maximum-Likelihood-Schätzung auch auf den Term aus Tabelle (1) über Varianzfortpflanzung angebracht werden.

Die Ungenauigkeiten der Laplace-Verteilung waren, wie zu erwarten, größer als die bei der Normalverteilung. Dies liegt an der sogenannten Langschwänzigkeit der Laplace-Verteilung. Längschwänzig bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Laplace-Verteilung an den Rändern höhere Werte annimmt und weniger Steigung hat als die Normalverteilung. Insbesondere die geringe Steigung bewirkt, dass viele Werte in einem Bereich ähnliche Funktionswerte aufweisen. Kleine Veränderungen an der Variablen ändern die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert kaum. Mit anderen Worten: Wenn wir den wahrscheinlichen Fehler bei der Laplace-Verteilung um einen kleinen Wert α verändern, so bewegen wir uns auf dem Plot der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion weiter von dem wahren Werten weg als bei der Normalverteilung.

Auch der Schritt zur L_1 -Norm hilft da wenig, da die Genauigkeiten in allen Fällen über sehr komplizierte Formeln zu bestimmen sind und somit keine gute Alternative zum durchschnittlichen Fehler liefern.

Dennoch sollte man den wahrscheinlichen Fehler nicht vollständig ignorieren. Er ermöglicht einen alternativen Blickwinkel auf die Güte von Verteilungen. Zum Beispiel gibt einem der wahrscheinliche Fehler direkt das Umfeld, indem 50% meiner Messungen liegen. Dies ist immer dann interessant, wenn es um Zielübungen geht (also militärische Anwendungen). Außerdem lassen sich unter Umständen mit dem wahrscheinlichen Fehler verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen besser vergleichen als mit der Standardabweichung. Betrachten wir die Gleichung $\rho = 0.4769 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma$ aus [Korte, 2017] (Seite 7) im Vergleich zu Formel 40 und setzt man nun den Wert für beide wahrscheinlichen Fehler ρ gleich, so ergibt sich der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} 0.4679 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_M &= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sigma_L \\ \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} \sigma_M &= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{0.4679 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sigma_L \\ \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} \sigma_M &= 1.376147 \cdot \sigma_L \end{aligned}$$

(i) σ_M isolieren, indem beide Seiten mit $\frac{1}{0.4679 \cdot \sqrt{2}}$ multipliziert werden, (ii) Termvereinfachungen.

Der Umrechnungsfaktor ist nur auf die Umrechnung von normalverteilten Zufallsvariablen auf Laplace verteilte Zufallsvariablen anwendbar, und kann (abgesehen von der Umkehrung) für keine anderes Paar von Verteilungen verwendet werden. Dieses kleine Beispiel soll zeigen, dass man oft den Wert des wahrscheinlichen Fehlers für eine Verteilung aus der Varianz (beziehungsweise der Standardabweichung) bestimmen kann, dies aber nicht ins Verhältnis zueinander setzen kann, ohne den wahrscheinlichen Fehler explizit zu bestimmen. Und ohne dieses Verhältnis ist ein Vergleich zwischen zwei wahrscheinlichen Fehlern von Verteilungen nicht möglich.

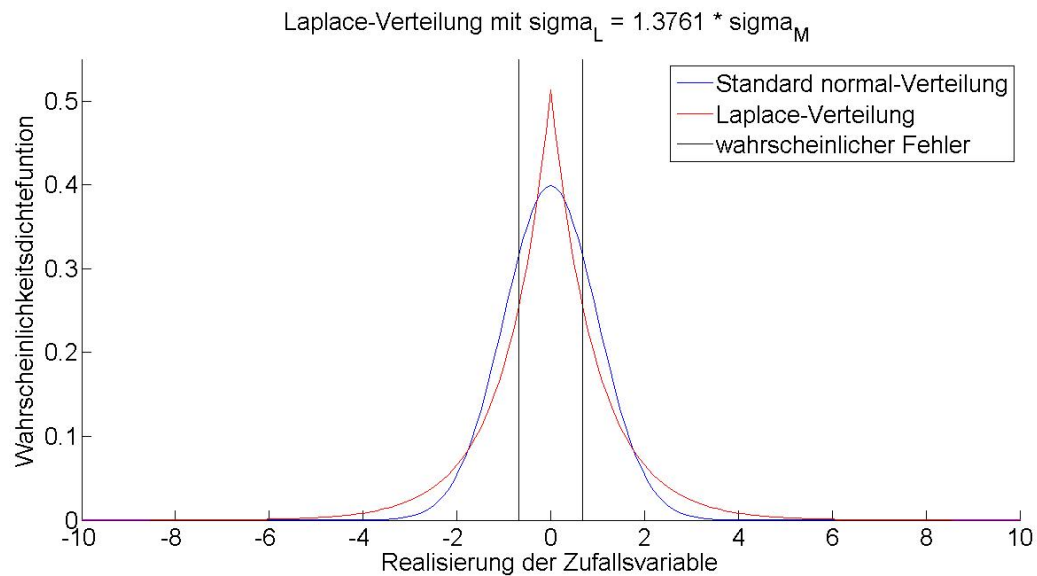


Abbildung 2: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Standardnormalverteilung und Laplace-Verteilung mit gleichem wahrscheinlichen Fehler

In Abbildung (2) sieht man, dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung und der Laplace-Verteilung kaum ähneln, wenn sie dieselbe wahrscheinlichen Fehler haben.

Zum Schluss wurde der Wahrscheinliche Fehler auf ein Ausgleichsmodell nach mehreren Parametern erweitert. Auch dabei wurden die Formeln äußerst kompliziert, so dass sich aus denselben Gründen wie oben die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers nur lohnt, falls diskret nach diesem gefragt wurde oder wir eine Umrechnung wie oben zwischen normalverteilung und Laplace-Verteilung suchen.

Literatur

- [Elpelt and Hartung, 2004] Elpelt, B. and Hartung, J. (2004). *Grundkurs Statistik*. R. Oldenbourg Verlag München Wien, 3 edition.
- [Helmert, 1872] Helmert, F. H. (1872). *Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendung auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente*. Teupner Leipzig.
- [Helmert, 1875] Helmert, F. H. (1875). Über die Formel für den Durchschnittsfehler. *Astronomische Nachrichten*, 85(2039):353–366.
- [Helmert, 1876] Helmert, F. H. (1876). Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit. *Astronomische Nachrichten*, 88(2096-97):114–132.
- [Johnson et al., 1995a] Johnson, N., Kotz, S., and Balkrishnan, N. (1995a). *Continuous univariate distribution - 1*. John Wiley & sons, INC, New York Chichester Brisbane Toronto Singapore, 2 edition.
- [Johnson et al., 1995b] Johnson, N., Kotz, S., and Balkrishnan, N. (1995b). *Continuous univariate distribution - 2*. John Wiley & sons, INC, New York Chichester Brisbane Toronto Singapore, 2 edition.
- [Koch, 1997] Koch, K. (1997). *Parameterschätzung Und Hypothesentests in Linearen Modellen*. ehem. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.
- [Korte, 2015] Korte, J. (2015). Das Gauß-Markov-Modell mit Student t-verteilten Beobachtungen. Universitäts intern. Über Nachfrage erhältlich.
- [Korte, 2017] Korte, J. (2017). Die Formel von Peters und deren Genauigkeitsabschätzung. Universitäts intern. Über Nachfrage erhältlich.
- [Kotz et al., 2012] Kotz, S., Kozubowski, T., and Podgorski, K. (2012). *The Laplace distribution and generalizations: a revisit with applications to communications, economics, engineering, and finance*. Springer Science & Business Media.
- [Kreyszig, 1991] Kreyszig, E. (1991). *Statistische Methoden und ihre Anwendungen*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 7 edition.
- [Peters, 1856] Peters, A. C. (1856). Über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers einer Beobachtung aus den Abweichungen der Beobachtungen von ihrem arithmetischen Mittel. *Astronomische Nachrichten*, 44(1034):29–32.
- [Schive, 1930] Schive, J. (1930). Mittlerer oder wahrscheinlicher Fehler als Maß der Genauigkeit. *Astronomische Nachrichten*, 238(571):383–384.
- [Schuh, 2017] Schuh, W.-D. (2017). Über die Genauigkeiten von Schätzern für den Skalenparameter der Verteilungsfunktion. *Allgemeine Vermessungsnachrichten*, 124:186–196.

[Smirnow and Dunin-Barkowski, 1969] Smirnow, N. and Dunin-Barkowski, L. (1969). *Mathematische Statistik in der Technik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 2 edition.

[Voß, 2004] Voß, W. (2004). *Taschenbuch der Statistik*. Carl Hanser Verlag München Wien, 2 edition.

Abbildungsverzeichnis

1	Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Standardnormalverteilung und Laplace-Verteilung mit Varianz 1	27
2	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Standardnormalverteilung und Laplace-Verteilung mit gleichem wahrscheinlichen Fehler	29

Tabellenverzeichnis

1	Vorfaktoren für ρ_ϵ bei verschiedenen η	10
2	Schätzungen des wahrscheinlichen Fehlers ρ_ϵ	27

A Herleitung der Verbesserungen beim Mittelwert

In diesem Kapitel sollen die Verbesserungen v_i einzelner Beobachtungen ℓ_i zum Mittelwert $\mu = \frac{\sum_{j=1}^n \ell_j}{n}$ bestimmt werden. Es gilt weiter, dass $\ell_i = \lambda + \epsilon_i$ wobei λ dem wahren Wert der beobachteten Größe und ϵ_i dem wahren Beobachtungsfehler der i -ten Beobachtung entspricht. Dann kann man folgenden Zusammenhang zwischen den wahren Fehlern und den Verbesserungen aufstellen:

$$\begin{aligned}
 v_i &\stackrel{(i)}{=} \mu - \ell_i \\
 &\stackrel{(ii)}{=} \frac{\sum_{j=1}^n \ell_j}{n} - \ell_i \\
 &\stackrel{(iii)}{=} \frac{\sum_{j=1}^n \ell_j}{n} - \frac{n \cdot \ell_i}{n} \\
 &\stackrel{(iv)}{=} \frac{\sum_{j=1}^n \lambda + \epsilon_j}{n} - \frac{n \cdot (\lambda + \epsilon_i)}{n} \\
 &\stackrel{(v)}{=} \frac{n \cdot \lambda + \sum_{j=1}^n \epsilon_j - n \cdot \lambda - n \cdot \epsilon_i}{n} \\
 &\stackrel{(vi)}{=} \frac{\sum_{j=1}^n \epsilon_j - n \cdot \epsilon_i}{n} \\
 &\stackrel{(vii)}{=} \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_j - (n-1) \cdot \epsilon_i + \sum_{j=i}^n \epsilon_j}{n}
 \end{aligned}$$

(i) Definition der Verbesserung, (ii) Definition vom Mittelwert, (iii) zweiten Term mit n erweitern, (iv) $\ell_i = \lambda + \epsilon_i$, (v) n mal λ aus der ersten Summe herausziehen und Zusammenfassen der Brüche, (vi) λ rauskürzen, (v) Summe in drei Teile aufteilen, damit $-n \cdot \epsilon_i$ eingefügt werden kann.

B Die Verteilung von aufsummierten Laplace verteilten Zufallsvariablen

Seien $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ Laplace verteilte und unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung σ (das heißt: $\mathcal{X}_i \sim \mathcal{L}(0, \sigma^2) \forall i \in \{1, \dots, n\}$). Schreiben wir diese Variablen in einen Vektor $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n)$, dann ist dieser Vektor multivariat Laplace verteilt mit Erwartungswert $\mathbf{0}_{n,1}$ und Varianz-/Kovarianz-Matrix $\Sigma = \mathbb{1} \cdot \sigma^2$ ($\mathcal{X} \sim \mathcal{L}_n(\mathbf{0}_{n,1}, \mathbb{1}_n \cdot \sigma^2)$). Definieren wir weiter die Zufallsvariable $\mathcal{Y} := A \cdot \mathcal{X}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,l}$. Dann gilt nach [Kotz et al., 2012] (Seite 319) $\mathcal{Y} \sim \mathcal{L}_l(A \cdot \mathbf{0}_{n,1}, A' \cdot \mathbb{1} \cdot A \cdot \sigma^2)$. Es gilt allgemein, dass $A \cdot \mathbf{0}_{n,1} = \mathbf{0}_{n,1} \forall A \in \mathbb{R}^{n,l}$. Bleibt noch die Varianz-/Kovarianz-Matrix zu bestimmen. Dazu definieren wir erst einmal $A_i = \frac{1}{n} \cdot (1, 1, \dots, 1, (n-1), 1, \dots, 1)'$, wobei $(n-1)$ an i -ter Stelle steht. Dann ist $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} A_i^T \cdot A_i &= \frac{1}{n^2} (1 + 1 + \dots + 1 + (n-1)^2 + 1 + \dots + 1) \\ &= \frac{1}{n^2} ((n-1)^2 + (n-1)) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $\mathcal{Y} \sim \mathcal{L}_1(0, \frac{\sigma^2}{n^2} ((n-1)^2 + (n-1)))$.

Setzen wir jetzt $\mathcal{X}_i = \mathcal{E}_i$, dann beschreibt \mathcal{Y} eine einzelne Verbesserungen, welche somit die selbe Varianzfortpflanzung haben wie die bei der Normalverteilung (siehe Formel (2)). Somit folgt insgesamt $\mathcal{V}_i \sim \mathcal{L}_1(0, \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n})$ und insbesondere $\sigma_{\mathcal{V}_i} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sigma$.

C Der Wahrscheinliche Fehler von Laplace verteilten Zufallsvariablen

In diesem Kapitel wird die Formel für den wahrscheinlichen Fehler von Laplace verteilten Zufallsvariablen \mathcal{X} mit Standardabweichung σ bestimmt. Da die Laplace-Verteilung symmetrisch zur y-Achse ist, gilt $\int_0^\rho f(\mathcal{X} = x)dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\rho}^\rho f(\mathcal{X} = x)dx = \frac{1}{4}$, und mit $\int_{-\infty}^0 f(\mathcal{X} = x)dx = \frac{1}{2}$ folgt:

$$F(\mathcal{X} = \rho) = \int_{-\infty}^\rho f(\mathcal{X} = x)dx \stackrel{!}{=} \frac{3}{4} \quad (39)$$

Da die Formel für die Verteilungsfunktion $F(\mathcal{X} = \rho)$ schon in [Johnson et al., 1995b] (Seite 166) gegeben ist können wir einsetzen:

$$\begin{aligned} F(\mathcal{X} = \rho) & \stackrel{!}{=} \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\rho \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} & = \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot e^{-\rho \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} & = -\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow e^{-\rho \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} & = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -\rho \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma} & = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \rho & = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sigma \end{aligned} \quad (40)$$

(i) Einsetzen von $F(\mathcal{X} = \rho) = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\rho \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}$, (ii) 1 auf beiden Seiten abziehen, (iii) beide Seiten mit -2 multiplizieren, (iv) Logarithmus an beiden Seiten anwenden, (v) beide Seiten mit $-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ multiplizieren.

Somit ergibt sich für den wahrscheinlichen Fehler von Laplace verteilten Beobachtungen:

$$\rho = 0.693147 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

D Durchschnittlicher Fehler von Laplace verteilten Zufallsvariablen

Seien die Zufallsvariablen $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n \sim \mathcal{L}(0, \sigma)$. Dann gilt für den durchschnittlichen Fehler:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{\mathcal{X}} &\stackrel{(i)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(\mathcal{X} = x) dx \\
 &\stackrel{(ii)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} \cdot e^{-|x| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} dx \\
 &\stackrel{(iii)}{=} 2 \cdot \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} \cdot e^{-x \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} dx \\
 &\stackrel{(iv)}{=} 2 \cdot \int_0^{\infty} y \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} \cdot e^{-y} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \cdot dy \\
 &\stackrel{(v)}{=} 2 \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \int_0^{\infty} y \cdot e^{-y} dy \\
 &\stackrel{(vi)}{=} 2 \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \left([y \cdot (-e^{-y})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-y} dy \right) \\
 &\stackrel{(vii)}{=} 2 \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot [-e^{-y}]_0^{\infty} \\
 &\stackrel{(viii)}{=} 2 \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot (0 - (-1)) \\
 &\stackrel{(ix)}{=} \frac{\sigma}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

(i) Definition $\vartheta_{\mathcal{X}} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(\mathcal{X} = x) dx$, (ii) Definition $f(\mathcal{X} = x) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} \cdot e^{-|x| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}$, (iii) wegen Symmetrie der Laplace Verteilung und der Betragsfunktion gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} |x| f(x) dx$, (iv) Substitution: $y = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$ mit $dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \cdot dy$ (Grenzen bleiben gleich), (v) $2 \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{2}}$ aus dem Integral herausziehen, (vi) partiell Integrieren mit $f(x) = y$ und $g'(x) = e^{-y}$, (vii) beim einsetzen der Grenzen wird für $-\infty$ der Faktor $e^{-y} = 0$, und für 0 wird $y = 0$. Außerdem wird die Stammfunktion für e^{-x} eingesetzt, (viii) Grenzen einsetzen, (ix) Termvereinfachungen.

E Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei Laplace verteilten Verbesserungen von Beobachtungen zum Mittelwert

E.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

In diesem Kapitel soll die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für $|v_i| \cdot |v_j|$ mit $i \neq j$ bei der Berechnung über den Mittelwert mit Laplace-Verteilung bestimmt werden. Wegen Appendix A folgt $\mathcal{V}_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{E}_j - (n-1) \cdot \mathcal{E}_i + \sum_{j=i}^n \mathcal{E}_j}{n}$. Dabei vereinfachen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die erste und zweite Verbesserung mit:

$$\mathcal{V}_1 = \frac{-(n-1) \cdot \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \sum_{j=3}^n \mathcal{E}_j}{n}$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - (n-1) \cdot \mathcal{E}_2 + \sum_{j=3}^n \mathcal{E}_j}{n}$$

Wir Definieren zur Vereinfachung $\hat{\mathcal{E}}_3 = \sum_{j=3}^n \mathcal{E}_j$. Wegen Appendix B ist $\hat{\mathcal{E}}_3$ wieder Laplace verteilt mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung $\sigma_{\hat{\mathcal{E}}_3} = \sqrt{n-2} \cdot \sigma$. Also ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit des Produktes aus der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten über die \mathcal{E} :

$$f(|v_1| \cdot |v_2|) \stackrel{(i)}{=} f(\epsilon_1) \cdot f(\epsilon_2) \cdot f(\hat{\epsilon}_3)$$

$$\stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} e^{-|\epsilon_1| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} e^{-|\epsilon_2| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot e^{-|\hat{\epsilon}_3| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-2}}}$$

$$\stackrel{(iii)}{=} \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right)^3 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (|\epsilon_1| + |\epsilon_2| + |\hat{\epsilon}_3| \cdot \frac{1}{\sqrt{n-2}})}$$

(i) $|v_1| \cdot |v_2|$ besteht aus drei unabhängigen Zufallsvariablen, also ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, (ii) $f(\epsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} e^{-|\epsilon_i| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}$ (beachte: $\frac{1}{\sigma_{\hat{\epsilon}_3}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-2}}$), (iii) Termvereinfachungen.

Beachtet man das gilt:

$$-\frac{n}{n-2} \cdot \left(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 - \frac{2 + \sqrt{n-2}}{n} \cdot \hat{\mathcal{E}}_3 \right)$$

$$\stackrel{(i)}{=} -\frac{n}{n-2} \cdot \left(\frac{-(n-1) \cdot \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \hat{\mathcal{E}}_3}{n} + \frac{\mathcal{E}_1 - (n-1) \cdot \mathcal{E}_2 + \hat{\mathcal{E}}_3}{n} - \frac{2 \cdot \hat{\mathcal{E}}_3 + \sqrt{n-2} \cdot \hat{\mathcal{E}}_3}{n} \right)$$

$$\stackrel{(ii)}{=} -\frac{n}{n-2} \cdot \left(\frac{(-n+2) \cdot \mathcal{E}_1 + (-n+2) \cdot \mathcal{E}_2 - \sqrt{n-2} \cdot \hat{\mathcal{E}}_3}{n} \right)$$

$$\stackrel{(iii)}{=} \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \hat{\mathcal{E}}_3$$

(i) Ausmultiplizieren der Klammer, (ii) \mathcal{V}_i von oben einsetzen, (iii) Termvereinfachungen.

Einen Parameterübergang in $f(|v_1| \cdot |v_2|)$ ist auf Grund der Beträge nicht zulässig. Da der Er-

wartungswert gesucht wird, können die beträge volgender maßen umgangen werden:

$$\begin{aligned}
E\{|v_1| \cdot |v_2|\} &\stackrel{(i)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v_1| \cdot |v_2| \cdot f(|v_1| \cdot |v_2|) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\hat{\epsilon}_3 \\
&\stackrel{(ii)}{=} 2 \cdot \int_0^{\infty} 2 \cdot \int_0^{\infty} 2 \cdot \int_0^{\infty} |v_1| \cdot |v_2| \cdot f(|v_1| \cdot |v_2|) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\hat{\epsilon}_3 \\
&\stackrel{(iii)}{=} 2 \cdot \int_0^{\infty} 2 \cdot \int_0^{\infty} 2 \cdot \int_0^{\infty} v_1 \cdot v_2 \cdot f(v_1 \cdot v_2) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\hat{\epsilon}_3
\end{aligned}$$

(i) Definition vom Erwartungswert, (ii) ϵ_1, ϵ_2 und $\hat{\epsilon}_3$ sind Laplace verteilt, also symmetrische zur y-Achse verteilt, genau wie die Betragsfunktion. Für solche Funktionen gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(x)dx$, (iii) der Betrag einer positiven Zahl ist die Zahl selbst.

Jetzt dürfen wir den Parameterübergang durchführen und können die Randverteilung \hat{f} bezüglich $\hat{\epsilon}_3$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(|v_1| \cdot |v_2|) &= 2 \cdot \int_0^{\infty} f(|v_1| \cdot |v_2|) d\hat{\epsilon}_3 \\
&\stackrel{(i)}{=} 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^3 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (|\epsilon_1| + |\epsilon_2| + |\hat{\epsilon}_3| \cdot \frac{1}{\sqrt{n-2}})} d\hat{\epsilon}_3 \\
&\stackrel{(ii)}{=} 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^3 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-\frac{n}{n-2} \cdot (v_1 + v_2 - \frac{2 + \sqrt{n-2}}{n} \cdot \hat{\epsilon}_3)\right)} d\hat{\epsilon}_3 \\
&\stackrel{(iii)}{=} \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-\frac{n}{n-2} \cdot (v_1 + v_2)\right)} \cdot 2 \cdot \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \frac{2 + \sqrt{n-2}}{n-2} \cdot \hat{\epsilon}_3} d\hat{\epsilon}_3\right) \\
&\stackrel{(iv)}{=} \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-\frac{n}{n-2} \cdot (v_1 + v_2)\right)} \cdot 2 \cdot \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot y} dy\right) \cdot \frac{n-2}{2 + \sqrt{n-2}} \\
&\stackrel{(v)}{=} \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-\frac{n}{n-2} \cdot (v_1 + v_2)\right)} \cdot \frac{n-2}{2 + \sqrt{n-2}} \\
&\stackrel{(vi)}{=} \frac{\sqrt{n-2}}{2 + \sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-\frac{n}{n-2} \cdot (v_1 + v_2)\right)}
\end{aligned}$$

(i) Einsetzen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, (ii) Parameterübergang von ϵ_1 und ϵ_2 zu v_1 und v_2 , (iii) alle Terme die von $\hat{\epsilon}_3$ unabhängig sind aus dem Integral herausziehen, (iv) Substitution: $y = \frac{2 + \sqrt{n-2}}{n-2} \cdot \hat{\epsilon}_3$ mit $d\hat{\epsilon}_3 = \frac{n-2}{2 + \sqrt{n-2}} \cdot dy$ (Grenzen bleiben gleich), (v) das Integral in der Klammer entspricht dem Integral über die Laplaceverteilung. Ist also gleich 1, (vi) Termvereinfachungen.

E.2 Erwartungswert

$$\begin{aligned}
E\{|v_1| \cdot |v_2|\} &\stackrel{(i)}{=} 2 \cdot \int_0^\infty 2 \cdot \int_0^\infty v_1 \cdot v_2 \cdot \hat{f}(v_1 \cdot v_2) \, dv_1 \, dv_2 \\
&\stackrel{(ii)}{=} 2 \cdot \int_0^\infty 2 \cdot \dots \\
&\quad \int_0^\infty v_1 \cdot v_2 \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{2 + \sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-\frac{n}{n-2} \cdot (v_1+v_2)\right)} \, dv_1 \, dv_2 \\
&\stackrel{(iii)}{=} \frac{\sqrt{n-2}}{2 + \sqrt{n-2}} \cdot 2 \cdot \int_0^\infty v_2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-\frac{n}{n-2} \cdot v_2\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \cdot \dots \\
&\quad 2 \cdot \int_0^\infty v_1 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-\frac{n}{n-2} \cdot v_1\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \, dv_1 \, dv_2 \\
&\stackrel{(iv)}{=} \frac{\sqrt{n-2}}{2 + \sqrt{n-2}} \cdot \left(2 \cdot \int_0^\infty v_1 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-\frac{n}{n-2} \cdot v_1\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) \, dv_1\right) \cdot \dots \\
&\quad \left(2 \cdot \int_0^\infty v_2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-\frac{n}{n-2} \cdot v_2\right)} \, dv_2\right) \\
&\stackrel{(v)}{=} \frac{\sqrt{n-2}}{2 + \sqrt{n-2}} \cdot \left(2 \cdot (-1) \cdot \int_0^\infty \hat{v}_1 \cdot \left(-\frac{n-2}{n}\right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \hat{v}_1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) \left(-\frac{n-2}{n}\right) \, d\hat{v}_1\right) \cdot \dots \\
&\quad \left(2 \cdot (-1) \cdot \int_0^\infty \hat{v}_2 \cdot \left(-\frac{n-2}{n}\right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \hat{v}_2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) \cdot \left(-\frac{n-2}{n}\right) \, d\hat{v}_2\right) \\
&\stackrel{(vi)}{=} \frac{\sqrt{n-2}}{2 + \sqrt{n-2}} \cdot \left(-\frac{n-2}{n}\right)^4 \cdot \left(2 \cdot (-1) \cdot \int_0^\infty \hat{v}_1 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \hat{v}_1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) \, d\hat{v}_1\right) \dots \\
&\quad \left(2 \cdot (-1) \cdot \int_0^\infty \hat{v}_2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \hat{v}_2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) \, d\hat{v}_2\right) \\
&\stackrel{(vii)}{=} \frac{\sqrt{n-2}}{2 + \sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right)^4 \cdot \left(2 \cdot \int_0^\infty \hat{v}_1 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \hat{v}_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \, d\hat{v}_1\right) \cdot \dots \\
&\quad \left(2 \cdot \int_0^\infty \hat{v}_2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \hat{v}_2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) \, d\hat{v}_2\right) \\
&\stackrel{(viii)}{=} \frac{\sqrt{n-2}}{2 + \sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right)^4 \cdot \vartheta_v^2 \\
&\stackrel{(ix)}{=} \frac{\sqrt{n-2}}{2 + \sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right)^4 \cdot \frac{\sigma_{v_i}^2}{2}
\end{aligned}$$

(i) Definition vom Erwartungswert, (ii) $\hat{f}(|v_1| \cdot |v_2|)$ einsetzen, (iii) alle Terme die mit v_1 zusammenhängen aus dem Integral über v_2 herausziehen, (iv) das Integral über v_2 aus dem Integral über v_1 herausziehen, (v) beide Integrale substituieren: $\hat{v}_i = -\frac{n}{n-2} \cdot v_i$ mit $\frac{d\hat{v}_i}{dv_i} = -\frac{n-2}{n}$. Die Integrationsgrenzen werden negativ (also wird mit -1 multipliziert um die Grenzen beizubehalten). (vi) $\left(-\frac{n-2}{n}\right)^2$ aus beiden Integralen ausklammern, (vii) Termvereinfachungen, (viii) Definition des durchschnittlichen Fehlers, (ix) $\vartheta = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ (siehe Appendix D).

Achtung: Dem Aufmerksamen Leser mag auffallen, dass der Erwartungswert $E\{|v_1| \cdot |v_2|\}$ in diesem Fall vereinfacht wurde in dem der von [Helmert, 1876] (Seite 358) beschriebene Discon-

Discontinuitätsfaktor:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(v \cdot u)}{u} du = \begin{cases} v & \text{falls } v > 0 \\ 0 & \text{falls } v = 0 \\ -v & \text{falls } v < 0 \end{cases}$$

für das Produkt $|v_1| \cdot |v_2|$ weggelassen wurde und durch die Eigenschaft symmetrischer Funktionen $f(x)$: $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 2 \cdot \int_0^\infty f(x) dx$ ersetzt worden ist. Helmholtz bezeichnete die Abschätzung mit dem Discontinuitätsfaktor als „strenge Formel“.

F Die Verteilung von aufsummierten Student t-verteiltern Zufallsvariablen

F.1 Zufallsvariablen mit unterschiedlichen Chi-Quadrat-Verteilungen

Sei \mathcal{Z}_3 die Summe von 2 unabhängigen Zufallsvariablen $\mathcal{Z}_1 = \frac{\mathcal{X}_1}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}_1}{a \cdot \eta}}}$ und $\mathcal{Z}_2 = \frac{\mathcal{X}_2}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}_2}{\eta}}}$. Dabei seien $\mathcal{X}_1 \sim N(0, \sqrt{a})$ und $\mathcal{Y}_1 \sim \chi_{a \cdot \eta}^2$ mit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beziehungsweise $\mathcal{X}_2 \sim N(0, 1)$ und $\mathcal{Y}_2 \sim \chi_{\eta}^2$, dann hat \mathcal{Z}_2 die Student t-Verteilung, und es gilt:

$$\begin{aligned}
 F(\mathcal{Z}_3 = z_3) &\stackrel{(i)}{=} F(\mathcal{Z}_1) \cdot F(\mathcal{Z}_2 = z_3 - \mathcal{Z}_1) \\
 &\stackrel{(ii)}{=} \left(\int_{y_1} \int_{x_1} f(x_1) \cdot f(y_1) dx_1 dy_1 \right) \left(\int_{y_2} \int_{x_2} f(x_2) \cdot f(y_2) dx_2 dy_2 \right) \\
 &\stackrel{(iii)}{=} \left(\int_{y_1} \int_{x_1} f(x_1) \cdot f(y_1) \cdot \left(\int_{y_2} \int_{x_2} f(x_2) \cdot f(y_2) dx_2 dy_2 \right) dx_1 dy_1 \right) \\
 &\stackrel{(iv)}{=} \left(\int_{y_1} f(y_1) \int_{y_2} \left(f(y_2) \int_{x_1} f(x_1) \int_{x_2} f(x_2) dx_2 dx_1 \right) dy_2 dy_1 \right) \\
 &\stackrel{(v)}{=} \left(\int_{y_1} \int_{y_2} f(y_1) \cdot f(y_2) \left(\int_{x_1} \int_{x_2} f(x_2) \cdot f(x_1) dx_2 dx_1 \right) dy_2 dy_1 \right)
 \end{aligned}$$

(i) Aus $\mathcal{Z}_3 = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$ folgt dass $F(\mathcal{Z}_3 = z_3)$ gleich der Summe über alle Möglichkeiten für die Wahl von $F(\mathcal{Z}_1)$ multipliziert mit $F(\mathcal{Z}_2 = z_3 - \mathcal{Z}_1)$, (ii) nach [Kreyszig, 1991] (Seite 380 f.) kann die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $\mathcal{Z}_i = \frac{\mathcal{X}_i}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}_i}{a \cdot \eta}}}$ durch das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten bestimmt werden (die Grenzenbestimmung wird unten vorgenommen). (iii) Hereinziehen der zweiten Klammer in die Integrale der ersten Klammer, (iv) herausziehen der Integrale und Funktionen über y aus den Integralen über x , (v) $f(x_1)$ ins Integral über x_2 hineinziehen.

Kommen wir nun zur Bestimmung der Grenzwerte für die Integrale. Aus Umformung (i) folgt $z_1 \in (-\infty, \infty)$. Die Grenzen von x_1, y_1, x_2 und y_2 werden allgemein für die Verteilungsfunktion von $\mathcal{Z}_i = \frac{\mathcal{X}_i}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}_i}{a \cdot \eta}}}$ in [Korte, 2015] hergeleitet und ergeben sich zu $y_1, y_2 \in (0, \infty)$, $x_1 \in \left(-\infty, z_1 \cdot \sqrt{\frac{y_1}{a \cdot \eta}}\right)$ und analog dazu mit $F(\mathcal{Z}_2 = z_3 - z_1)$ dass $x_2 \in \left(-\infty, (z_3 - z_1) \cdot \sqrt{\frac{y_2}{\eta}}\right)$.

Betrachtet man das Produkt der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen in der inneren Klammer so entsprechen diese der Wahrscheinlichkeit für eine Zufallsvariable $\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$ (verändert nach [Elpelt and Hartung, 2004] (Seite 83 f.)) mit $\mathcal{X}_3 \sim N(E(\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2), \sqrt{\sigma_{\mathcal{X}_1}^2 + \sigma_{\mathcal{X}_2}^2}) = N(0, \sqrt{a + 1})$. Da \mathcal{X}_3 stetig ist, werden die angepassten Grenzen über den größten und den kleinsten Wert von $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$ aufgestellt. Somit folgt: $x_3 \in \left(-\infty, z_1 \cdot \sqrt{\frac{y_1}{a \cdot \eta}} + (z_3 - z_1) \cdot \sqrt{\frac{y_2}{\eta}}\right)$.

Bleibt noch das Produkt der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen über die Chi-Quadrat-verteiltern Zufallsvariablen. Auch hierbei entspricht die Wahrscheinlichkeit der Zufallsvariablen $\mathcal{Y}_3 = \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2$, mit $\mathcal{Y}_3 \sim \chi_{a \cdot \eta + \eta}^2 = \chi_{(a+1) \cdot \eta}^2$ (analog zu \mathcal{X}_3). Wieder werden die Grenzen angepasst zu $y_3 \in (0, \infty)$.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable \mathcal{Z}_3 :

$$F(\mathcal{Z}_3 = z_3) = \int_0^\infty f(y_3) \cdot \int_{-\infty}^{z_3 \cdot \sqrt{\frac{y_1}{\eta}} + z_1 \cdot \sqrt{\frac{y_1 - a \cdot y_2}{a \cdot \eta}}} f(x_3) dx_3 dy_3$$

In diesem Ausdruck integrieren wir über y_3 , da aber die Funktion $g(y_1, y_2) = y_3$ surjektiv ist, können y_1 und y_2 nicht eindeutig über y_3 dargestellt werden, obwohl diese stark korreliert und somit vom Integral über y_3 abhängig sind. Also ist dieses Problem in dieser Form nicht lösbar.

F.2 Zufallsvariablen mit gleicher Chi-Quadrat-Verteilungen

In diesem Abschnitt definieren wir \mathcal{Z}_3 als die Summe von 2 unabhängigen Zufallsvariablen $\mathcal{Z}_1 = \frac{\mathcal{X}_1}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}}$ und $\mathcal{Z}_2 = \frac{\mathcal{X}_2}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}}$. Dabei seien $\mathcal{X}_1 \sim N(0, \sqrt{a})$ mit $a \in \mathbb{N}/\{0\}$ und $\mathcal{X}_2 \sim N(0, 1)$ wie in F.1 und $\mathcal{Y} \sim \chi_\eta^2$ für \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 . Dann hat \mathcal{Z}_2 wieder die Student t-Verteilung, und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_3 &\stackrel{(i)}{=} \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{\mathcal{X}_1}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}} + \frac{\mathcal{X}_2}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}} \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}} \\ &\stackrel{(iv)}{=} \frac{\mathcal{X}_3}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}} \end{aligned}$$

(i) Definition von \mathcal{Z}_3 , (ii) Definition von \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 , (iii) da $\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}$ beliebig aber fest ist, kann es als gleicher Nenner zusammengezogen werden, (iv) definiere $\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$.

Damit ist $\mathcal{X}_3 \sim N(0, \sqrt{a+1})$ (analog zu F.1), so dass \mathcal{Z}_3 wieder eine skalierte Student t-Verteilte Zufallsvariable ist, genau wie \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 . Insbesondere folgt daraus, dass \mathcal{Z}_1 eine Summe von a Student t-verteilter Zufallsvariablen ist.

Weiter folgt:

$$\begin{aligned} F(\mathcal{Z}_3 = z_3) &\stackrel{(i)}{=} F(\mathcal{Y}) \cdot F\left(\mathcal{X}_3 = z_3 \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}\right) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_{-\infty}^\infty f(y) \int_{-\infty}^{z_3 \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}} f(x) dx dy \\ &\stackrel{(iii)}{=} \int_{-\infty}^\infty f(y) \int_{-\infty}^{z_3 \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}} \frac{1}{\sqrt{a+1}} \cdot \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{a+1}}\right) dx dy \\ &\stackrel{(iv)}{=} \int_{-\infty}^\infty f(y) \int_{-\infty}^{\frac{z_3}{\sqrt{a+1}} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}} \frac{1}{\sqrt{a+1}} \cdot \varphi(\hat{x}) d\hat{x} \cdot \sqrt{a+1} dy \\ &\stackrel{(v)}{=} \int_{-\infty}^\infty f(y) \int_{-\infty}^{\frac{z_3}{\sqrt{a+1}} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}} \varphi(\hat{x}) d\hat{x} dy \end{aligned}$$

(i) \mathcal{Y} darf jeden Wert annehmen, solange gilt: $\mathcal{X}_3 = z_3 \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}$, (ii) einsetzen der Verteilungsfunktionen, (iii) nach [Elpelt and Hartung, 2004] (Seite 85) gilt für $\mathcal{X} \sim N(0, \sqrt{a+1})$:
 $f(\mathcal{X} = x) = \frac{1}{\sigma_{\mathcal{X}}} \cdot \varphi\left(\frac{\mathcal{X} - E(\mathcal{X})}{\sigma_{\mathcal{X}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a+1}} \cdot \varphi\left(\frac{\mathcal{X}}{\sqrt{a+1}}\right)$, mit $\varphi(x)$ ist Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung. (iv) Substitution: $\hat{x} = \frac{x}{\sqrt{a+1}}$ damit ist $dx = d\hat{x} \cdot \sqrt{a+1}$ und die Grenzen des Integrals ergeben sich zu $\left(-\infty, \frac{z_3}{\sqrt{a+1}} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}\right)$.

Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer unskalierten Student t-Verteilung, wie \mathcal{Z}_2 mit Parameter $\frac{z_3}{\sqrt{a+1}}$. Also folgt:

$$\begin{aligned} F(\mathcal{Z}_3 = z_3) &\stackrel{(i)}{=} F\left(\mathcal{Z}_2 = \frac{z_3}{\sqrt{a+1}}\right) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{z_3}{\sqrt{a+1}}} \left(1 + \frac{z^2}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dz \end{aligned} \quad (41)$$

(i) \mathcal{Z}_2 hat die Student t-Verteilung ohne Skalierung, (ii) nach [Kreyszig, 1991] (S.162) gilt:
 $F(\mathcal{Z}_2 = z_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \int_{-\infty}^{z_2} \left(1 + \frac{z^2}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dz$.

Definieren wir $g(x) = \frac{x}{\sqrt{a+1}}$ dann gilt $g(z_3) = \frac{z_3}{\sqrt{a+1}}$, $g(-\infty) = \frac{-\infty}{\sqrt{a+1}} = -\infty$ und $\frac{d}{dx}g(x) = \frac{1}{\sqrt{a+1}}$. Somit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} F(\mathcal{Z}_3 = z_3) &\stackrel{(i)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \int_{g(-\infty)}^{g(z_3)} \left(1 + \frac{z^2}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dz \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{z_3} \left(1 + \frac{g(z)^2}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} \cdot \left(\frac{d}{dz}g(z)\right) dz \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{z_3} \left(1 + \frac{z^2}{\eta \cdot (\sqrt{a+1})^2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}\right) dz \end{aligned}$$

(i) Einsetzen von $g(x)$ als Integrationsgrenze, (ii) Substitution mit $g(x)$, (iii) einsetzen von $g(z)$ und $\frac{d}{dz}g(z)$ (siehe oben).

Nun kann nach z_3 abgeleitet werden um die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu erhalten.

$$\begin{aligned} f(\mathcal{Z}_3 = z_3) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{z_3^2}{\eta \cdot (\sqrt{a+1})^2}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+1}} \\ &= f\left(\mathcal{Z}_2 = \frac{z_3}{\sqrt{a+1}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a+1}} \end{aligned} \quad (42)$$

Und damit ergibt nach [Koch, 1997] (Seite 105) die Varianz von \mathcal{Z}_3 über:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{Z}_3}^2 &\stackrel{(i)}{=} E\{(\mathcal{Z}_3 - E\{\mathcal{Z}_3\})^2\} \\
&\stackrel{(ii)}{=} E\{(\mathcal{Z}_3)^2\} \\
&\stackrel{(iii)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot f(\mathcal{Z}_3 = z) dz \\
&\stackrel{(iv)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot f\left(\mathcal{Z}_2 = \frac{z}{\sqrt{a+1}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a+1}} dz \\
&\stackrel{(v)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot (\sqrt{a+1})^2 \cdot f(\mathcal{Z}_2 = y) \cdot \frac{1}{\sqrt{a+1}} \cdot \sqrt{a+1} dy \\
&\stackrel{(vi)}{=} (\sqrt{a+1})^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f(\mathcal{Z}_2 = y) dy \\
&\stackrel{(vii)}{=} (\sqrt{a+1})^2 \cdot \sigma_{\mathcal{Z}_2}^2 \\
&\stackrel{(viii)}{=} (\sqrt{a+1})^2 \cdot \frac{\eta}{\eta-2}
\end{aligned} \tag{43}$$

(i) Definition Varianz, (ii) $E\{\mathcal{Z}_3\} = 0$, (iii) Definition Erwartungswert (nach [Koch, 1997] S. 103), (iv) letzte Gleichung von oben einsetzen, (v) Substitution: $z = y \cdot \sqrt{a+1}$, daraus folgt dass $dx = dy \cdot \sqrt{a+1}$ bei gleich bleibenden Grenzen, (vi) Termvereinfachungen und $(\sqrt{a+1})^2$ aus dem Integral ziehen, (vii) Definition der Varianz, (viii) Varianz einer Zufallsvariablen mit Student t-Verteilung und Freiheitsgrad η ist $\frac{\eta}{\eta-2}$.

G Die Verteilung von skalierten Student t-verteilten Zufallsvariablen multipliziert mit einem Skalar

Sei $Z_2 = \lambda \cdot Z_1$ das Produkt von einem Skalar λ mit einer skalierten Student t-verteilten Zufallsvariablen $Z_1 = \frac{\mathcal{X}_1}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}}$ mit $\mathcal{X}_1 \sim N(0, \sqrt{a})$ und $\mathcal{Y} \sim \chi_{\eta}^2$ mit $a \in \mathbb{N}/\{0\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Z_2 &\stackrel{(i)}{=} \lambda \cdot Z_1 \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{\lambda \cdot \mathcal{X}_1}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}} \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{\mathcal{X}_2}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}} \end{aligned}$$

(i) Definition von Z_2 , (ii) Definition von Z_1 , (iii) Linearität der Normalverteilung.

Dann ist \mathcal{X}_2 wieder normalverteilt mit $E(\mathcal{X}_2) = 0$ und $\sigma_{\mathcal{X}_2} = \sqrt{\lambda \cdot a}$. Also hat $Z_2 = \frac{\mathcal{X}_2}{\sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\eta}}}$ wieder die skalierte Student t-Verteilung. Ob die Standardabweichung der Normalverteilung mit $\sqrt{a+1}$ oder $\sqrt{\lambda \cdot a}$ bezeichnet wird, ist für die Berechnung irrelevant. Also folgt nach Appendix F:

$$\sigma_{Z_2}^2 = \left(\sqrt{\lambda \cdot a}\right)^2 \cdot \frac{\eta}{\eta - 2}$$

Aus dieser Erkenntnis und Formel (43) folgt, dass die skalierte Student t-Verteilung mit gleichbleibender Chi-Quadrat-verteilter Zufallsvariable \mathcal{Y} der Varianzfortpflanzung folgt.

H Überführung des durchschnittlichen Fehlers zum mittleren Fehler bei skaliertem Student t-Verteilung

Um den durchschnittlichen Fehler in den mittleren Fehler zu überführen, muss der durchschnittliche Fehler bestimmen werden. Nach [Helmert, 1872] ist der durchschnittliche Fehler definiert durch:

$$\vartheta_Z = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \cdot f(z) dz$$

Da sowohl $|z|$ als auch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der skalierten Student t-Verteilung achsensymmetrisch zur y-Achse sind folgt:

$$\begin{aligned} \vartheta_Z &\stackrel{(i)}{=} 2 \int_0^{\infty} |z| \cdot f(z) dz \\ &\stackrel{(ii)}{=} 2 \int_0^{\infty} z \cdot f(z) dz \\ &\stackrel{(iii)}{=} 2 \int_0^{\infty} z \cdot \sigma_N \cdot f(z) dz \\ &\stackrel{(iv)}{=} 2 \cdot \sigma_N \int_0^{\infty} z \cdot f(z) dz \\ &\stackrel{(v)}{=} 2 \cdot \sigma_N \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \int_0^{\infty} z^{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{z}{\eta}\right)^{-\frac{1}{\eta+1}} dz \\ &\stackrel{(vi)}{=} 2 \cdot \sigma_N \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \frac{\eta^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)} \\ &\stackrel{(vii)}{=} \sigma_N \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \eta \cdot \frac{\Gamma(1) \cdot \Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)} \\ &\stackrel{(viii)}{=} \sigma_N \cdot \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \end{aligned}$$

(i) Wegen der Achsensymmetrie zur y-Achse folgt, dass der Ausdruck im Integral für z und $-z$ den gleichen Wert annimmt, und somit das gesamte Integral über zweimal das Integral über die Positiven Zahlen dargestellt werden kann, (ii) für $z \geq 0$ gilt $|z| = z$, (iii) einsetzen von Formel (42) mit σ_N ist die Standardabweichung der Normalverteilung, (iv) raus ziehen von σ_N aus dem Integral, (v) nach [Kreyszig, 1991] (Seite 161) gilt: $f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{z}{\eta}\right)^{-\frac{1}{\eta+1}}$, (vi) in [Korte, 2015] (Seite 26) kann die Herleitung der Momente gerader Ordnung verwendet werden, um mit dem Moment von Grad $m = \frac{1}{2}$ die Beziehung $\int_0^{\infty} (z^2)^m \left(1 + \frac{x^2}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dz = \frac{\eta^{m+\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}$ herzustellen, (vii) Termvereinfachungen, (viii) Termvereinfachungen ($\Gamma(1) = 1$).

Wir wissen nach Appendix F Formel (42) dass $\sigma_Z = \sqrt{\frac{\eta}{\eta-2}} \cdot \sigma_N$ gilt. Also folgt:

$$\sigma_Z = \vartheta_Z \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \quad (44)$$

Dies ist genau der Zusammenhang den [Johnson et al., 1995b] (Seite 366) zwischen dem durchschnittlichen Fehler und dem mittleren Fehler aufgestellt hat.

I Wahrscheinlicher Fehler bei skaliert Student t-Verteilten Zufallsvariablen

I.1 Direkte Berechnung

In diesem Kapitel soll der wahrscheinliche Fehler einer Student t-verteilten Zufallsvariablen \mathcal{Z} ermittelt werden. Nach [Helmert, 1872] ist der wahrscheinliche Fehler als der Wert ρ definiert für den $\int_{-\rho}^{\rho} f(z) dz = \frac{1}{2}$ gilt, wobei $f(z)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen ist. Wegen der Symmetrie der Student t-Verteilung kann man auch die Definition $\int_0^{\rho} f(z) dz = \frac{1}{4}$ benutzen. Die Student t-verteilte Zufallsvariable sei so wie in Appendix F.2 definiert. Dann gilt nach Formel (41) für den wahrscheinlichen Fehler ρ :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \int_0^{\frac{\rho}{\sigma_N}} \left(1 + \frac{z^2}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dz \stackrel{!}{=} \frac{1}{4}$$

Betrachten wir erst nur das Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\rho}{\sigma_N}} \left(1 + \frac{z^2}{\eta}\right)^{-\frac{\eta+1}{2}} dz &\stackrel{(i)}{=} \int_0^{\ln\left(1 + \frac{\rho^2}{\sigma_N^2 \cdot \eta}\right)} (e^y)^{-\frac{\eta+1}{2}} (e^y - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^y \cdot \frac{\sqrt{\eta}}{2} dy \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_0^{\ln\left(1 + \frac{\rho^2}{\sigma_N^2 \cdot \eta}\right)} e^{-\frac{\eta-1}{2} \cdot y} (e^y - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\eta}}{2} dy \end{aligned}$$

(i) Substitution: $e^y = 1 + \frac{z^2}{\eta}$ mit $dz = (e^y - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^y \cdot \frac{\sqrt{\eta}}{2} dy$, Grenzen: $y(z) = \ln\left(1 + \frac{z^2}{\eta}\right) \Rightarrow y(0) = \ln(1) = 0$, $y\left(\frac{\rho}{\sigma_N}\right) = \ln\left(1 + \frac{\rho^2}{\sigma_N^2 \cdot \eta}\right)$, (ii) Termvereinfachungen.

Bei der allgemeinen Lösung dieses Integrals tauchen nach [Johnson et al., 1995b] (Seite 364 ff.) immer die Hypergeometrische Funktion oder die unvollständige Beta-Funktion als neue Integrale auf die wieder von dem Freiheitsgrad abhängig sind und nicht ohne explizite Angabe der Freiheitsgrade berechnet werden können. Auch die Wahl diskreter Werte für den Freiheitsgrad führt hier nicht zum Ziel, denn dabei die Zufallsvariablen verloren geht. Somit wäre keine Genauigkeitsabschätzung möglich.

Da im Verlauf dieser Arbeit keine Lösung für dieses Problem gefunden wurde, werden wir im nächsten Unterkapitel die Verteilungsfunktion abschätzen um ein Ergebnis zu erhalten.

I.2 Berechnung über Approximation

In diesem Unterkapitel soll eine Formel für den wahrscheinlichen Fehler von skalierten Student t-verteilten Zufallsvariablen erstellt werden. Dazu schätzen wir Formel (41) wie in [Johnson et al., 1995b] (Seite 382) ab, (beachte dabei dass $\eta \geq 3$ gelten muss):

$$F(-\rho \leq \mathcal{Z} \leq \rho) \leq \sqrt{\frac{7 \cdot \eta - 3}{7 \cdot \eta - 14}} \cdot \left(\Phi\left(\rho \cdot \sqrt{\frac{\eta - 2}{\eta}}\right) - \Phi\left(-\rho \cdot \sqrt{\frac{\eta - 2}{\eta}}\right) \right)$$

Schätzen wir nun $\sqrt{\frac{7\cdot\eta-3}{7\cdot\eta-14}} \geq 1$ ab, und beachte man den Zusammenhang $\Phi\left(\rho \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}}\right) - \Phi\left(-\rho \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}}\right) = F\left(-\rho \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}} \leq \mathcal{X} \leq \rho \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}}\right)$ für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable \mathcal{X} , dann folgt:

$$\begin{aligned}
F\left(-\frac{\rho}{\sigma_N} \leq \mathcal{Z} \leq \frac{\rho}{\sigma_N}\right) &= \frac{1}{2} \\
\stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} F\left(-\frac{\rho}{\sigma_N} \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}} \leq \mathcal{X} \leq \frac{\rho}{\sigma_N} \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}}\right) &= \frac{1}{2} \\
\stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} \int_{-\frac{\rho}{\sigma_N} \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}}}{\frac{\rho}{\sigma_N} \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2} dx &= \frac{1}{2} \\
\stackrel{(iii)}{\Leftrightarrow} \int_{-\frac{\rho}{\sqrt{2} \cdot \sigma_N} \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}}}{\frac{\rho}{\sqrt{2} \cdot \sigma_N} \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-t^2} \cdot \sqrt{2} dt &= \frac{1}{2} \\
\stackrel{(iv)}{\Leftrightarrow} \int_{-\frac{\rho}{\sqrt{2} \cdot \sigma_N} \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}}}{\frac{\rho}{\sqrt{2} \cdot \sigma_N} \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-t^2} dt &= \frac{1}{2} \\
\stackrel{(v)}{\Leftrightarrow} \frac{\rho}{\sqrt{2} \cdot \sigma_N} \cdot \sqrt{\frac{\eta-2}{\eta}} &= 0.4769 \\
\stackrel{(vi)}{\Leftrightarrow} \rho &= 0.4769 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_N \cdot \sqrt{\frac{\eta}{\eta-2}} \\
\stackrel{(vii)}{\Leftrightarrow} \rho &= 0.6744898 \cdot \sigma_N \cdot \sqrt{\frac{\eta}{\eta-2}}
\end{aligned}$$

(i) Umformen der Bedingung für den wahrscheinlichen Fehler von Student t-verteilten Zufallsvariablen nach obigen Überlegungen, (ii) Definition der Verteilungsfunktion von standard-normal verteilten Zufallsvariablen einsetzen ([Kreyszig, 1991] (Seite 126)), (iii) Substitution: $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$ mit $dt = \sqrt{2} dy$, Grenzen: $t(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow t(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{2}}, t(-\rho) = -\frac{\rho}{\sqrt{2}}$, (iv) Termvereinfachungen, (v) der Wert von ρ kann analog zu [Korte, 2017] (Seite 7) bestimmt werden, (vi) multiplizieren beider Seiten mit $\sqrt{2} \cdot \sigma_N \cdot \sqrt{\frac{\eta}{\eta-2}}$, (vii) Termvereinfachungen.

Nach [Korte, 2015] (Seite 20) und [Johnson et al., 1995b] (Seite 366) beschreibt $\frac{\eta}{\eta-2}$ die Varianz der Student t-Verteilung, somit ist die Wurzel von $\frac{\eta}{\eta-2}$ gleich der Standardabweichung der Student t-Verteilung. Außerdem ist das Produkt von der Standardabweichung der Student t-Verteilung und der Standardabweichung der Normalverteilung (σ_N) nach Appendix F und G die Standardabweichung einer skalierten Student t-Verteilung mit Standardabweichung σ_N in der normalverteilten Zufallsvariable.

Damit lässt sich der Wahrscheinliche Fehler von skaliert student t-verteilten Zufallsvariablen

schreiben als:

$$\rho = 0.6744898 \cdot \sigma_N \cdot \sigma \tag{45}$$

$$\stackrel{(i)}{=} 0.6744898 \cdot \sigma_N \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\eta - 2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \cdot \vartheta \tag{46}$$

$$\stackrel{(ii)}{=} 1.195502 \cdot \sigma_N \cdot \frac{1}{\sqrt{\eta - 2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)} \cdot \vartheta$$

(i) Formel (44) einsetzen, (ii) Termvereinfachungen.

J Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei skaliert Student t-verteilten Verbesserungen von Beobachtungen zum Mittelwert

J.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

In diesem Kapitel soll die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für $|v_i| \cdot |v_j|$ mit $i \neq j$ bei der Berechnung über den Mittelwert mit Student t-Verteilung bestimmt werden.

Wegen Appendix A folgt $\mathcal{V}_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{E}_j - (n-1) \cdot \mathcal{E}_i + \sum_{j=i}^n \mathcal{E}_j}{n}$. Dabei vereinfachen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die erste und zweite Verbesserung mit:

$$\mathcal{V}_1 = \frac{-(n-1) \cdot \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \sum_{j=3}^n \mathcal{E}_j}{n}$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - (n-1) \cdot \mathcal{E}_2 + \sum_{j=3}^n \mathcal{E}_j}{n}$$

Wir Definieren zur Vereinfachung $\hat{\mathcal{E}}_3 = \sum_{j=3}^n \mathcal{E}_j$. Wegen Appendix F und G ist $\hat{\mathcal{E}}_3$ wieder skaliert Student t-verteilt mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung $\sigma_{\hat{\mathcal{E}}_3} = \sqrt{n-2} \cdot \sigma$. Jedoch ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit des Produktes nicht aus der Multiplikation der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der \mathcal{E} , da alle von der selben Chi-Quadrat-verteilten Zufallsvariablen y abhängen. Da $\hat{\mathcal{E}}_3$ wieder skaliert Student t-verteilt ist gilt: $\hat{\mathcal{E}}_3 = \frac{\mathcal{X}_3}{\sqrt{\frac{y}{n}}}$. Somit ist das Produkt der Beträge der Verbesserungen von den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $\mathcal{X}_1 (\sim N(0, 1))$, $\mathcal{X}_2 (\sim N(0, 1))$, $\mathcal{X}_3 (\sim N(0, \sqrt{n-2}))$ und $\mathcal{Y} (\sim \chi_n^2)$ abhängig. Betrachtet man das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten dieser Zufallsvariablen $\tilde{f}(|v_1| \cdot |v_2|)$ so muss erwähnt werden, dass dieses nicht die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von $(|v_1| \cdot |v_2|)$ ist. Das liegt daran, dass für verschiedene Werte der Zufallsvariablen das selbe Ergebnis herauskommen kann. Bei der Berechnung des Erwartungswertes von $|v_1| \cdot |v_2|$ wird über alle Werte der einzelnen Zufallsvariablen integriert, wodurch die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Kombinationsmöglichkeiten addiert werden. Betrachten wir also:

$$\tilde{f}(|v_1| \cdot |v_2|) \stackrel{(i)}{=} f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(\hat{x}_3) \cdot f(y)$$

$$\stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \right)^3 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(x_{e_1}^2 + x_{e_2}^2 + \frac{x_{\hat{\mathcal{E}}_3}^2}{n-2} \right)} \cdot f(y)$$

(i) $|v_1| \cdot |v_2|$ besteht aus vier unabhängigen Zufallsvariablen, also ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, (ii) siehe [Korte, 2017] (Seite 37) mit $\sigma = 1$.

Beachtet man das gilt \mathcal{V}_i ist Student t-verteilt, kann also geschrieben werden als $\mathcal{V}_i = \frac{\mathcal{X}_{\mathcal{V}_i}}{\sqrt{\frac{y}{n}}}$, dann muss der Parameterübergang nur zwischen den normal verteilten Zufallsvariablen vollzo-

gen werden. Also gilt nach [Korte, 2017] (Seite 38) für die Randwertverteilung $\hat{f}(|v_1| \cdot |v_2|)$:

$$\hat{f}(|v_1| \cdot |v_2|) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(x_{v_1}^2 + x_{v_2}^2 + \frac{(x_{v_1} + x_{v_2})^2}{n-2} \right)} \cdot f(y)$$

J.2 Erwartungswert

Folglich berechnet sich der Erwartungswert von $|v_1| \cdot |v_2|$ zu:

$$\begin{aligned} E\{|v_1| \cdot |v_2|\} &\stackrel{(i)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x_{v_1}}{\sqrt{\frac{y}{\eta}}} \right| \cdot \left| \frac{x_{v_2}}{\sqrt{\frac{y}{\eta}}} \right| \cdot \hat{f}(|v_1| \cdot |v_2|) dx_{v_1} dx_{v_2} dy \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x_{v_1}}{\sqrt{\frac{y}{\eta}}} \right| \cdot \left| \frac{x_{v_2}}{\sqrt{\frac{y}{\eta}}} \right| \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-2}} \cdot \dots \\ &\quad e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(x_{v_1}^2 + x_{v_2}^2 + \frac{(x_{v_1} + x_{v_2})^2}{n-2} \right)} \cdot f(y) dx_{v_1} dx_{v_2} dy \\ &\stackrel{(iii)}{=} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x_{v_1}| \cdot |x_{v_2}| \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-2}} \cdot \dots \right. \\ &\quad \left. e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(v_1^2 + v_2^2 + \frac{(v_1 + v_2)^2}{n-2} \right)} dx_{v_1} dx_{v_2} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{y} \cdot f(y) dy \\ &\stackrel{(iv)}{=} \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \left(\sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin \left(\frac{1}{n-1} \right) \right) \cdot \eta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y} \cdot f(y) dy \\ &\stackrel{(v)}{=} \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \left(\sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin \left(\frac{1}{n-1} \right) \right) \cdot 2^{-1} \cdot \eta \cdot \frac{1}{\frac{\eta}{2} - 1} \\ &\stackrel{(vi)}{=} \frac{\eta}{\eta - 2} \cdot \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \left(\sqrt{n \cdot (n-2)} + \arcsin \left(\frac{1}{n-1} \right) \right) \end{aligned}$$

(i) Definition vom Erwartungswert, (ii) $\hat{f}(|v_1| \cdot |v_2|) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(v_1^2 + v_2^2 + \frac{(v_1 + v_2)^2}{n-2} \right)} \cdot f(y)$ einsetzen, (iii) da \mathcal{Y} unabhängig von den andern Zufallsvariablen \mathcal{X}_i ist, ist die gesamte Wahrscheinlichkeit gleich dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten, (iv) verändert nach [Korte, 2017] (Seite 33) bzw. [Helmert, 1876] (Seite 117) (jeweils mit $\sigma = 1$), (v) nach [Johnson et al., 1995a] (Seite 420) gilt allgemein: $E\{y^r\} = 2^r \cdot \frac{\Gamma(\frac{\eta}{2} + r)}{\Gamma(\frac{\eta}{2})}$ für $r \in \mathbb{R}$. Setzt man nun $r = -1$, so ergibt sich $E\{y^{-1}\} = 2^{-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\eta}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{\eta}{2})} = 2^{-1} \cdot \frac{1}{\frac{\eta}{2} - 1}$, (vi) Termvereinfachungen.

Bemerkung: Man hätte auch direkt bemerken können, dass für zwei skaliert Student t-verteilt Zufallsvariablen \mathcal{V}_1 und \mathcal{V}_2 gilt:

$$\begin{aligned} E\{|\mathcal{V}_1| \cdot |\mathcal{V}_2|\} &\stackrel{(i)}{=} E \left\{ \frac{|\mathcal{X}_1|}{\sqrt{\frac{y}{\eta}}} \cdot \frac{|\mathcal{X}_2|}{\sqrt{\frac{y}{\eta}}} \right\} \\ &\stackrel{(ii)}{=} E\{|\mathcal{X}_1| \cdot |\mathcal{X}_2|\} \cdot E \left\{ \frac{1}{\left| \frac{y}{\eta} \right|} \right\} \end{aligned} \tag{47}$$

K Herleitung der Verbesserungen beim Median

Allgemeine Gleichung:

$$v_i = \text{med}(\ell) - \ell_i$$

Fall 1: n ungerade und $\ell_i = \ell_{(\frac{n+1}{2})}$

$$\begin{aligned} v_i &\stackrel{(i)}{=} \ell_{(\frac{n+1}{2})} - \ell_{(\frac{n+1}{2})} \\ &\stackrel{(ii)}{=} 0 \end{aligned}$$

Fall 2: n ungerade und $\ell_i \neq \ell_{(\frac{n+1}{2})}$

$$\begin{aligned} v_i &\stackrel{(i)}{=} \ell_{(\frac{n+1}{2})} - \ell_i \\ &\stackrel{(iii)}{=} \lambda + \epsilon_{(\frac{n+1}{2})} - (\lambda + \epsilon_i) \\ &\stackrel{(iv)}{=} \epsilon_{(\frac{n+1}{2})} - \epsilon_i \end{aligned}$$

Fall 3: n gerade und $\ell_i = \ell_{(\frac{n}{2})}$

$$\begin{aligned} v_i &\stackrel{(i)}{=} \frac{\ell_{(\frac{n}{2})} + \ell_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} - \ell_{(\frac{n}{2})} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{-\ell_{(\frac{n}{2})} + \ell_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{-\left(\lambda + \epsilon_{(\frac{n}{2})}\right) + \lambda + \epsilon_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} \\ &\stackrel{(iv)}{=} \frac{-\epsilon_{(\frac{n}{2})} + \epsilon_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} \end{aligned}$$

Fall 4: n gerade und $\ell_i = \ell_{(\frac{n}{2}+1)}$

$$\begin{aligned} v_i &\stackrel{(i)}{=} \frac{\ell_{(\frac{n}{2})} + \ell_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} - \ell_{(\frac{n}{2}+1)} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{\ell_{(\frac{n}{2})} - \ell_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{\lambda + \epsilon_{(\frac{n}{2})} - \left(\lambda + \epsilon_{(\frac{n}{2}+1)}\right)}{2} \\ &\stackrel{(iv)}{=} \frac{\epsilon_{(\frac{n}{2})} - \epsilon_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} \end{aligned}$$

Fall 5: n gerade und $\ell_i \notin \left\{ \ell_{(\frac{n}{2})}, \ell_{(\frac{n}{2}+1)} \right\}$

$$\begin{aligned} v_i &\stackrel{(i)}{=} \frac{\ell_{(\frac{n}{2})} + \ell_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} - \ell_i \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{\ell_{(\frac{n}{2})} + \ell_{(\frac{n}{2}+1)} - 2 \cdot \ell_i}{2} \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{\lambda + \epsilon_{(\frac{n}{2})} + \lambda + \epsilon_{(\frac{n}{2}+1)} - 2 \cdot (\lambda + \epsilon_i)}{2} \\ &\stackrel{(iv)}{=} \frac{\epsilon_{(\frac{n}{2})} + \epsilon_{(\frac{n}{2}+1)} - 2 \cdot \epsilon_i}{2} \end{aligned}$$

Dabei gilt:

1. (i) Einsetzen von $\text{med}(\ell)$, (ii) Termvereinfachungen, (iii) $\ell_i = \lambda + \epsilon_i$, (iv) λ kürzen.
2. Fall 3 und Fall 4 unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

L Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei Verbesserungen von Beobachtungen zum Median

L.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

In diesem Kapitel soll die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für $|v_i| \cdot |v_j|$ mit $i \neq j$ bei der Berechnung über den Median mit normalverteilten wahren Beobachtungsfehlern und ungerader Anzahl von Beobachtungen n bestimmt werden. Wegen der Berechnung über den Median und da die Anzahl von Beobachtungen n als ungerade festgelegt wurde, folgt dass $\mathcal{V}_i = \mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} - \mathcal{E}_i$ (siehe Formel (16)). Falls $\mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} = \mathcal{E}_i$ wird nicht vereinfacht auf 0, wodurch die Genauigkeitsabschätzung größer wird. Somit gilt, dass $\mathcal{V}_i = \mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} - \mathcal{E}_i$ und $\mathcal{V}_j = \mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} - \mathcal{E}_j$. Dabei sind $\mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})}$, \mathcal{E}_i und \mathcal{E}_j nach Definition unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz σ . Wir Definieren zur Vereinfachung $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})}$. Also ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit des Produktes aus der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten über die \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} f(|v_1| \cdot |v_2|) &\stackrel{(i)}{=} f(\epsilon_1) \cdot f(\epsilon_2) \cdot f(\epsilon_3) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma}} \cdot e^{-\frac{\epsilon_1^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma}} \cdot e^{-\frac{\epsilon_2^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma}} \cdot e^{-\frac{\epsilon_3^2}{2 \cdot \sigma^2}} \\ &\stackrel{(iii)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma}} \right)^3 \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)} \end{aligned}$$

(i) $|v_1| \cdot |v_2|$ besteht aus drei unabhängigen Zufallsvariablen, also ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, (ii) $f(\epsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma}} \cdot e^{-\frac{\epsilon_i^2}{2 \cdot \sigma^2}}$, (iii) Termvereinfachungen.

Beachten man das gilt:

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{3} \cdot \mathcal{E}_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \mathcal{V}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \mathcal{V}_1 \right)^2 + \frac{2}{3} \cdot (\mathcal{V}_1^2 + \mathcal{V}_2^2) - \frac{2}{3} \cdot \mathcal{V}_1 \cdot \mathcal{V}_2 \\ &\stackrel{(i)}{=} 3 \cdot \mathcal{E}_3^2 + \frac{1}{3} \cdot \mathcal{V}_2^2 + \frac{1}{3} \cdot \mathcal{V}_1^2 - 2 \cdot \mathcal{E}_3 \cdot (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) + \frac{2}{3} \cdot \mathcal{V}_1 \cdot \mathcal{V}_2 + \frac{2}{3} \cdot (\mathcal{V}_1^2 + \mathcal{V}_2^2) - \frac{2}{3} \cdot \mathcal{V}_1 \cdot \mathcal{V}_2 \\ &\stackrel{(ii)}{=} 3 \cdot \mathcal{E}_3^2 + \mathcal{V}_2^2 + \mathcal{V}_1^2 - 2 \cdot \mathcal{E}_3 \cdot (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \mathcal{E}_3^2 + (\mathcal{E}_3 - \mathcal{V}_2)^2 + (\mathcal{E}_3 - \mathcal{V}_1)^2 \\ &\stackrel{(iv)}{=} \mathcal{E}_3^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_1^2 \end{aligned}$$

(i) Ausmultiplizieren der Klammer, (ii) Termvereinfachungen, (iii) $\mathcal{E}_3^2 - 2 \cdot \mathcal{E}_3 \cdot \mathcal{V}_i + \mathcal{V}_i^2 = (\mathcal{E}_3 - \mathcal{V}_i)^2$, (iv) $\mathcal{V}_i = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_i$.

Machen wir jetzt einen Parameterübergang von ϵ_1 und ϵ_2 zu v_1 und v_2 , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(|v_1| \cdot |v_2|) &\stackrel{(i)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma}} \right)^3 \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \left(\left(\sqrt{3} \cdot \epsilon_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_1 \right)^2 + \frac{2}{3} \cdot (v_1^2 + v_2^2) - \frac{2}{3} \cdot v_1 \cdot v_2 \right)} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma}} \right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (v_1^2 + v_2^2) - \frac{2}{3} \cdot v_1 \cdot v_2 \right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \epsilon_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_1 \right)^2} \end{aligned}$$

(i) Parameterübergang durchführen, (ii) separieren aller Terme mit ϵ_3 .

Zum Schluss die Randverteilung von $f(|v_1| \cdot |v_2|)$ bezüglich ϵ_3 gebildet, dazu wird nur der von ϵ_3 abhängig Teil betrachtet:

$$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot (\sqrt{3} \cdot \epsilon_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_1)^2} d\epsilon_3 \stackrel{(i)}{=} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dy \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(i) Substitution: $y = \sqrt{3} \cdot \epsilon_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_1$, die Grenzen bleiben bei $-\infty$ und ∞ und $\frac{d\epsilon_3}{dy} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
(ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ kann als Skalar aus dem Integral gezogen werden und der Rest beschreibt die Normalverteilung über y die durch integrieren über ganz \mathbb{R} den Wert 1 ergibt.

Eingesetzt in unsere Ursprungsformel ergibt sich die Randverteilung \bar{f} :

$$\bar{f}(|v_1| \cdot |v_2|) = \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma} \right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot (\frac{2}{3} \cdot (v_1^2 + v_2^2) - \frac{2}{3} \cdot v_1 \cdot v_2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

L.2 Erwartungswert

$$\begin{aligned} E\{|v_i| \cdot |v_j|\} &\stackrel{(i)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v_i| \cdot |v_j| \cdot \bar{f}(|v_i| \cdot |v_j|) dv_i dv_j \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v_1| \cdot |v_2| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma} \right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot (\frac{2}{3} \cdot (v_1^2 + v_2^2) - \frac{2}{3} \cdot v_1 \cdot v_2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dv_i dv_j \\ &\stackrel{(iii)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sqrt{3} \cdot \hat{v}_1 \right| \cdot \left| \sqrt{3} \cdot \hat{v}_2 \right| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma} \right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot (2 \cdot \hat{v}_1^2 + 2 \cdot \hat{v}_2^2 + 2 \cdot \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2)} \cdot \dots \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} d\hat{v}_i \sqrt{3} d\hat{v}_j \\ &\stackrel{(iv)}{=} 3 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{v}_1| \cdot |\hat{v}_2| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma} \right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot (2 \cdot \hat{v}_1^2 + 2 \cdot \hat{v}_2^2 + 2 \cdot \hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2)} \cdot \dots \\ &\quad \sqrt{3} d\hat{v}_i d\hat{v}_j \\ &\stackrel{(v)}{=} 3 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{v}_i| \cdot |\hat{v}_j| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma} \right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot (\hat{v}_1^2 + \hat{v}_2^2 + (\hat{v}_1 + \hat{v}_2)^2)} \cdot \sqrt{3} d\hat{v}_i d\hat{v}_j \\ &\stackrel{(vi)}{=} 3 \cdot \frac{2 \cdot \sigma^2}{3 \cdot \pi} \cdot \left(\sqrt{3} + \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) \right) \\ &\stackrel{(vii)}{=} \frac{2 \cdot \sigma^2}{\pi} \cdot \left(\sqrt{3} + \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned} \tag{48}$$

(i) Definition vom Erwartungswert, (ii) $f(|v_i| \cdot |v_j|)$ einsetzen, (iii) Substitution $\hat{v}_1 = v_1 \cdot -\sqrt{\frac{1}{3}}$, mit $\frac{dv_1}{d\hat{v}_1} = -\sqrt{3}$, und Substitution $\hat{v}_2 = v_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$, mit $\frac{dv_2}{d\hat{v}_2} = \sqrt{3}$. Die Grenzen bleiben in beiden Fällen bei $-\infty$ und ∞ . (iv) Termvereinfachungen (mit $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ aus dem Integral ziehen), (v) $v_1^2 + v_2^2 + (v_1 + v_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + 2 \cdot v_1 \cdot v_2 = 2 \cdot v_1^2 + 2 \cdot v_2^2 + 2 \cdot v_1 \cdot v_2$, (vi) da die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion im Integral gleich der bei der Berechnung über den Mittelwert mit $n = 3$ ist, sind die Integrale identisch (verändert nach [Korte, 2017] (Seite 38)), (vii) Termvereinfachungen.

Bemerkung: Nach der Verallgemeinerung des Medians über Formel (17), sind die obigen Berechnungen für eine grade Anzahl von Beobachtungen ebenfalls gültig.

M Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei Laplace verteilten Verbesserungen von Beobachtungen zum Median

M.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

In diesem Kapitel soll die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für $|v_i| \cdot |v_j|$ mit $i \neq j$ bei der Berechnung über den Median mit Laplace verteilten wahren Beobachtungsfehlern bestimmt werden. Wegen Formel (18) folgt $\mathcal{V}_i = \mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} - \mathcal{E}_i$. Dabei vereinfachen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die erste und zweite Verbesserung mit:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &= \mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} - \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{V}_2 &= \mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} - \mathcal{E}_2\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung sei $\mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} \neq \mathcal{E}_i$ $i \in \{1, 2\}$. Wegen Appendix B sind \mathcal{V}_1 und \mathcal{V}_2 wieder Laplace verteilt. Also ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit des Produktes aus der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten über die $\mathcal{E} \sim \mathcal{L}(0, \sigma)$:

$$\begin{aligned}f(|v_1| \cdot |v_2|) &\stackrel{(i)}{=} f(\epsilon_1) \cdot f(\epsilon_2) \cdot f(\epsilon_{(\frac{n+1}{2})}) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} e^{-|\epsilon_1| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} e^{-|\epsilon_2| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} e^{-\left|\epsilon_{(\frac{n+1}{2})}\right| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \\ &\stackrel{(iii)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^3 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (|\epsilon_1| + |\epsilon_2| + \left|\epsilon_{(\frac{n+1}{2})}\right|)}\end{aligned}$$

(i) $|v_1| \cdot |v_2|$ besteht aus drei unabhängigen Zufallsvariablen, also ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, (ii) $f(\epsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma} e^{-|\epsilon_i| \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}$, (iii) Termvereinfachungen.

Beachtet man das gilt:

$$\begin{aligned}& -\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 + 3 \cdot \mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} \\ &\stackrel{(i)}{=} -\left(\mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} - \mathcal{E}_1\right) - \left(\mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} - \mathcal{E}_2\right) + 3 \cdot \mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{(\frac{n+1}{2})}\end{aligned}$$

(i) \mathcal{V}_i von oben einsetzen, (iii) Termvereinfachungen.

Einen Parameterübergang in $f(|v_1| \cdot |v_2|)$ ist nicht zulässig, da hier die Beträge stehen. Da wir

aber am Erwartungswert interessiert sind gilt analog zur Berechnung über den Mittelwert:

$$\begin{aligned}
E\{|v_1| \cdot |v_2|\} &\stackrel{(i)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v_1| \cdot |v_2| \cdot f(|v_1| \cdot |v_2|) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\
&\stackrel{(ii)}{=} 2 \cdot \int_0^{\infty} 2 \cdot \int_0^{\infty} 2 \cdot \int_0^{\infty} |v_1| \cdot |v_2| \cdot f(|v_1| \cdot |v_2|) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\
&\stackrel{(iii)}{=} 2 \cdot \int_0^{\infty} 2 \cdot \int_0^{\infty} 2 \cdot \int_0^{\infty} v_1 \cdot v_2 \cdot f(v_1 \cdot v_2) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

(i) Definition vom Erwartungswert, (ii) ϵ_1, ϵ_2 und $\epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ sind Laplace verteilt, also symmetrische zur y-Achse verteilt, genau wie die Betragsfunktion. Für solche Funktionen gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} f(x)dx$, (iii) der Betrag einer positiven Zahl ist die Zahl selbst.

Jetzt dürfen wir den Parameterübergang durchführen und können die Randverteilung \hat{f} bezüglich $\epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(|v_1| \cdot |v_2|) &= 2 \cdot \int_0^{\infty} f(|v_1| \cdot |v_2|) d\epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\
&\stackrel{(i)}{=} 2 \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right)^3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \left(-v_1 - v_2 + 3 \cdot \epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)} d\epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\
&\stackrel{(ii)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (-v_1 - v_2)} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot 3 \cdot \epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} d\epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\
&\stackrel{(iii)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (-v_1 - v_2)} \cdot \left(2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \hat{\epsilon}_3} d\hat{\epsilon}_3 \right) \cdot \frac{1}{3} \\
&\stackrel{(iv)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (-v_1 - v_2)} \cdot \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(i) Einsetzen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, (ii) alle Terme die von $\epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ unabhängig sind aus dem Integral herausziehen, (iii) Substitution: $\hat{\epsilon}_3 = 3 \cdot \epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ mit $\frac{d\epsilon_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{d\hat{\epsilon}_3} = \frac{1}{3}$. Die Integrationsgrenzen ändern sich nicht. (iv) Das Integral in der Klammer entspricht der Fläche unter der Laplaceverteilung, es ist also gleich 1.

M.2 Erwartungswert

$$\begin{aligned}
E\{|v_1| \cdot |v_2|\} &\stackrel{(i)}{=} 2 \cdot \int_0^\infty 2 \cdot \int_0^\infty v_1 \cdot v_2 \cdot \hat{f}(v_1 \cdot v_2) \, dv_1 \, dv_2 \\
&\stackrel{(ii)}{=} 2 \cdot \int_0^\infty 2 \cdot \int_0^\infty v_1 \cdot v_2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (-v_1 - v_2)} \cdot \frac{1}{3} \, dv_1 \, dv_2 \\
&\stackrel{(iii)}{=} \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \int_0^\infty v_2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (-v_2)} \cdot 2 \cdot \int_0^\infty v_1 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (-v_1)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \, dv_1 \, dv_2 \\
&\stackrel{(iv)}{=} \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \int_0^\infty v_1 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (-v_1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \, dv_1\right) \cdot \left(2 \cdot \int_0^\infty v_2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot (-v_2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \, dv_2\right) \\
&\stackrel{(v)}{=} \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \int_0^\infty v_1 \cdot (-1) \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot v_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \, dv_1 \cdot (-1)\right) \cdot \dots \\
&\quad \left(2 \cdot \int_0^\infty v_2 \cdot (-1) \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot v_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \, dv_2 \cdot (-1)\right) \\
&\stackrel{(vi)}{=} \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \int_0^\infty v_1 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot v_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \, dv_1\right) \cdot \left(2 \cdot \int_0^\infty v_2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \cdot v_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \, dv_2\right) \\
&\stackrel{(vii)}{=} \frac{1}{3} \cdot \vartheta_v^2 \\
&\stackrel{(iix)}{=} \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sigma_{v_i}^2
\end{aligned}$$

(i) Definition vom Erwartungswert, (ii) $\hat{f}(|v_1| \cdot |v_2|)$ einsetzen, (iii) alle Terme die mit v_2 zusammenhängen aus dem Integral über v_1 herausziehen, (iv) das Integral über v_1 aus dem Integral über v_2 herausziehen, (v) beide Integrale substituieren: $\hat{v}_i = -1 \cdot v_i$ mit $\frac{d\hat{v}_i}{dv_i} = -1$. Die Integrationsgrenzen ändern sich nicht. (vi) Termvereinfachungen, (vii) Definition des durchschnittlichen Fehlers, (iix) $\vartheta = \frac{\sigma_{v_i}}{\sqrt{2}}$ (siehe Appendix D).

N Erwartungswert vom Produkt aus den Beträgen von zwei skaliert Student t-verteiltten Verbesserungen von Beobachtungen zum Median

Seien $\mathcal{V}_1 = \epsilon_{(\frac{n+1}{2})} - \epsilon_1$ und $\mathcal{V}_2 = \epsilon_{(\frac{n+1}{2})} - \epsilon_2$ wie in Appendix ?? Fall 2 definiert. Dann sind die wahren Beobachtungsfehler ϵ_i wieder Student t-Verteilt mit Freiheitsgrad η und Erwartungswert $E\{\mathcal{E}_i\} = 0$. Insbesondere setzen sich diese Zufallsvariablen aus einer normalverteilten Zufallsvariable \mathcal{X}_i und der Zufallsvariablen \mathcal{Y} die für alle \mathcal{E}_i gleich bleibt zusammen.

Anstelle der kompletten Herleitung vom gesuchten Erwartungswert, benutzen wir Formel (47) aus Appendix J:

$$E\{|\mathcal{V}_1| \cdot |\mathcal{V}_2|\} = E\{|\mathcal{X}_1| \cdot |\mathcal{X}_2|\} \cdot E\left\{\frac{1}{|\frac{\mathcal{Y}}{\eta}|\right\}$$

Mit Formel (48) aus Appendix L lässt sich die Lösung für $E\{|\mathcal{X}_1| \cdot |\mathcal{X}_2|\}$ bestimmen. Und da \mathcal{Y} von der Wahl ob Mittelwert oder Median benutzt wird unabhängig ist, gilt nach [Johnson et al., 1995a] (Seite 421), dass das Integral über y als die momenterzeugende Funktion für das -1 te Moment geschrieben werden kann. Dieses errechnet sich zu $2^{-1} \cdot \frac{1}{\frac{\eta}{2}-1}$. Also folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} E\{|\mathcal{V}_1| \cdot |\mathcal{V}_2|\} &= \frac{2 \cdot \sigma^2}{\pi} \cdot \left(\sqrt{3} + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \right) \cdot \frac{\eta}{\eta - 2} \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sqrt{3} + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \right) \cdot \sigma_{v_i}^2 \end{aligned}$$

(i) $\sigma_{v_i} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\eta}{\eta-2}}$

Der wahrscheinliche Fehler direkter Beobachtungen

Definition wahrscheinlicher Fehler

Der **wahrscheinliche Fehler** ist definiert als der Wert ρ für den gilt:

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Schätzung über L_2 -Norm Schätzer

Definition L_2 -Norm Schätzer

Bei der L_2 -Norm Schätzung wird der wahre Wert der direkten Beobachtungen über den **Mittelwert aller Beobachtungen** geschätzt. Die Verbesserungen ergeben sich aus der Differenz zwischen den Beobachtungen und dem Mittelwert.

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} l_j + (n-1) \cdot l_i + \sum_{j=i+1}^n l_j}{n}$$

Normalverteilung

Der **Schätzwert** für den **wahrscheinlichen Fehler** aus den Verbesserungen werden für verschiedene Verteilungen bestimmt. Für die Normalverteilung ergibt sich die Schätzung:

$$\rho_\epsilon = 0,845347 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$$

Laplaceverteilung

Der Schätzwert über die Laplace-Verteilung **weicht nur in dem Faktor ab** und ergibt sich zu:

$$\rho_\epsilon = 0,693147 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$$

Student t-Verteilung

Bei der Student t-Verteilung ist die Angabe des wahrscheinlichen Fehlers nur mit einer **Approximation** für den **Term**

$$\sqrt{\frac{\pi}{\eta-2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta-1}{2}\right)}$$

möglich. Um den Term genau zu bestimmen muss der Freiheitsgrad n bekannt sein. Dann kann der wahrscheinliche Fehler direkt über die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion berechnet werden.

$$\int_{-\rho}^{\rho} \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\eta \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot dx = \frac{1}{2}$$

Schätzung über L_1 -Norm Schätzer

Definition L_1 -Norm Schätzer

Die L_1 -Norm Schätzung wird der wahre Wert der direkten Beobachtung über den **Median der Beobachtungen** geschätzt. Die Verbesserungen ergeben sich aus dem Abstand von dem Median zu den Beobachtungen:

$$v_i = \text{med}(l)$$

Normalverteilung

Der **wahrscheinliche Fehler** wird aus den Verbesserungen geschätzt, wobei verschiedene Verteilungen benutzt werden. Für die Normalverteilung ergibt die Schätzung:

$$\rho_\epsilon = 0,845347 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{n \cdot \sqrt{2}}$$

Laplaceverteilung

Bei der Laplace-Verteilung **ändert sich nur der Faktor**, und ergibt die Schätzung:

$$\rho_\epsilon = 0,693147 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{n \cdot \sqrt{2}}$$

Genauigkeiten der Schätzung

Rückführung auf den durchschnittlichen Fehler

Der stochastische Anteil des wahrscheinlichen Fehlers ist durch den Bruch gegeben. Dieser schätzt den durchschnittlichen Fehler $\sigma_{\vartheta_\epsilon}^2$

$\sigma_{\vartheta_\epsilon}^2$	Normalverteilung
L_2 -Norm	
L_1 -Norm	
$\sigma_{\vartheta_\epsilon}^2$	Laplace-Verteilung
L_2 -Norm	
L_1 -Norm	

Der Wahrscheinliche Fehler bei vermittelndem Ausgleich

Direkte Berechnung

Für n direkte Beobachtungen mit m Parametern ergibt sich der wahrscheinliche Fehler

$$\vartheta_\epsilon \cdot \left(1 - \frac{m}{12 \cdot n} - \frac{m^2}{24 \cdot n^2} - \dots\right) = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-m)}}$$

Approximation über Schranken

Dieser ist besser über die Schranken

$$\frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n \cdot (n-m)}} \leq \vartheta_\epsilon \leq \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{n-m}$$

eingegrenzt.