

Korrelierte Messungen - was nun?

Wolf-Dieter Schuh, Ina Krasbuter und Boris Kargoll
Institut für Geodäsie und Geoinformation, Universität Bonn
Nussallee 17
53115 Bonn
{schuh · ina.krasbuter · bkargoll}@geod.uni-bonn.de

1 Einführung

Zum Verständnis der vielfältigen Prozesse im System Erde spielt neben der qualitativen Naturbeobachtung die quantitative Erfassung von Phänomenen eine zentrale Rolle, denn **Messen schafft Wissen**. Bei der Durchführung von Messungen werden die zu quantifizierenden Effekte durch zusätzliche Signale überlagert. Das Beobachtungsmodell kann somit oft sehr gut durch eine Kombination von deterministischen und stochastischen Komponenten beschrieben werden. In dieser Arbeit wollen wir von einem linearen Gauß-Markov Modell ausgehen, sodass jede Beobachtung \mathcal{L}_t durch

$$\mathcal{L}_t = \mathbf{A}_t \boldsymbol{\xi} + \mathcal{S}_t \quad (1)$$

beschrieben ist. Dabei bezeichnen \mathcal{L}_t und \mathcal{S}_t Zufallsvariablen, die den Beobachtungsprozess bzw. den Signalanteil zum Zeitpunkt t beschreiben. \mathbf{A}_t stellt den funktionalen Zusammenhang zwischen der Beobachtungsgröße und den (wahren) Parametern $\boldsymbol{\xi}$ her. Im Weiteren werden wir davon ausgehen, dass die Messungen in regelmäßigen Zeitabständen Δt durchgeführt werden (Zeitreihe). Die Sequenzen $\{\mathcal{L}_t\}_{\Delta t}$, $\{\mathcal{S}_t\}_{\Delta t}$, $t \in \mathbb{Z}$ bezeichnen somit zeitdiskrete stochastische Prozesse, deren Eigenschaften durch die (multivariate) Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (PDF) bzw. deren Momente (z.B. Erwartungswert $E\{\cdot\}$, Varianz $\Sigma\{\cdot\}$, ...) beschrieben werden. Im speziellen werden wir davon ausgehen, dass der stochastische Prozess $\{\mathcal{S}_t\}_{\Delta t}$ aus einem autoregressiven Prozess der Ordnung p , kurz AR(p)-Prozess

$$\mathcal{S}_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j \mathcal{S}_{t-j} + \mathcal{E}_t \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}_t \sim N(0, \sigma_{\mathcal{E}}^2) \quad \text{und} \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

hervorgeht. Der Prozess $\{\mathcal{E}_t\}_{\Delta t}$ charakterisiert *Gaußsches weißes Rauschen* und stellt somit eine Folge von normalverteilten unkorrelierten Größen dar, die den

Erwartungswert $E\{\mathcal{E}_t\} = 0$ und die Varianz $\Sigma\{\mathcal{E}_t\} = \sigma_{\mathcal{E}}^2$ aufweisen. In vektorieller Schreibweise ergibt sich somit $\mathbf{E}\{\mathcal{E}\} = \mathbf{0}$ und $\Sigma\{\mathcal{E}\} = \mathbf{I}\sigma_{\mathcal{E}}^2$, wobei $\mathbf{E}\{\cdot\}$ den multivariaten Erwartungswert als eine vektorwertige Funktion und $\Sigma\{\cdot\}$ die Varianz/Kovarianzmatrix darstellt. Aus dem Gauß-Markov Modell

$$\mathcal{L} = \mathbf{A}\xi + \mathcal{S} \quad \text{mit} \quad \Sigma := \Sigma\{\mathcal{S}\} = \Sigma\{\mathcal{L}\} \quad (3)$$

ergibt sich der beste lineare erwartungstreue Schätzer $\tilde{\mathcal{X}}$ der wahren Parameter ξ durch

$$\tilde{\mathcal{X}} = (\mathbf{A}\Sigma^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathcal{L}. \quad (4)$$

Die zugehörige Varianz/Kovarianzmatrix $\Sigma\{\tilde{\mathcal{X}}\}$ errechnet sich nach dem Varianzfortpflanzungsgesetz mit

$$\Sigma\{\tilde{\mathcal{X}}\} = (\mathbf{A}\Sigma^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (5)$$

Sind Messungen l als konkrete Realisierung des Zufallsvektors \mathcal{L} bekannt, so ergibt

$$\tilde{x} = (\mathbf{A}\Sigma^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^T \Sigma^{-1} l \quad (6)$$

eine konkrete Realisierung (Parameterschätzung) \tilde{x} des Zufallsvektors bzw. Schätzers $\tilde{\mathcal{X}}$.

In diesem Artikel wird konsequent zwischen Zufallsgrößen in kaligraphischen Schriftzeichen \mathcal{X} , wahren Werten in griechischen Zeichen ξ und Messungen oder Realisierungen der Zufallsvariablen in lateinischen (italic) Buchstaben x unterschieden. Vektoren, Matrizen und vektorwertige Funktionen werden durch Fettdruck \mathcal{X} , ξ , x herausgehoben.

Der Artikel ist wie folgt aufgebaut. Im Kap. 2 werden wir zunächst sehr allgemein auf stochastische Prozesse eingehen und uns dann speziell kovarianzstationären Prozessen widmen. Durch Anordnung aller Darstellungsformen in einem einheitlichen Schema - *Magisches Quadrat* genannt - erstellen wir eine kompakte Übersicht über alle Darstellungsformen. Näheres Augenmerk werden wir im Kap. 3 auf regelmäßig abgetastete kovarianzstationäre Prozesse legen und im Kap. 4 den autoregressiven Prozess der Ordnung p (AR(p)-Prozesse) untersuchen. Die Einbindung der stochastischen Prozesse in das Gauß-Markov Modell wird im Kap. 5 wieder aufgegriffen und Dekorrelationsstrategien werden diskutiert um auch lange korrelierte Zeitreihen effizient bearbeiten zu können. Als Anwendung werden im Kap. 6 rekursive und nichtrekursive Filter für den AR(1)-Prozess hergeleitet. Eine Diskussion schließt dann diese Arbeit ab.

2 Stochastischer Prozess

Alle Messungen werden durch (Rest)Signale überlagert, die sich aus vielen zufällig wirkende Komponenten zusammensetzen. Die mathematische Beschreibung dieser zeitlich geordneten, zufälligen Vorgänge erfolgt über einen zeitkontinuierlichen stochastischen Prozess $\{\mathcal{S}(t); t \in \mathbb{R}\}$ oder wenn diskrete Zeitpunkte t_i vorliegen durch einen zeitdiskreten stochastischen Prozess $\{\mathcal{S}_{t_i}; i \in \mathbb{Z}\}$.

Für jeden speziellen Zeitpunkt t_j ist \mathcal{S}_{t_j} eine Zufallsvariable, die durch die Randverteilung $G_{t_j}^{\mathcal{S}}(x), x \in \mathbb{R}$, einer gemeinsamen (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungsfunktion $F^{\mathcal{S}}(\{x_{t_i}; i \in \mathbb{Z}\})$ oder Dichtefunktion $f^{\mathcal{S}}(\{x_{t_i}; i \in \mathbb{Z}\})$ beschrieben wird, mit $x_{t_i} \in \mathbb{R}$. Kovarianzen zwischen den Zufallsvariablen \mathcal{S}_{t_j} und \mathcal{S}_{t_k} für die Zeitpunkte t_j und t_k werden durch die gemeinsame Randverteilung $G_{t_j, t_k}^{\mathcal{S}}(x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ festgelegt. Für höhere multivariate Momente gilt dies entsprechend.

Betrachten wir jedoch nur Prozesse, deren statistische Eigenschaften in der Zeit unverändert bleiben, so beschränken wir uns auf *stationäre Prozesse*. Nach Brockwell and Davis (1991, Def 1.3.3) ist ein stochastischer Prozess $\{\mathcal{S}_{t_i}; i \in \mathbb{Z}\}$ *stark stationär*, wenn die gemeinsame Randverteilungen bezüglich k aufeinanderfolgender Zufallsvariablen zu verschiedenen Zeitpunkten t_j und t_{j+h} ident sind,

$$G_{t_i, \dots, t_{i+k-1}}^{\mathcal{S}}(x_1, \dots, x_{k-1}) = G_{t_{i+h}, \dots, t_{i+h+k-1}}^{\mathcal{S}}(x_1, \dots, x_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}^+; i, h \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

h legt dabei einen beliebigen Verschiebeparameter fest. Für $k = 1$ gilt, dass die Randverteilung $G_{t_i}^{\mathcal{S}}(x)$ für alle i unverändert bleibt und somit der Erwartungswert $E\{\mathcal{S}_{t_i}\}$, die Varianz $\Sigma\{\mathcal{S}_{t_i}\}$ sowie alle höheren univariaten Momente $E\{\mathcal{S}_{t_i}^p\}$ der Zufallsvariablen \mathcal{S}_{t_i} für alle Zeitpunkte t_i unverändert bleiben. Für $k = 2$ sind auch die Kovarianzen an allen Zeitpunkten unverändert. Man spricht dann von *kovarianzstationären stochastischen Prozessen*.

Betrachtet man *Gauß-Prozesse*, für welche die Verteilung aller Zufallsvariablen durch eine multivariate Normalverteilung festgelegt ist, haben *kovarianzstationäre Prozesse* eine besondere Bedeutung. Da die Randverteilungen einer multivariaten Normalverteilung wieder der Normalverteilung genügen, wird diese durch die beiden Parameter - Erwartungswert $E\{\mathcal{S}_{t_i}\}$ und Autokovarianz $\Sigma\{\mathcal{S}_{t_i}, \mathcal{S}_{t_j}\} = E\{(\mathcal{S}_{t_i} - E\{\mathcal{S}_{t_i}\})(\mathcal{S}_{t_j} - E\{\mathcal{S}_{t_j}\})\}$ - vollständig beschrieben. Um starke Stationarität für den *Gauß-Prozess* herzustellen genügen somit die

Forderungen (Brockwell and Davis, 1991, Def 1.3.2)

$$\bullet E \{ \mathcal{S}_{t_i} \} = \mu \quad \text{mit } \mu \dots const. , \quad (8)$$

$$\bullet E \{ \mathcal{S}_{t_i}^2 \} < \infty , \quad (9)$$

$$\bullet \Sigma \{ \mathcal{S}_{t_i} \} = E \{ (\mathcal{S}_{t_i} - E \{ \mathcal{S}_{t_i} \})^2 \} = \sigma^2 \quad \text{mit } \sigma^2 \dots const. \text{ und } (10)$$

$$\bullet \Sigma \{ \mathcal{S}_{t_i}, \mathcal{S}_{t_j} \} = \Sigma \{ \mathcal{S}_{t_{i+h}}, \mathcal{S}_{t_{j+h}} \} \quad \text{für } i, j, h \in \mathbb{Z} . \quad (11)$$

Zur Beschreibung der Eigenschaften eines kovarianzstationären stochastischen Prozesses werden oft sowohl Darstellungen im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich genutzt. Neben dem (1) Prozess und der (2) Autokovarianzfolge im Zeitbereich werden auch die (3) spektrale Repräsentation des Prozesses und die (4) spektrale Verteilungs- oder Dichtefunktion verwendet. Diese vier Darstellungsformen und ihre Beziehungen untereinander können sehr anschaulich in einer Figur zusammengefasst werden, die wir als “*Magisches Quadrat*” bezeichnen. In Abb. 1 bilden die vier Eckpunkte die vier unterschiedlichen Darstellungsformen des kovarianzstationären stochastischen Prozesses. Links ist der Zeitbereich und rechts der Frequenzbereich angeordnet. Die horizontalen Pfeile deuten den mathematischen Übergang vom Zeitbereich in den Frequenzbereich bzw. die Umkehrung an. Für diesen Übergang verwendet man oft den Begriff *Fouriertransformation*, was symbolisch mit $\mathcal{F}\{.\}$ angedeutet ist. Die Umkehroperation vom Frequenzbereich in den Zeitbereich wird als *inverse Fouriertransformation* bezeichnet und ist symbolisch mit $\mathcal{F}^{-1}\{.\}$ gekennzeichnet. Der Übergang von der oberen in die untere Zeile erfolgt im Zeitbereich durch einen Korrelationsoperator (\star) und im Frequenzbereich gemäß dem Korrelationstheorem durch eine Multiplikation (\bullet). Somit kann auf unterschiedlichen Wegen von einer Darstellungsform auf die andere übergegangen werden, womit die Analogie zum *Magisches Quadrat* sehr nahe liegt.

Mit dem Magischen Quadrat können nun unterschiedliche Arten von Signalen erfasst werden. Die Signale können

- reell, komplex oder vektorwertig,
- kontinuierlich oder diskret, regelmäßig oder nicht regelmäßig,
- periodisch oder nicht periodisch, gefenstert oder unendlich ausgedehnt,
- stochastisch oder deterministisch

sein, um hier nur einige Möglichkeiten aufzuzeigen. Davon unmittelbar abhängig muss eine entsprechende Form der *Fouriertransformation* in den Frequenzbereich definiert werden. Damit lassen sich die weiteren Darstellungsformen

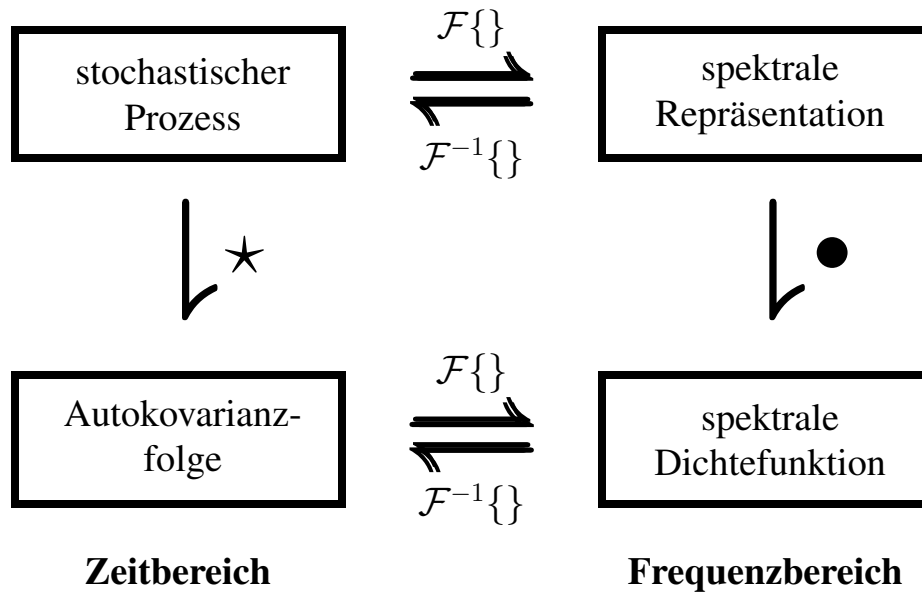


Abb. 1: Magisches Quadrat eines kovarianzstationären Prozesses

und Transformationen herleiten und somit das Magische Quadrat vervollständigen. Aber auch besondere Prozesse wie *autoregressive Prozesse* oder *Moving-Average Prozesse* können als Ausgangssignale vorgegeben werden und deren Darstellungsformen und Übergänge konkretisiert werden. Nicht in allen Fällen können geschlossene analytische Darstellungen für die Übergänge abgeleitet werden. Vielfach können auf unterschiedlichen Pfaden auch unterschiedliche Rechenformeln für ein und dieselbe Darstellungsform hergeleitet werden.

In der folgenden Ausführung werden wir uns speziell auf regelmäßig abgetastete stochastischen Prozesse fokussieren, wie sie bei Messprozessen vielfach vorkommen.

3 Regelmäßig abgetasteter kovarianzstationärer Prozess

Werden bei einem zeitdiskreten stochastischen Prozess $\{\mathcal{S}_{t_i}; i \in \mathbb{Z}\}$ nur regelmäßige Zeitpunkte $t_i = i\Delta t$ in Betracht gezogen, so beschreibt $\{\mathcal{S}_{i\Delta t}; i \in \mathbb{Z}\}$ einen regelmäßig abgetasteten stochastischen Prozess, den wir im Folgenden kurz mit $\{\mathcal{S}_i\}_{\Delta t}$ bezeichnen werden. Die Autokovarianzen $\Sigma\{\mathcal{S}_{i\Delta t}, \mathcal{S}_{j\Delta t}\}$ sind wegen (11) nur vom Abstand $|i - j|$ zwischen den Zeitpunkten abhängig. Die absoluten Zeitpunkte $t_i = i\Delta t$ bzw. $t_j = j\Delta t$ sind belanglos. Die *Autokovari-*

anzfolge

$$\gamma_{|t|}^S = \gamma^S(|i - j|\Delta t) = \Sigma \{S_{t_i}, S_{t_j}\} = E \{ (S_{t_i} - \mu)(S_{t_j} - \mu) \} \quad (12)$$

wird kurz mit $\gamma_{|t|}^S$ bezeichnet, wobei S den zugehörigen regelmäßig abgetasteten, stochastischen Prozess $\{S_t\}_{\Delta t}$ und t die Differenz $t = i - j$ kennzeichnet. Der Absolutbetrag von t weist darauf hin, dass die Kovarianzfolge symmetrisch zum Nullpunkt ist, was aus der Stationaritätsforderung (11) unmittelbar folgt. Weiters sei darauf verwiesen, dass die Kovarianzfolge einer Folge von wahren (festen) Werten entspricht.

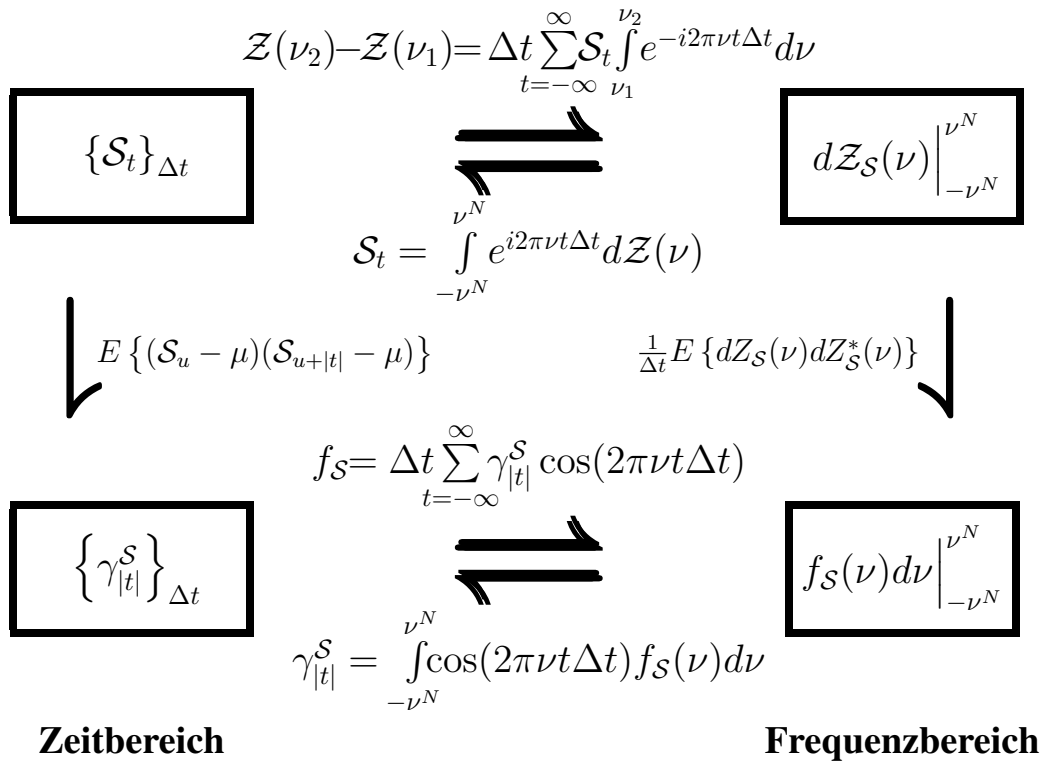


Abb. 2: Magisches Quadrat eines kovarianzstationären, regelmäßig abgetasteten stochastischen Prozesses. Oben links: stochastisches Signal, unten links: Autokovarianzfolge, oben rechts: spektrale Repräsentation des stochastischen Prozesses und unten rechts: spektrale Dichtefunktion (Spektraldichte). Die angeführten Formeln geben den Übergang in Pfeilrichtung wieder.

In Abb. 2 ist das Magische Quadrat für einen regelmäßig abgetasteten stochastischen Prozess dargestellt. Dem stochastischen Prozess und der Kovarianzfolge im Zeitbereich werden wieder die entsprechenden Darstellungsformen

im Frequenzbereich gegenübergestellt. Das Gegenstück zum regelmäßig abgetasteten stochastischen Prozess im Zeitbereich, bildet ein kontinuierlicher, nur stückweise definierter, komplexwertiger stochastischer Prozess $dZ(\nu)$ im Frequenzbereich, welcher periodisch bezüglich des Intervalls $[-\nu^N, \nu^N]$ ist (vgl. Krasbutter *et al.*, 2014b). ν^N kennzeichnet die Nyquist Frequenz, wobei gilt $\nu^N = \frac{1}{2\Delta t}$. Eine *stochastische Fouriertransformation* beschreibt den Übergang vom Zeitbereich in den Frequenzbereich. Die Rücktransformation wird durch ein *stochastisches Fourierintegral* geleistet. Die vierte Darstellungsgröße bildet die spektrale Dichtefunktion (Spektraldichte) $f_S(v)$, die reellwertig und periodisch bezüglich des Intervalls $[-\nu^N, \nu^N]$ ist. Die Transformationen der Kovarianzfolge vom Zeitbereich in den Frequenzbereich erfolgt über eine *diskrete Kosinustransformation*, da die Kovarianzfolge eine symmetrische Folge darstellt. Daraus folgt, dass die spektrale Dichtefunktion ebenfalls eine gerade, kontinuierliche Funktion ist und die Rücktransformation durch eine *kontinuierliche Kosinustransformation* bewerkstelligt werden kann.

4 Autoregressiver stochastischer Prozess

Im Folgenden wird der autoregressive stochastische Prozess der Ordnung p genauer betrachtet, der im Abschnitt 1 in (2) bereits definiert wurde,

$$\mathcal{S}_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j \mathcal{S}_{t-j} + \mathcal{E}_t \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}_t \sim N(0, \sigma_{\mathcal{E}}^2) \quad \text{und} \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Mit Hilfe der Beziehungen im *Magischen Quadrat* kann nun versucht werden eventuell geschlossene Formeln für die vier Darstellungsformen zu entwickeln.

Für den Zeitbereich erfolgt der Übergang vom stochastischen Prozess zur Kovarianzfolge über die Bildung der Kovarianzen. Ausgehend von der Definition des autoregressiven Prozess der Ordnung p aus (2) ergibt sich nach Multiplikation mit \mathcal{S}_{u-t} und Erwartungswertbildung die Kovarianz zwischen den Signalen \mathcal{S}_u und \mathcal{S}_{u-t} mit

$$\begin{aligned} E \{ \mathcal{S}_u \mathcal{S}_{u-t} \} &= \alpha_1 E \{ \mathcal{S}_{u-1} \mathcal{S}_{u-t} \} + \alpha_2 E \{ \mathcal{S}_{u-2} \mathcal{S}_{u-t} \} + \dots \\ &\dots + \alpha_p E \{ \mathcal{S}_{u-p} \mathcal{S}_{u-t} \} + E \{ \mathcal{E}_u \mathcal{S}_{u-t} \} . \end{aligned} \quad (13)$$

Zunächst fällt auf, dass anstelle des zweiten *zentralen* Moments das zweite Moment (Autokorrelation) verwendet wird und somit von $E \{ \mathcal{S}_t \} = 0$ ausgegangen wird. Da für den Prozess $\{ \mathcal{E}_t \}_{\Delta t}$ weißes Rauschen vorausgesetzt wird, folgt

nach Anwendung des Erwartungswertoperators auf (2) unmittelbar $E\{\mathcal{S}_t\} = 0$. Benutzen wir die Definition $\gamma_{|t-j|}^s := E\{\mathcal{S}_{u-j}\mathcal{S}_{u-t}\}$ und beachten $E\{\mathcal{E}_u\mathcal{S}_u\} = \sigma_{\mathcal{E}}^2$ bzw. $E\{\mathcal{E}_u\mathcal{S}_{u-t}\} = 0, t > 0$ so führt (13) unmittelbar auf die *Yule-Walker Gleichungen*

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j \gamma_{|t-j|}^s = \begin{cases} \gamma_0^s - \sigma_{\mathcal{E}}^2 & \text{für } t = 0 \\ \gamma_t^s & \text{für } t > 0 \end{cases}, \quad (14)$$

die den Zusammenhang zwischen den Prozesskoeffizienten $\alpha_j, j = 1, \dots, p$ und der Autokovarianzfolge $\gamma_t^s, t \in \mathbb{N}$ herstellen. In Matrix-Vektorschreibweise geordnet nach den Autoregressionskoeffizienten erhält man

$$\begin{bmatrix} \gamma_0^s \\ \gamma_1^s \\ \gamma_2^s \\ \vdots \\ \gamma_p^s \\ \gamma_{p+1}^s \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1^s & \gamma_2^s & \dots & \gamma_p^s \\ \gamma_0^s & \gamma_1^s & \dots & \gamma_{p-1}^s \\ \gamma_1^s & \gamma_0^s & \dots & \gamma_{p-3}^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p-1}^s & \gamma_{p-2}^s & \dots & \gamma_0^s \\ \gamma_p^s & \gamma_{p-1}^s & \dots & \gamma_1^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \sigma_{\mathcal{E}}^2. \quad (15)$$

Durch Umordnung nach der Autokovarianzfolge ergeben sich die *reorganisierten Yule-Walker Gleichungen*

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & & & & & & \\ \alpha_1 & -1 & & & & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -1 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \alpha_{p-1} & \alpha_{p-2} & \alpha_{p-3} & \dots & -1 & & \\ \alpha_p & \alpha_{p-1} & \alpha_{p-2} & \dots & \alpha_1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{p-2} & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 0 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p & \\ 0 & \alpha_3 & \dots & \alpha_p & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & \alpha_p & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \gamma_0^s \\ \gamma_1^s \\ \gamma_2^s \\ \vdots \\ \gamma_{p-1}^s \\ \gamma_p^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_{\mathcal{E}}^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{p+1}^s &= \alpha_1 \gamma_p^s + \alpha_2 \gamma_{p-1}^s + \dots + \alpha_p \gamma_1^s \\ \gamma_{p+2}^s &= \alpha_1 \gamma_{p+1}^s + \alpha_2 \gamma_p^s + \dots + \alpha_p \gamma_2^s \\ &\vdots \end{aligned}$$

womit die Kovarianzen über die Lösung des Systems direkt aus den Autoregressionskoeffizienten $\alpha_j, j = 1, \dots, p$ ableitbar sind. Zur Darstellung des autoregressiven Prozesses im Frequenzbereich wird der autoregressive Prozess auf einen *Moving-Average Prozess* (MA-Prozess) umgeformt,

$$\mathcal{E}_t = \sum_{j=0}^p \bar{\alpha}_j \mathcal{S}_{t-j} \quad \text{mit} \quad \bar{\alpha}_0 = 1, \bar{\alpha}_j = -\alpha_j, j = 1, \dots, p \quad (17)$$

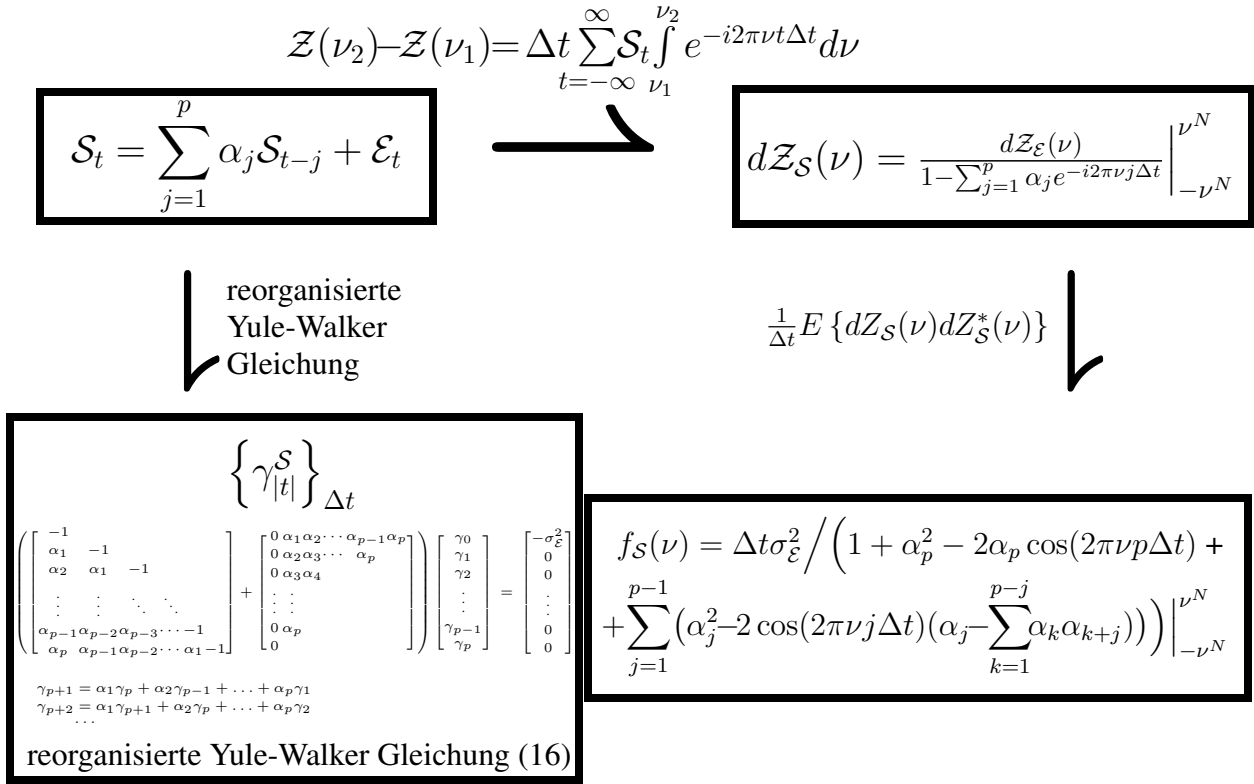


Abb. 3: Magisches Quadrat des autoregressiven Prozesses der Ordnung p

der den Prozess des weißen Rauschens $\{\mathcal{E}_t\}_{\Delta t}$ durch eine Faltung im Zeitbereich beschreibt. Wegen des Faltungstheorems entspricht eine Faltung im Zeitbereich einer elementweisen Multiplikation im Frequenzbereich. Die spektrale Darstellung der Moving-Average-Koeffizienten bildet die Transferfunktion

$$H(\nu) = \sum_{j=0}^p \bar{\alpha}_j e^{-i2\pi\nu j \Delta t}, \quad \nu \in [-\nu^N, \nu^N]. \quad (18)$$

Die spektrale Repräsentation von $d\mathcal{Z}_\mathcal{E}(\nu)$ ergibt sich somit durch die Multiplikation der Transferfunktion mit der spektralen Repräsentation von $d\mathcal{Z}_S(\nu)$

$$d\mathcal{Z}_\mathcal{E}(\nu) = H(\nu) d\mathcal{Z}_S(\nu) \quad (19)$$

(vgl. Krasbutter *et al.*, 2014b). Durch einfache Umformung erhält man mit

$$d\mathcal{Z}_S(\nu) = \frac{d\mathcal{Z}_\mathcal{E}(\nu)}{H(\nu)} = \frac{d\mathcal{Z}_\mathcal{E}(\nu)}{1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j e^{-i2\pi\nu j \Delta t}} \quad (20)$$

die spektrale Repräsentation des autoregressiven Prozesses $\{\mathcal{S}_t\}_{\Delta t}$. Die spektrale Verteilungsfunktion wird nach dem Regeln des Magischen Quadrats durch $\frac{1}{\Delta t} E \{dZ_S(\nu)dZ_S^*(\nu)\}$ gebildet. Diese Operation setzt sich zusammen aus der konjugiert komplexen Multiplikation der inversen Transferfunktion und der konjugiert komplexen Multiplikation der spektralen Verteilungsfunktion des weißen Rauschens, die durch $F_\varepsilon(\nu) = \Delta t \sigma_\varepsilon^2 (\nu + \nu^N)$ über die Fouriertransformation der Autokovarianzfolge des weißen Rauschens ableitbar ist (vgl. Krasbutter *et al.*, 2014b). Die differenzierte Funktion $f_\varepsilon(\nu)$ von $F_\varepsilon(\nu)$ existiert, sodass die spektrale Dichtefunktion des weißen Rauschens existiert und durch $f_\varepsilon = \Delta t \sigma_\varepsilon^2$ gegeben ist. Somit gilt $dF_\varepsilon(\nu) = \Delta t \sigma_\varepsilon^2 d\nu$. Alle vier Darstellungsformen des autoregressiven Prozesses (2) können somit übersichtlich als Magisches Quadrat zusammengestellt werden (Abb. 3).

5 Stochastische Prozesse im Gauß-Markov Modell

In der folgenden Darstellung untersuchen wir nun, wie autoregressive stochastische Prozesse im linearen Gauß-Markov Modell effizient behandelt werden können. Moderne Sensoren aus der Ingenieur- oder Satellitengeodäsie erzeugen umfangreiche Messreihen aus regelmäßig abgetasteten Signalen. Durch Parametrisierung der systematischen Effekte wird ein stationäres Verhalten des Restsignals erreicht, welches durch einen autoregressiven Prozess beschrieben werden kann. Im Gegensatz zu den im Abschnitt 3 beschriebenen zeitlich unbeschränkten stochastischen Prozessen $\{\mathcal{S}_t\}_{\Delta t}, t \in \mathbb{Z}$, sind diese Messreihen jedoch zeitlich beschränkt, z.B. $\{\mathcal{S}_t\}_{\Delta t}, t = 1, \dots, N$. Für sehr lange Messreihen, wie sie z.B. im Zuge der Satellitenmission GOCE auftreten (Zeitreihen mit 100 Millionen Messungen in zirka 50 Segmenten), kann mit digitalen Filtern mit zeitinvarianten Filterkoeffizienten gearbeitet werden (Schuh, 2003b). Es kommen sowohl nichtrekursive (MA-Filter) als auch rekursive Filter (AR- oder ARMA-Filter) zum Einsatz, deren Filterkoeffizienten direkt aus den Residuen nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden (Krasbutter *et al.*, 2014a) oder über die spektrale Dichtefunktion der Residuen abgeleitet werden (Roese-Koerner *et al.*, 2012). Durch den Einsatz von zeitinvarianten Filterkoeffizienten kommt es aber speziell am Beginn (bei nichtkausalen Filtern auch am Ende) zu Problemen, da die Restsignale außerhalb des Gebietes nicht zugänglich sind. Vielfach werden Werte für die Restsignale außerhalb der Messperiode vorgegeben oder auch implizit durch Abschneiden der Filter auf Null gesetzt. Durch diese Annahmen wird der Verlauf des stochastischen Prozesses vor allem zu Beginn wesentlich beeinflusst. Man spricht dann oft vom

“*Warmlaufen*” oder “*Einschwingen*” des Systems. Mathematisch bedeuten diese Annahmen eine Fensterung mit einer Boxcar-Funktion im Zeitbereich. Durch diese Annahmen werden die stochastischen Eigenschaften des Prozesses verändert, und in der Regel geht damit auch die Stationarität verloren. Im Folgenden werden wir einen Weg aufzeigen, der eine exakte Behandlung von zeitlich beschränkten stationären Zeitreihen ermöglicht.

Gehen wir von einer zeitlich beschränkten Messreihe mit N regelmäßig abgetasteten Zeitpunkten aus

$$\mathcal{L}_i = \mathbf{A}_i \boldsymbol{\xi} + \mathcal{S}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{mit} \quad t_i = t_0 + i\Delta t \quad (21)$$

mit t_0 als Startzeitpunkt. Weiterhin gilt die Annahme, dass der stochastische Anteil durch den stationären Prozess

$$\mathcal{S}_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j \mathcal{S}_{t-j} + \mathcal{E}_t \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}_t \sim N(0, \sigma_{\mathcal{E}}^2), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

geprägt ist und die (wahren) Autoregressionskoeffizienten $\alpha_j, j = 1, \dots, p$, oder die (wahre) Autokovarianzfolge $\gamma_t, t \in \mathbb{N}$, bekannt sind¹. Die Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma} \{ \mathcal{S} \} = \begin{bmatrix} \gamma_0^s & \gamma_1^s & \gamma_2^s & \cdots & \gamma_{N-1}^s \\ \gamma_1^s & \gamma_0^s & \gamma_1^s & \cdots & \gamma_{N-2}^s \\ \gamma_2^s & \gamma_1^s & \gamma_0^s & \cdots & \gamma_{N-2}^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N-1}^s & \gamma_{N-3}^s & \gamma_{N-3}^s & \cdots & \gamma_0^s \end{bmatrix} \quad (22)$$

für die endliche Anzahl von N Beobachtungen \mathcal{S}_i kann somit erstellt werden, ohne Annahmen über Informationen außerhalb des Zeitfensters definieren zu müssen. Wegen der regelmäßigen Abtastung ergeben sich die einzelnen Zeilen der Matrix durch verschobene Kopien der Vorgängerzeilen. Die Matrix weist somit eine *Toeplitz-Struktur* auf und ermöglicht damit den Einsatz von effizienten Algorithmen (Levinson, 1947; Schuh, 2003a).

Zunächst versuchen wir die korrelierten Beobachtungen \mathcal{L} durch eine lineare Transformation mit einer regulären Matrix \mathbf{H} zu dekorrelieren

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathbf{H} \mathcal{L} \quad \text{wobei gilt} \quad \boldsymbol{\Sigma} \{ \bar{\mathcal{L}} \} = \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{H}^T \stackrel{!}{=} \mathbf{I}, \quad (23)$$

¹Falls davon nur geschätzte Werte aus einer Realisierung vorliegen (siehe z.B. Krasbutter *et al.* (2014a) zur Schätzung der Filterkoeffizienten), so ist deren Genauigkeit durch die entsprechende Varianz/Kovarianz zusätzlich zu berücksichtigen, womit die wahren Werte α_j ebenfalls in Zufallsvariable \mathcal{A}_j übergehen.

sodass die transformierten Beobachtungen $\bar{\mathcal{L}}$ unkorreliert sind, womit die Kovarianzmatrix der transformierten (dekorrelierten) Beobachtungen $\bar{\mathcal{L}}$ durch die Einheitsmatrix I repräsentiert wird. Beachtet man, dass die symmetrische Matrix Σ durch eine Cholesky-Zerlegung

$$\Sigma = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad (24)$$

in das Produkt zweier Dreiecksmatrizen zerlegt werden kann, wobei die untere Dreiecksmatrix \mathbf{R}^T die transponierte der oberen Dreiecksmatrix darstellt, so ergibt sich aus

$$\mathbf{H}\Sigma\mathbf{H}^T = \mathbf{H}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{H}^T \stackrel{!}{=} \mathbf{I} \quad (25)$$

unmittelbar, dass die Transformationsmatrix $\mathbf{H} = (\mathbf{R}^T)^{-1}$ die Dekorrelation leistet. Die Berechnung der dekorrelierten Beobachtungen $\bar{\mathcal{L}}$ aus der linearen Transformation (23) kann durch die Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{R}^T \bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \quad (26)$$

mit der unteren Dreiecksmatrix \mathbf{R}^T numerisch effizient durch Vorwärtseinsetzen gelöst werden. Die Parameterschätzung erfolgt aus dem Ersatzproblem

$$\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \quad \text{mit} \quad \Sigma\{\boldsymbol{\mathcal{E}}\} = \mathbf{I} \quad (27)$$

und $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{R}^T)^{-1}\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{R}^T\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. Die gesamten Beobachtungsgleichungen werden somit einheitlich durch Vorwärtseinsetzen transformiert. Diese Operation entspricht einer kausalen rekursiven Filterung der Beobachtungsgleichungen zur Schaffung eines Ersatzproblems (27) mit unkorrelierten, gleich genauen Beobachtungen.

In Abb. 4 wird aufgezeigt, dass die Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix Σ auf unterschiedliche Art bewerkstelligt werden kann. Neben der Standardform $\Sigma = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ kann auch die Form $\Sigma = \mathbf{R}\mathbf{R}^T$ eingesetzt werden. Der direkte Zusammenhang zwischen der Cholesky-reduzierten Matrix und der inversen Matrix Σ^{-1} (Hanson, 1978; Auzinger and Schuh, 1998) eröffnet auch die Möglichkeit die Zerlegungen $\Sigma^{-1} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ bzw. $\Sigma^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T$ ohne explizite Berechnung von Σ^{-1} über Ränderungsverfahren durchzuführen. Durch diese unterschiedlichen Zerlegungen können sowohl rekursive als auch nichtrekursive, kausale und antikausale Filter erzeugt werden. Dabei lassen sich dünnbesetzte Strukturen auf Grund finiter Kovarianzmatrizen (Sansò and Schuh, 1987; Koch

Zerlegung	Berechnung von \mathbf{R}	Dekorrelation	numerische Berechnung
$\Sigma = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$	Cholesky Vorwärtsreduktion	$\mathbf{H} = (\mathbf{R}^T)^{-1}$	$\bar{\mathcal{L}} = (\mathbf{R}^T)^{-1} \mathcal{L} \iff \mathbf{R}^T \bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$ $\begin{bmatrix} * & & \\ * & \mathbf{R}^T & \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \end{bmatrix}$ kausaler rekursiver Filter
$\Sigma^{-1} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T$	rekursives Vorwärtsrändern	$\mathbf{H} = \mathbf{R}^T$	$\bar{\mathcal{L}} = \mathbf{R}^T \mathcal{L}$ $\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & & \\ * & \mathbf{R}^T & \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L} \end{bmatrix}$ kausaler nichtrekursiver Filter
$\Sigma = \mathbf{R} \mathbf{R}^T$	Cholesky Rückwärtsreduktion	$\mathbf{H} = \mathbf{R}^{-1}$	$\bar{\mathcal{L}} = \mathbf{R}^{-1} \mathcal{L} \iff \mathbf{R} \bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$ $\begin{bmatrix} * & * & * \\ & \mathbf{R} & * \\ & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \end{bmatrix}$ antikausaler rekursiver Filter
$\Sigma^{-1} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$	rekursives Rückwärtsrändern	$\mathbf{H} = \mathbf{R}$	$\bar{\mathcal{L}} = \mathbf{R} \mathcal{L}$ $\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ & \mathbf{R} & * \\ & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L} \end{bmatrix}$ antikausaler nichtrekursiver Filter

Abb. 4: Dekorrelation über Cholesky-Zerlegung

et al., 2010) direkt in finite rekursive Filter transformieren. Andererseits kann man den Kovarianzmatrizen von AR(p)-Prozessen direkt finite nichtrekursive Filter (Moving-Average Filter) zuordnen (siehe Abschnitt 6). Nutzt man ferner die Toeplitz-Struktur der Kovarianzmatrix von regelmäßig abgetasteten stochastischen Prozessen, so können mit Hilfe der Levinson-Rekursion (Levinson, 1947) sehr effiziente Algorithmen zur Cholesky-Zerlegung erstellt werden, die sich durch einen Speicherbedarf von $\mathcal{O}(n)$ und einer Rechenzeit von $\mathcal{O}(n^2)$ auszeichnen². Es sei speziell darauf verwiesen, dass die Cholesky-Zerlegung einer

²So benötigt man zum Beispiel zur Dekorrelation von 100.000 Werten auf einem Notebook (Intel(R) Core(TM) i7-3520M CPU @ 2.90Ghz) ungefähr 30 sec, um hier einen Anhaltspunkt zu bieten.

Toeplitz-Matrix im Allgemeinen zu keiner Toeplitz-Struktur führt. Für große Systeme nähert sich \mathbf{R} einer Toeplitz-Struktur an, aber speziell am Beginn und Ende entstehen Abweichungen. Diese Veränderungen bewirken ein zeitlich veränderliches Filterverhalten (zeitvariante Filter). Damit wird aber exakt die Toeplitz-Struktur der Kovarianzmatrix (22) des kovarianzstationären stochastischen Prozesses beginnend mit der ersten Messung und endend mit der letzten Messung modelliert. Durch diesen Ansatz werden somit die Einschwingeffekte der zeitinvarianten Filter vermieden. Damit können alle Messungen genutzt werden und es sind keine Annahmen über Start- oder Endwerte zu treffen. Dies wollen wir an Hand eines AR(1)-Prozesses nun im folgenden Abschnitt demonstrieren.

6 Autoregressiver Prozess erster Ordnung (AR(1)-Prozess)

Der autoregressive Prozess erster Ordnung (AR(1)-Prozess) spielt eine wichtige Rolle bei unterschiedlichsten Anwendungen und wird gerne auch im Zusammenhang mit der Kalman-Filterung als Formfilter eingesetzt. Die Autokovarianzfolge $\gamma_{|t|}^{\mathcal{S}}$ des AR(1)-Prozesses kann direkt aus dem Magischen Quadrat für AR(p)-Prozesse (Abb. 3) aus den reorganisierten Yule-Walker Gleichungen (16) für $p = 1$ abgeleitet werden,

$$\gamma_t^{\mathcal{S}} = \sigma_{\varepsilon}^2 \frac{\alpha^k}{1 - \alpha^2}, \quad t = 0, \dots, N - 1, \quad (28)$$

wobei der Prozesskoeffizient α_1 kurz mit α bezeichnet wird. Somit ergibt sich die Kovarianzmatrix in der Form

$$\Sigma = \Sigma\{\mathcal{S}\} = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{1 - \alpha^2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \alpha \\ \text{sym} & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Die Zerlegung $\Sigma = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ führt auf die Transformationsmatrix

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}^T = \sigma_{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \alpha & \sqrt{1 - \alpha^2} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} \sqrt{1 - \alpha^2} & \dots & \sqrt{1 - \alpha^2} & \end{bmatrix} \quad (30)$$

und die Beziehung $\bar{\mathcal{L}} = (\mathbf{R}^T)^{-1} \mathcal{L}$ bzw. $\mathbf{R}^T \bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$ widerspiegelt somit einen kausalen rekursiven Filter

$$\bar{\mathcal{L}}_1 = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\sigma_{\mathcal{E}}} \mathcal{L}_1 \quad (31)$$

$$\bar{\mathcal{L}}_i = \frac{\mathcal{L}_i}{\sigma_{\mathcal{E}}} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha^{i-k} \bar{\bar{\mathcal{L}}}_k \quad \text{mit} \quad \bar{\bar{\mathcal{L}}}_1 = \frac{\bar{\mathcal{L}}_1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, \quad \bar{\bar{\mathcal{L}}}_k = \bar{\mathcal{L}}_k, k > 1 \quad (32)$$

mit variabler Filterlänge. Die Filterkoeffizienten schrumpfen in der Größe mit zunehmender Filterlänge bis α^{i-1} , da $\alpha = \frac{\gamma_1^S}{\gamma_0^S} < 1$. Es sei speziell darauf hingewiesen, dass es auch erlaubt ist, kleine Filterkoeffizienten zu Null zu setzen, ohne dass die positive Definitheit der dann nur approximierten Kovarianzfolge verloren geht.

Betrachtet man hingegen die Zerlegung $\Sigma^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T$ so ergibt sich die Transformationsmatrix

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}^T = \frac{1}{\sigma_{\mathcal{E}}} \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \alpha^2} & & & & & \\ -\alpha & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

und durch $\bar{\mathcal{L}} = \mathbf{R}^T \mathcal{L}$ ein finiter kausaler nichtrekursiver Filter der Form

$$\bar{\mathcal{L}}_1 = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\sigma_{\mathcal{E}}} \mathcal{L}_1 \quad (34)$$

$$\bar{\mathcal{L}}_i = \frac{1}{\sigma_{\mathcal{E}}} (\mathcal{L}_i - \alpha \mathcal{L}_{i-1}) \quad \text{für} \quad t > 1 \quad (35)$$

Somit kann das aus dem AR(1)-Prozess resultierende korrelierte Signal durch einen kausalen Moving-Average Filter der Filterlänge 1

$$\bar{\mathcal{L}}_i = \sum_{k=0}^1 c_k \mathcal{L}_{i-k} \quad \text{mit} \quad \{c_k\} = \left\{ \frac{1}{\sigma_{\mathcal{E}}}, \frac{-\alpha}{\sigma_{\mathcal{E}}} \right\} \quad \text{für} \quad i > 1 \quad (36)$$

dekorreliert werden. Der Wert für $i = 1$ (erster Wert) ist durch (34) zu berechnen.

7 Zusammenfassung

Korrelierte Messungen in Zeitreihen führen zumeist auf große Kovarianzmatrizen. In diesem Artikel diskutieren wir zunächst methodische Ansätze um die

zugrunde liegenden stochastischen Prozesse zu beschreiben, bevor wir dann konkret eine Vielfalt von Dekorrelationsstrategien aufzeigen und deren Eigenschaften diskutieren. Spezielles Augenmerk wird dabei auf die Dekorrelation endlicher Zeitreihen gelegt und besonders das Filterverhalten am Beginn und Ende analysiert. Durch den Einsatz von zeitvariablen Filtern resultierend aus der Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix können dabei Einschwingeffekte vollkommen unterbunden werden. Dies wird an Hand eines AR(1)-Prozesses veranschaulicht.

Literatur

- Auzinger, T. und Schuh, W.-D. (1998). High-degree spherical harmonic analysis combining gridded and random distributed data sets. *Phys. Chem. Earth*, 23, 19–23.
- Brockwell, P. J. und Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer, Berlin. ISBN 1-4419-0319-8.
- Hanson, R. (1978). A posteriori error propagation. In *Proceedings of the “2nd International Symposium on Problems Related to the Redefinition of North American Geodetic Networks”*, 427–445. Arlington, Virginia.
- Koch, K., Kuhlmann, H., und Schuh, W.-D. (2010). Approximating covariance matrices estimated in multivariate models by estimated auto- and cross-covariances. *J. Geodesy*, 84, 383–397.
- Krasbutter, I., Brockmann, J., Kargoll, B., und Schuh, W.-D. (2014a). Adjustment of digital filters for decorrelation of GOCE SGG data. In F. Flechtner, N. Sneeuw, und W.-D. Schuh, editors, *Observation of the System Earth from Space - CHAMP, GRACE, GOCE and future missions*, GEOTECHNOLOGIEN Science Report No. 20 (Advanced Technologies in Earth Sciences), Kap. 14, 109–114. Springer. ISBN-13: 978-3642321344.
- Krasbutter, I., Kargoll, B., and Schuh, W.-D. (2014b). Magic Square of real spectral and time series analysis with an application to moving average processes. In H. Kutterer, F. Seitz, H. Alkhatib, and M. Schmidt, editors, *Proceedings of the 1st international Workshop on the Quality of Geodetic Observations and Monitoring Systems (QuGOMS’11), IAG Symposia*, 141,(accepted). Springer, Berlin - Heidelberg, Lecture Notes in Earth Sciences.
- Levinson, N. (1947). The wiener rms (root mean square) error criterion in filter design and prediction. *Journal of Mathematics & Physics*, 25, 261–278.

- Roese-Koerner, L., Krasbutter, I., und Schuh, W.-D. (2012). A constrained quadratic programming technique for data-adaptive design of decorrelation filters. In N. Sneeuw, P. Novák, M. Crespi, and F. Sansò, editors, *VII. Hotine-Marussi-Symposium, IAG Symposia*, 137, 165–170. Springer, Berlin - Heidelberg, Lecture Notes in Earth Sciences.
- Sansò, F. und Schuh, W.-D. (1987). Finite covariance functions. *Bulletin Géodésique*, 61, 331–347.
- Schuh, W.-D. (2003a). *Numerische Verfahren zur geodätischen Optimierung*. Skriptum. Theoretische Geodäsie, Universität Bonn.
- Schuh, W.-D. (2003b). The processing of band-limited measurements; filtering techniques in the least squares context and in the presence of data gaps. *Space Science Reviews*, 108(1-2), 67–78.