Über die Ausgleichung bei „Überschüssigen Messungen und zufälligen Beobachtungen“ — auf den Spuren von Friedrich Robert Helmert

Wolf-Dieter Schuh

Auch 100 Jahre nach dem Tod Helmerts wirken viele seiner Ideen in der Geodäsie aber auch speziell in der Ausgleichungsrechnung weiter, sodass ständig in Vorlesungen und Vorträgen auf seine Erkenntnisse Bezug genommen wird. *Gauß-Helmert Modell*, *Helmertsche Blockzerlegungsverfahren*, *Varianzkomponentenschätzung nach Helmert* sind hier nur einige Begriffe die direkt mit seinem Namen verbunden sind und für jeden Geodäten ein Begriff sind. Aber auch nicht direkt mit seinem Namen verbundene Entdeckungen Helmerts bestimmen die geodätischen Praxis. Umfangreiche Untersuchungen über den Rückschluss auf Beobachtungsunsicherheiten (wahre Fehler) aus den Ergebnissen einer Ausgleichungen wurde von Helmert durchgeführt und prägten viele seiner Veröffentlichungen. Oft nur beiläufige Bemerkungen zu anderen Artikeln beinhalten oft revolutionäre Gedanken. So führt er in der Rubrik der *Kleineren Mittheilungen* in der *Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch)* im Jahre 1875 aus, dass die Quadratsumme der wahren Beobachtungsfehler einer Gamma-Verteilung folgt, wenn die wahren Beobachtungsfehler der Gauß(Normal)-Verteilung gehorchen (Helmert, 1875a). Erst in der oft zitierten Publikation (Helmert, 1876a) erfolgt dann eine ausführlich Darstellung dieser Zusammenhänge und eine Erweiterung auf die Quadratsumme der Verbesserungen nach einem direkten Ausgleich. Eine Erkenntnis, die heute in jedem Globaltest zur Überprüfung der Modellannahmen Anwendung findet.

Beim Studium des Lebenslaufes von Helmert (siehe z.B. Eggert, 1917; Krüger, 1917; Wolf, 1967, 1993) und der sehr umfangreiche Publikationsliste von Helmert (Höpfner, 2013) kann man schon erahnen, dass es sehr schwer ist eine umfassende Würdigung der Arbeiten von Helmert anzustreben. Meine Aufgabe ist es besonders das Wirken Helmerts bezüglich der Ausgleichungsrechnung aufzuzeigen. Aber auch hier kann ich in diesem Rahmen nur punktuell auf bestimmte Themengruppen eingehen und eine entsprechende Einordnung versuchen.

Wenn man die großen Lehrbücher aber auch den Werdegang von Helmert vor Augen hat, ist man geneigt, sein Schaffen in unterschiedliche Perioden und Schwerpunkte zu gliedern. Bei genauerem Studium seiner Publikationen ist aber sehr auffallend, dass er immer wieder neue Schwerpunkte in der Ausgleichungsrechnung gelegt hat. Vielfach aus praktischen Anwendungen getrieben, wurden von ihm ständig die Theorie der Ausgleichungsrechnung weiterentwickelt[1]. Bemerkenswert erscheint mir, dass Helmert auch immer der rechnentechnische Umsetzung besonderes Augenmerk widmete. Vielleicht zeigt eine Passage aus seiner Antrittsrede anlässlich der Aufnahme als ordentliches Mitglied in die *Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* die persönliche Sicht von Helmert zu den Herausforderungen der Ausgleichungsrechnung besonders auf:

> „Jeder, der nur ein wenig den Inhalt der Geodäsie kennt, wird die vielfältige Anwendung der Ausgleichungsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler gerade in diesem Gebiet des Wissens und Könnens auffallen. [...] Dabei zeigt sich,

[1] siehe Appendix A

> dass selbst rein mathematisch recht einfache Aufgaben der Geodäsie durch die Genauigkeitsfragen, die bei der Anwendung auf Messungsergebnisse hinzutreten, an theoretischem Interesse gewinnen.
> [. . .]
> Die grosse Aufgabe der rechnerischen Behandlung [. . .] ist mit einem ganz strengen Verfahren, das jede einzelne Messung voll ausnutzen will, nicht durchzukommen; ebenso müssen kleine theoretische Ungenauigkeiten zugelassen werden, falls nachgewiesen wird, dass sie das Ergebniss nicht entstellen.
> [. . .]
> Wenn nun die rechnerischen Vereinfachungen vielleicht den Nutzeffect der Beobachtungen nicht unerheblich herabdrückt, so steht diesem Nachtheil der Vortheil gegenüber, in absehbarer Zeit umfassende Ergebnisse für die Figur der Erde erzielen zu können."
>
> (Helmert, 1900, p. 699-700)

Viele dieser Gedanken haben auch heute Aktualität. Die Bedeutung der Genauigkeitsfragen tritt speziell bei der Kombination unterschiedlichster Messungen und Modelle bei integrierten Systemen in den Vordergrund.

In der Zusammenarbeit der Geodäten mit anderen Ingenieur- oder Geowissenschaften werden heute heterogene Datenquellen mit unterschiedlicher zeitlicher und räumlicher Auflösung in komplexe Erdsystemmodelle integriert um ein besseres Verständnis für die Prozesse im 'System Erde' zu entwickeln. Ein wesentlicher Aspekte neben den Beobachtungswerten selbst, spielen dabei die Unsicherheitsaussagen in Form von Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder Varianz/Kovarianzinformationen. Ohne das Vorliegen dieser Informationen ist die Verknüpfung aller Informationen kaum objektivierbar. Die durch die Ausgleichungsrechnung im Umgang mit Messunsicherheiten geschulten Geodäten können hier eine zentrale Rolle einnehmen.

Eine Sorge und Herausforderung die Helmert immer wieder - so auch in der oben zitierten Antrittsrede - anspricht, bildet die rechentechnische Umsetzung der Theorie bei praktischen Aufgabenstellungen. Natürlich könnte man meinen, dass diese Aufgabe durch die Möglichkeiten der modernen Rechenanlagen heute nachrangig ist. Die rasante Entwicklung der Rechenanlagen steht aber eine ebenso rasante Entwicklung der Messtechnik gegenüber. Moderne Sensoren liefern extrem viele Messungen innerhalb kürzester Zeit. Dedizierte Satellitenmissionen vermessen das Erdschwerefeld aber auch Oberflächenänderungen sowohl über dem Ozean als auch über Land mit einer hohen zeitlichen und räumlichen Auflösung. Aus der Satellitenmission GOCE resultieren beispielsweise 400 Millionen Messungen (400.000.000), die eine räumliche Auflösung des Schwerefeldes mit 80 km Gitterabstand erlauben. Somit sind hunderttausend Parameter gleichzeitig zu lösen. Man erkennt, dass bei diesen Größenordnungen auch moderne Hochleistungsrechner bald an ihre Grenzen stoßen. Somit haben die bei Helmert schon sehr ausgeprägten Ansätze zur rechenökonomischen Umsetzung der Aufgabenstellungen auch heute nicht an Bedeutung verloren. Das Helmertsche Blockzerlegungsverfahren (Helmert, 1907, Kap.8,§6), die Überführung auf dekorrelierte Messungen (*„äquivalente Beobachtungen"* — wie sie Helmert bezeichnete (Helmert, 1872, §21)) mit anschließender Addition von Normalgleichungen gehören heute zum täglichen Brot um die Berechnungen rationell zu gestalten. Der pragmatische Weg der „Rechnungen zu vereinfachen" - wie ihn Helmert erwähnt - wird zwar auch heute vielfach gewählt. Allerdings bieten moderne Verfahren der Numerischen Mathematik und des Hochleistungsrechnen enormes Potential auch aufwendige Modelle rechentechnisch streng zu bewältigen.

Da es innerhalb dieses Aufsatzes unmöglich ist, dass umfangreiche Wirken von Helmert in der Ausgleichungsrechnung vollständig zu durchleuchten will ich im Folgenden drei Schwerpunkte setzen. Für die Benennung dieser Schwerpunkte wähle ich speziell die Überschriften nach Helmerts Ausgleichungsbuch (Helmert, 1872). Zunächst werde ich im ersten Abschnitt eine Übersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben nach Helmert geben. Dann werde ich auf gleichwertige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen ein gehen und im Abschnitt 3 dann Maße für die Genauigkeit von Beobachtungsreihen diskutieren. Eine Zusammenfassung steht dann am Ende des Artikels. Ich habe versucht ein möglichst vollständiges Literaturverzeichnis der Arbeiten von Helmert im Bereich der Ausgleichungsrechnung und Statistik anzufertigen. Wo speziell auch die Verlinkungen zu im Internet verfügbaren Quellen zu finden sind.

1. Übersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben

Viele grundlegenden Überlegungen bezüglich der Ausgleichungsrechnung legte Helmert bereits in seinem ersten Buch (Helmert, 1872) nieder, welches im Jahre 1907 wesentlich erweitert und in zweiter Auflage gedruckt wurde (Helmert, 1907). Die dritte Auflagen aus dem Jahre 1924 ist ein Nachdruck der zweiten Auflage mit Berichtigungen und ergänzt um ein Berechnungsbeispiel von (Helmert, 1924). Krüger (1917) führte dazu in einer Anzeige zu Helmerts Tod in den *Astronomischen Nachrichten* folgendes aus: „dieses ... erste größere Werk *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate* ... ist durch seinen strengen Aufbau und die Vielseitigkeiten seiner Anwendung den früheren Schriften über diesen Gegenstand überlegen“. Helmert gibt dabei in §5 eine Klassifikation der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben. In der ersten Auflage des Buches (Helmert, 1872) untergliedert er die Verfahren in die Ausgleichung

I der direkten Beobachtungen,
II der vermittelnden Beobachtungen,
III der bedingten Beobachtungen,
IV der vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen und in die
V Allgemeine Aufgabe.

In der zweiten Auflage des Buches (Helmert, 1907) benennt Helmert den Fall V dann an Stelle von „*Allgemeine Aufgabe*“ als „*Bedingte Beobachtungen mit Unbekannten*“. Neben dem an Helmert angelehnte Bezeichnung „*Allgemeinfall der Ausgleichungsrechnung*“ (Meissl, 1976) wird dieses Modell heute in der Literatur oft auch als „*Gemischtes Modell*“ (Koch, 1997) und in Würdigung der Verdienste von Helmert als „*Gauß-Helmert Modell*“ (Wolf, 1978) bezeichnet.

Diese von Helmert durchgeführte Strukturierung der Ausgleichungsmodelle werden auch heute vielfach verwendet. Neue Namen wie *Total Least Squares* (Golub und van Loan, 1980) oder „*Error-in-Variables Model*“ (Kendall, 1951) sind zwar vielfach in Mode gekommen, aber nach Ansicht des Autors bringen diese Modelle keine über die „*Allgemeine Aufgabe*“ hinausgehenden Erkenntnisse. Die Unterschied zwischen „*Kalman-Filter*“ und sequentieller „*Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen*“ ist ebenfalls nicht einfach zu begründen. Vielfach findet bei diesen Modellen eine bestimmte Spezialisierung statt, die rechenökonomisch genutzt werden kann. Somit bilden sie oftmals nur einen Sonderfall der allgemeinen Problemstellung. Speziell will ich in diesem Zusammenhang aufzeigen, wie neue Erweiterungen des Gauß-Helmert Modell immer wieder diskutiert werden, die eigentlich in der Formulierung von (Helmert, 1872, §5 bzw. §26) schon enthalten waren.

Helmert (1872, §5) formuliert die *Allgemeine Aufgabe* — hier in Matrizenschreibweise — in folgender Form:

$$\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \qquad \text{mit} \qquad \arg\min_{v,x}\left(\boldsymbol{v}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{v}\right) \tag{1}$$

$\boldsymbol{B}$	...	Bedingungengleichungen	$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{p\times n}$
$\boldsymbol{A}$	...	Designmatrix	$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{p\times m}$
$\boldsymbol{\ell}$	...	Beobachtungen	$\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{R}^{n}$
$\boldsymbol{v}$	...	Verbesserungen	$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^{n}$
$\boldsymbol{x}$	...	Parameter	$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^{m}$
$\boldsymbol{b}$	...	Konstantenvektor	$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{p}$

Helmert stellt folgende Forderung an die Anzahl der Beobachtungen n, der Bedingungen p und der Parameter m

$$n > p - m > 0\,. \tag{2}$$

In den letzten Jahren wird vielfach die Forderung, dass die Bedingungsmatrix $\boldsymbol{B}$ vollen Spaltenrang haben muss

$$\text{Rang}(\boldsymbol{B}) \stackrel{!}{=} p\,, \tag{3}$$

zusätzlich vorausgesetzt. Diese Forderung ist bei Helmert nicht vorhanden und bildet somit eine Einschränkung der *Allgemeinen Aufgabe* (Gauß-Helmert Modell). (Wolf, 1968, p. 105) bezeichnet diese Form als *„Quasivermittelnde Ausgleichung“* und zeigt auch auf, dass die neue Forderung dazu benutzt werden kann, um die Beobachtungen zu transformieren und somit die Berechnung auf einen Vermittelnden Ausgleich mit korrelierten Beobachtungen rückgeführt werden kann (Meissl, 1976). Durch die zusätzliche Forderung (3) wird gewährleistet, dass die Kovarianzmatrix der korrelierten Beobachtungen regulär ist und somit eine eindeutige Inverse existiert.

Die heute oft verwendete Form des *„Gauß-Helmert Modells mit zusätzlichen Restriktion“*[2] ist somit eigentlich in der Formulierung von Helmert in der *„Allgemeinen Aufgabe“* schon enthalten und bedürfte somit keines speziellen Augenmerkes.

2. Gleichwertige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen

Spezielles Augenmerk wendete Helmert auf um Beziehungen zwischen den verschiedenen Modellen der Ausgleichungsrechnung herbeizuführend. Neben den theoretischen Erkenntnissen sind diese Modellübergänge speziell für die rationelle Berechnung von Bedeutung. Geschickt gelingt es Helmert durch Einführung der *„äquivalenten Beobachtungen“* diese Übergänge auch

[2] Restriktionen bedeuten Bedingungen zwischen der Parametern die streng erfüllt sein müssen

rechentechnisch effizient umzusetzen. Vielfach verwendet er anstelle der aus den Normalgleichungen $\boldsymbol{N}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n}$ festgelegten Parameter $\boldsymbol{x}$ unkorrelierte Ersatzparameter die er als *äquivalenten Beobachtungen* bezeichnet. Er erkennt, dass die durch das Gaußsche Eliminationsverfahren[3] auf Stufenform gebrachten Normalgleichungen

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{12} & n_{22} & n_{23} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Gaußsches} \\ \text{Eliminations-} \\ \text{verfahren}}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{n_{12}}{n_{11}} & \frac{n_{13}}{n_{11}} \\ & 1 & \frac{\bar{n}_{23}}{\bar{n}_{22}} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{n_{11}} \\ \frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_{22}} \\ \frac{\bar{\bar{n}}_3}{\bar{\bar{n}}_{33}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

den unmittelbar Zugang auf die Ersatzparameter $\boldsymbol{z}$ ermöglicht, die voneinander unabhängig (unkorreliert) sind. Die Gewichte der Ersatzparameter $\boldsymbol{z}$ lassen sich dabei unmittelbar aus der Gaußschen Elimination mit $[n_{11}, \bar{n}_{22}, \bar{\bar{n}}_{33}]$ ablesen (Helmert, 1872, p. 166).

Diese Erkenntnis ermöglicht ihm, sowohl korrelierte Parameter als auch korrelierte Beobachtungen zu dekorrelieren. Durch die neuen Sensortechnologien sind heutzutage korrelierte Beobachtungsreihen gang und gäbe. Die Dekorrelation von langen Beobachtungsreihen mit tausenden bis hunderttausenden Messungen, aber auch die Echtzeitauswertung von Sensordaten für Navigationszwecke stellen, auch für die heute benutzten Rechenanlagen große Herausforderungen. Effiziente und maßgeschneiderte Dekorrelationsstrategien stehen daher im Zentrum der aktuellen Forschung. Durch die Entwicklung von speziellen Filtertechniken bzw. die Beschreibung der Zeitreihen durch Stochastische Prozesse wird versucht die Komplexität der Berechnungen zu verringern und effiziente aber auch echtzeitfähige Lösungen zu erarbeiten. Hier kommen einem wieder unmittelbar die Worte von Helmerts Antrittsrede in den Sinn

> „Hier ist mit einem ganz strengen Verfahren, das jede einzelne Messung voll ausnutzen will, nicht durchzukommen; ebenso müssen kleine theoretische Ungenauigkeiten zugelassen werden, falls nachgewiesen wird, dass sie das Ergebniss nicht entstellen.“
>
> (Helmert, 1900, p. 700)

Ein enger Zusammenhang ist zwischen der Dekorrelation von Beobachtungen und der vollständigen Dekorrelation oder Datenhomogenisierung zu sehen, wo unabhängige Beobachtungen mit gleichen Gewichten (meist Eins) zum Einsatz kommen. Es ist zunächst ein Leichtes Beobachtungsgleichungen für unkorrelierte Messungen mit ungleichen Gewichten so zu modifizieren, dass gleiche Gewichte verwendet werden können. Schon (Helmert, 1872, p. 60) zeigt auf, dass die Multiplikation der gesamten Beobachtungsgleichung mit der Wurzel aus dem Gewicht diese Aufgabe erfüllt und zeichnet damit einen Weg vor, der erst im Jahre 1924 unter dem Namen Cholesky-Verfahren[4] Eingang in die Standardverfahren der Numerischen Mathematik gefunden hat.

[3] Verwendete Notation zum Gaußsches Eliminationsverfahren:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_1 \\ n_{12} & n_{22} & n_{23} & n_2 \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} & n_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_1 \\ & \bar{n}_{22} & \bar{n}_{23} & \bar{n}_2 \\ & \bar{n}_{23} & \bar{n}_{33} & \bar{n}_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_1 \\ & \bar{n}_{22} & \bar{n}_{23} & \bar{n}_2 \\ & & \bar{\bar{n}}_{33} & \bar{\bar{n}}_3 \end{array}\right]$$

[4] Die Entstehungsgeschichte des Cholesky Verfahrens ist speziell auch aus geodätischer Sicht sehr interessant. Commandant André-Luise Cholesky (1875-1918) war Vermessungsoffizier im französischen Militärdienst. Im Jah-

Moderne Messsensoren erlauben eine automatisierte Beobachtung von physikalischen Prozessen mit immer höherer Auflösung. Dies betrifft sowohl die zeitliche Auflösung als auch die zu erreichende Genauigkeit. Da diese Genauigkeitsforderungen zumeist nicht über den gesamten Messbereich erreichbar sind, werden die Sensoren auf die jeweilige Messsituationen optimiert. Begrenzte Messbereiche (Messbänder) im Orts- aber auch im Frequenzbereich werden verwendet um bestmögliche Ergebnisse für die spezielle Aufgabenstellung zu erreichen. Dies führt zu Messsignalen mit hoch-korreliertem Rauschanteil. Ohne eine adäquate Modellierung der Korrelationen in der Auswertung kann die erzielte Genauigkeit im Messbandbereich nicht auf die Modellparameter übertragen werden. In der Modellierung dieser Stochastischen Prozesse spielt die Dekorrelation der Beobachtungsreihen, wie sie Helmert/Cholesky aufzeigt hat, eine zentrale Rolle (Schuh et al., 2014; Schuh, 2016).

3. Maße für die Genauigkeit von Beobachtungsreihen

Die „*Genauigkeitsfragen, die bei der Anwendung auf Messungsergebnisse hinzutreten*“ (Helmert, 1900, p. 699) weckten bei Helmert immer besonderes Interesse. Schon in seiner Dissertationsschrift (Helmert, 1868a,b) standen Genauigkeitsüberlegungen im Vordergrund um die Vermessung möglichst „rationell“ zu gestalten. Nach den Publikationen zu schließen, hat sich Helmert in den Jahren um 1875 und 1977 - also nach der Herausgabe seines ersten Buches - intensiv mit der Definition und Schätzung von Kenngröße von wahren Beobachtungsfehlern beschäftigt (Helmert, 1875a,b, 1876a,b, 1877b,c,d,a, 1904). Eine ausführliche Darstellung über Helmerts Arbeiten in Bereich der Theorie von Fehlern ist bei Sheynin (1995) zu finden.

Im folgenden Abschnitt will ich kurz versuchen, seine Gedanken dazu aufzunehmen. Dabei verwende ich einerseits die von Helmert gewählte Notation um das Studium der Schriften zu erleichtern. Eine Gegenüberstellung zur aktuellen Notation (in $grau$) soll aber die Einordnung in die heute vielfach verwendete Notation erleichtern, wo streng zwischen Zufallsvariablen, Realisierungen von Zufallsvariablen (Messungen) und wahren Werten unterschieden wird.[5]

3.1. Definitionen von Kenngrößen aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Großen Raum widmet Helmert in seinem Buch (Helmert, 1872) der Diskussion von Messfehlern. Speziell in den einführenden Kapitel §1-§4 des I. Abschnitts, werden sehr präzise folgende

re 1910 verfasste er ein zunächst unpubliziertes, handschriftliches Manuskript mit dem Titel *Sur la reésolution numérique des systémes d'équations linéaires* (Cholesky, 1910), wo er die Grundzüge der Zerlegung eines symmetrischen Systems (Normalgleichungssystems) in zwei gestufte Systeme mit der gleichen (transponierten) Dreiecksmatrix genau darlegte ($\boldsymbol{N}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \implies \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$). Erst nach seinem Tode wurde sein Verfahren von im *Bulletin géodésique* weltweit erstmals von Benoit (1924) publiziert (Brezinski, 2006; Brezinski und Tournès, 2014).

[5]In dieser modernen Notation wird konsequent zwischen Zufallsgrößen in kalligrafischen Schriftzeichen $\mathcal{X}$, wahren Werten in griechischen Zeichen ξ und Messungen oder Realisierungen der Zufallsvariablen in lateinischen (italic) Buchstaben x unterschieden. Vektoren, Matrizen und vektorwertige Funktionen werden durch Fettdruck $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{\mathcal{X}}\}$ herausgehoben. Die Tilde (Schlange) über den Variablen weist immer auf ausgeglichene (optimal geschätzt) Größen hin. $E\{\mathcal{X}\}$ und $\Sigma\{\mathcal{X}\}$ charakterisieren den Erwartungswert- bzw. Varianzoperator für univariate Zufallsvariable, $\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{\mathcal{X}}\}$ und $\boldsymbol{\Sigma}\{\boldsymbol{\mathcal{X}}\}$ für multivariate Zufallsvariable.

Kenngrößen festgelegt und untersucht:

	Definition(Original)	Definition(modern)
durchschnittlicher Fehler (erstes Moment μ_1)	$\vartheta := [val.abs.\ \varepsilon\ \varphi(\varepsilon)]$	$\vartheta_\varepsilon := \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x\rvert f_\varepsilon(x)dx$
mittlerer Fehler (zweites Moment μ_2)	$\mu^2 := [\varepsilon^2\ \varphi(\varepsilon)]$	$\sigma_\varepsilon^2 := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\varepsilon(x)dx$
wahrscheinlicher Fehler	$\varrho : [\varphi(\varepsilon)]_{-\varrho}^{+\varrho} = \frac{1}{2}$	$\varrho_\varepsilon : \int_{-\rho}^{\rho} f_\varepsilon(x)dx = \frac{1}{2}$

Tabelle 1: Definitionen von Fehlern durch das Fehlergesetz $\phi(\varepsilon)$ der wahren Fehler ε $Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion\ f_\varepsilon(x)$.

Hierin bezeichnen ε (ε) die wahren Fehler, die nach einem Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ $(f_\varepsilon(x))$ vorliegen. Die eckigen Klammern deuten die Summierung der Größen an. Über die Form des Fehlergesetzes führt Helmert (1872, §2 Abs. III) aus:

> „Den Erfahrungen zufolge entspricht das Fehlergesetz dem Gauß-Typ
>
> $$\varphi(\varepsilon) = c\, e^{-h^2\varepsilon^2} \qquad f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}\ , \tag{5}$$
>
> worin bezeichnen
>
> e die Basis der natürlichen Logarithmen,
> h eine von der Genauigkeit der Beobachtungen und der Maasseinheit, in welcher ε ausgedrückt ist, abhängige Constante,
> c die Wahrscheinlichkeit $\varphi(0)$
>
> dem Vorkommen der zufälligen Beobachtungsfehler mit grosser Annäherung“.
>
> Helmert (1872, §2 Abs. III)

Unter der Annahme der Gauß-Verteilung zeigt (Helmert, 1872, §3 Abs. III (19)) auf, dass diese einzelnen Fehlergrößen in einem *„constantem verhältnisse“* zueinander stehen,

$$\varrho = 0.67449\,\mu \quad \text{und} \quad \mu = 1.25331\,\vartheta \qquad \varrho_\varepsilon = 0.67449\,\sigma_\varepsilon \ \text{ und } \ \sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta_\varepsilon = 1.25331\,\vartheta_\varepsilon\ , \tag{6}$$

$$\text{bzw.} \quad \varrho_\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,0.67449\,\vartheta_\varepsilon = 0.84553\,\vartheta_\varepsilon\ . \tag{7}$$

Der durchschnittliche und mittleren Fehler stellen damit das erste und zweite Moment der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bezüglich der absoluten wahren Beobachtungsfehler dar. Der wahrscheinliche Fehler ist hingegen über den Quantilwert zur Wahrscheinlichkeit 0.25

bzw. 0.75 definiert, wobei eine symmetrische Verteilung bezüglich des Ursprungs vorausgesetzt wird.

Alle drei von Helmert angeführten Kenngrößen für den Fehler habe ihre Bedeutung bis heute nicht verloren, wenn auch für die Varianz $\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2$ und somit der mittlere Fehler μ^2 zumeist angesprochen wird. Speziell bei Datensätzen mit auffälligen Daten, die vom Verhalten der restlichen Daten abweichen (Ausreißer, auffallende Daten), wird vielfach die Definition des wahrscheinliche Fehlers ϱ (ϱ_ε) herangezogen, um robust gegenüber großen Fehlern zu sein. Man beachte, dass einzelne große Abweichungen keinen Einfluss auf diese Fehlermaß haben. Im Zusammenhang mit der L1-Norm Ausgleichung (Fuchs, 1982; Schuh, 1985) aber auch der Robusten Parameterschätzung eröffnet die Definition des durchschnittlichen Fehlers ϑ (ϑ_ε) interessante Möglichkeit, da sie ein konsistentes Maß zur Minimierungsforderung darstellt.

3.2. Schätzer für die Kenngrößen aus n wahren Beobachtungsfehlern

Bereits Gauss (1816) hatte Überlegungen angestellt, wie man bei Vorliegen von n wahren Beobachtungsfehler $\mathcal{E}_i$, $i=1,\ldots,n$ Schätzer für die angeführten Kenngrößen definiert kann. Eine zentrale Rolle spielen dabei die Potenzsummen der der absoluten Beobachtungsfehler die folgendermaßen definiert werden,

$$\sigma_m := \frac{1}{n}\left[\,\left|\varepsilon\right|^m\,\right] \qquad\qquad \widehat{\mathcal{M}}_m := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mathcal{E}_i|^m \tag{8}$$

wobei m die Ordnung des Moments charakterisiert. Aus diesen Potenzsummen lassen sich unmittelbar die Schätzer für den durchschnittlichen Fehler

$$\vartheta = \frac{1}{n}\left[\,\left|\varepsilon\right|\,\right] \qquad\qquad \widehat{\mathcal{D}}_\varepsilon := \widehat{\mathcal{M}}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mathcal{E}_i| \tag{9}$$

und den mittleren Fehler

$$\mu = \frac{1}{n}\left[\varepsilon^2\right] \qquad\qquad \widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon^2 := \widehat{\mathcal{M}}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}_i^2 \tag{10}$$

angeben. Aus der modernen Schreibweise wird unmittelbar deutlich, dass die Schätzungen $\widehat{\mathcal{D}}_\varepsilon$ und $\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon^2$ wieder Zufallsvariablen sind, die durch ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen oder deren Momente charakterisiert werden können. Diese Schätzung weisen also auch Unsicherheiten oder Fehler auf. Während Gauss (1823) die wahrscheinlichen Fehler der Potenzsummen darstellte, weist (Helmert, 1872, p. 25) die mittleren Fehler der Schätzungen aus. Helmert behandelt dabei drei unterschiedlichen Verteilungen (Annahme I: Gleichverteilung in einem Intervall, Annahme II: Genäherte Gauß-Verteilung, Annahme III: Gauß-Verteilung) und weist den mittleren Fehler des durchschnittlichen Fehlers bei vorliegender Gauß-Verteilung mit

$$\vartheta\left(1 \pm \frac{0.75551}{\sqrt{n}}\right) \qquad\qquad \widehat{\mathcal{D}}_\varepsilon \pm \sigma_{\widehat{\mathcal{D}}_\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{D}}_\varepsilon \pm 0.75551\,\frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

(Helmert, 1872, p. 26,(14*)) und den mittleren Fehler des mittleren Fehlers mit

$$\mu\left(1 \pm \frac{0.70711}{\sqrt{n}}\right) \qquad\qquad \widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon + \sigma_{\widehat{\mathcal{S}}_\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon \pm 0.70711\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

(Helmert, 1872, p. 25,(14)) aus.

Im Gegensatz zu den Schätzungen des durchschnittlichen und mittleren Fehler erfolgt die Schätzung des wahrscheinlichen Fehlers durch Abzählen

$$\varrho \quad \text{„durch abzählen"} \qquad \widehat{\mathcal{R}}_\varepsilon = \operatorname{median} |\mathcal{E}_i| \tag{13}$$

(Helmert, 1872, p. 26 Abschn. IV)gegeben ist. Helmert weist darauf hin,

> „dass die Bestimmungsweise von $\varrho\ (\widehat{\mathcal{R}}_\varepsilon)$ sehr unsicher ist, bestätigt sich bei genauer Untersuchung (GAUSS, Zeitschr.etc.p.195, ENCKE, Berl. Jahrb.etc.p.295.) Wir werden im Folgenden auf die directe Bestimmung von ϱ verzichten"
>
> (Helmert, 1872, p. 26)

In den von Helmert zitierten Untersuchungen von Gauss (1816, Abschn. 7) und Encke (1832, p. 298)) wird der wahrscheinliche Fehler für die Berechnung von $\varrho\ (\widehat{\mathcal{R}}_\varepsilon)$ angegeben. Umgerechnet mit (6) auf den mittleren Fehler für die Schätzung des wahrscheinlichen Fehlers $\varrho\ (\widehat{\mathcal{R}}_\varepsilon)$ aus n wahren Beobachtungsfehlern ergibt sich

$$\widehat{\mathcal{R}}_\varepsilon + \sigma_{\widehat{\mathcal{R}}_\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{R}}_\varepsilon^2 \pm 1.11636 \frac{\varrho_\mathcal{E}}{\sqrt{n}} \,. \tag{14}$$

Somit ergibt sich der Schluss, dass von den drei Schätzern (durchschnittlicher Fehler $\widehat{\mathcal{D}}_\varepsilon$ (9); mittlere Fehler $\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon$ (10) und wahrscheinlicher Fehler $\widehat{\mathcal{R}}_\varepsilon$ (13)) die Schätzung für den mittleren Fehler die *genaueste* ist. Allerdings weist Helmert (1872, p. 26) darauf hin, dass der *„Unterschied der Genauigkeiten, an sich nicht beträchtlich, und diesem Falle (Anm. großer n) noch weniger ins Gewicht fällt."*.

In einem Kommentar zu diesem Ergebnis geht Helmert dann speziell darauf ein, dass die Angabe der Genauigkeit der Schätzer aber auch von der Verteilung der Schätzgrößen abhängt, die aber weitgehend unklar ist. Im Speziellen führt es aus:

> „Wir können hier nicht unerwähnt lassen, dass eine strengere Untersuchung erst feststellen müsste, ob man die Genauigkeit der Berechnung von ϑ und μ nach den mittlern Fehlern [...] beurtheilen darf. Denn die Fehler in S_m befolgen [...] offenbar ein Gesetz, welches von der [...] angenommenen Form des Fehlergesetzes abweicht, [...]. Eine genauere Untersuchung, die nicht sehr einfach ausfällt, würde uns zu weit führen"
>
> (Helmert, 1872, p. 26, Fußnote)

3.3. Verteilung der Schätzer für die Genauigkeit von Beobachtungsreihen

Speziell wegen dieser Anmerkung in der Fußnote wird Helmert von Mees (1875, Heft 2, ausgegeben am 4. März 1875)[6] kritisiert und damit die Aussage über den Schätzer mit höchster Genauigkeit in Frage gestellt. (Helmert, 1875a, Heft 4, ausgegeben am 30. Juni 1875) antwortet umgehend in der selben Zeitschrift unter der Rubrik *„Kleinere Mittheilungen"* auf diesen Angriff. In diesem Kommentar erwähnt Helmert erstmals[7] die Gamma-Verteilung für die Quadratsumme von n unabhängigen, normalverteilten Beobachtungsfehlern ε $(\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2))$.

[6] R.A. Mees (1844-1886) Prof. für Physik an der Universität Groningen

[7] siehe auch Sheynin (1995, p.89)

> „Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Fehlern die Summe $[\varepsilon^2]$ zwischen den Grenzen $n(\sigma_2 - \frac{\delta}{2})$ und $n(\sigma_2 + \frac{\delta}{2})$ falle, wo δ sehr klein ist, wird (unter Annahme des Gauss'schen Gesetzes)
>
> $$w = \frac{h^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}(n\delta)(n\sigma_2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-h^2 n\sigma_2}$$
>
> $$P\left\{x - \tfrac{1}{2}dx \le \mathcal{X} < x + \tfrac{1}{2}dx\right\} = dF_{\tilde{\varepsilon}^T\tilde{\varepsilon}}$$
>
> mit
>
> $$dF_{\tilde{\varepsilon}^T\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{\sigma^n 2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\, x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\, dx \tag{15}$$
>
> [. . .]“
>
> (Helmert, 1875a, Seite 302-303)[8]

(Anm.: Beachte in der orginalen Bezeichnung von Helmert bezeichnet σ_2 die Integrationsgröße und nicht die Varianz.)

In diesem Kommentar weist Helmert darauf hin, dass über die genaue Ableitung dieser Zusammenhänge ein ausführliche Arbeit erscheinen wird. In einer weiteren Notiz vom September 1875 äußert Mees dazu:

> „Mit Verlangen sehe ich dem angekündigten grösseren Aufsatz entgegen, worin Herr Helmert [. . .] das Wahrscheinlichkeitsgesetz [. . .] ableiten wird.“
>
> (Mees, 1876, Helf 2, ausgegeben am 10. März 1876)

In einer umfangreiche Diskussion über die „Wahrscheinlichkeiten der Potenzsummen“ setzt sich (Helmert, 1876b, Heft 3, ausgegeben am 20. Mai 1876) mit den Verteilungsfunktionen der Schätzer der Momente aus einer endlichen Anzahl n von wahren Beobachtungsfehlern ε $(\mathcal{E}_i)$ auseinander. Er stellt fest, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\widehat{\mathcal{S}}_m}$ der Differenz zwischen dem wahren Momente

$$S_m := \int_0^a \varepsilon^m\, \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \qquad \mu_m := E\{|\mathcal{E}|^m\} = \int_0^{e_{max}} |x|^m f_{\mathcal{E}}(x)\, dx \tag{16}$$

und der geschätzen Momente

$$\sigma_m = \frac{1}{n}[\, |\varepsilon|^m \,] \qquad \widehat{\mathcal{M}}_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mathcal{E}_i|^m \tag{17}$$

für eine große Anzahl n von wahren Beobachtungsfehlern durch

$$\varphi(\sigma_m) = \sqrt{\frac{n}{2\pi(S_{2m} - S_m^2)}}\; e^{-\frac{n(S_m - \sigma_m)^2}{2(S_{2m} - S_m^2)}} \qquad f_{\widehat{\mathcal{M}}_m}(x;n) = \sqrt{\frac{n}{2\pi(\mu_{2m} - \mu_m^2)}}\; e^{-\frac{n(\mu_m - x)^2}{2(\mu_{2m} - \mu_m^2)}} \tag{18}$$

angenähert werden kann. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\varphi(\sigma_m)$ $(f_{\widehat{\mathcal{M}}_m}(x;n))$ folgt somit einer Gauß-Verteilung (vgl. Helmert, 1876b, Gl. (34)). Die Varianz der Schätzung kann somit unmittelbar mit

$$\mu_m = \sqrt{\frac{n}{S_{2m} - S_m^2}} \qquad \sigma_{\widehat{\mathcal{M}}_m} = \sqrt{\frac{n}{\mu_{2m} - \mu_m^2}} \tag{19}$$

[8] siehe auch Helmert (1876b, Seite 203, Formel (25))

abgelesen werden. Damit können nun die mittleren Fehler (Standardabweichungen) für beliebige Verteilungen abgeleitet werden (siehe Tabelle 2. Andererseits wird damit die Aussage bewiesen, dass der *genaueste Schätzer* derjenige mit kleinstem mittleren Fehler (Streuung) ist.

Verteilung	$\varphi(\varepsilon) = c,\ \varepsilon^2 \leq \varepsilon^2_{max}$	$\varphi(\varepsilon)=c\left(1-\frac{\varepsilon^2}{a^2}\right),\ \varepsilon^2\leq\varepsilon^2_{max}$	$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\varepsilon}{\sigma})^2}$
$\vartheta\ (\sigma_{\widehat{\mathcal{D}}_\mathcal{E}})$	$0.57735\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\ (\frac{\vartheta_\mathcal{E}}{\sqrt{n}})$	$0.64979\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\ (\frac{\vartheta_\mathcal{E}}{\sqrt{n}})$	$0.75551\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\ (\frac{\vartheta_\mathcal{E}}{\sqrt{n}})$
$\mu\ (\sigma_{\widehat{\mathcal{S}}_\mathcal{E}})$	$0.44721\frac{\mu}{\sqrt{n}}\ (\frac{\sigma_\mathcal{E}}{\sqrt{n}})$	$0.53452\frac{\mu}{\sqrt{n}}\ (\frac{\sigma_\mathcal{E}}{\sqrt{n}})$	$0.70711\frac{\mu}{\sqrt{n}}\ (\frac{\sigma_\mathcal{E}}{\sqrt{n}})$

Tabelle 2: Mittlere Fehler (Streuung $\sigma_{\widehat{\mathcal{D}}_\mathcal{E}}$ bzw. $\sigma_{\widehat{\mathcal{S}}_\mathcal{E}}$) der Schätzer für den durchschnittlichen Fehler ϑ ($\widehat{\mathcal{D}}_\mathcal{E}$) und mittleren Fehler μ ($\widehat{\mathcal{S}}_\mathcal{E}$) bei unterschiedlichen Verteilungen (siehe auch (Helmert, 1872, p.25, (13))

In der weiteren Folge wendet sich Helmert in der selben Arbeit im §4 der Frage zu, wie speziell für die Schätzung des zweiten Momentes die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion berechnet werden kann (Helmert, 1876b, §4). Für $m = 2$, also für die Schätzung des mittleren Fehler μ ($\widehat{\mathcal{S}}_\mathcal{E}$), leitet er über Induktion die Wahrscheinlichkeit her, dass die Quadratsumme der wahren Beobachtungsfehler $[\ \varepsilon^2\ ]$ zwischen den Grenzen $n\left(\sigma_2 \pm \frac{\delta_2}{2}\right)$ liegt

$$\varphi(\sigma_2)_n\delta_2 = \frac{h^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}(n\sigma_2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-h^2n\sigma_2}\ \delta_2 \qquad \begin{gathered} P\left\{x-\tfrac{1}{2}dx \leq \mathcal{X} < x+\tfrac{1}{2}dx\right\} = dF_{\tilde{\varepsilon}^T\tilde{\varepsilon}} \\ \text{mit} \\ dF_{\tilde{\varepsilon}^T\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{\sigma^n 2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\, x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\ dx\ . \end{gathered} \tag{20}$$

Dies geschieht unter der Annahme, dass die wahren Beobachtungsfehler normalverteilt sind. Durch Einsetzen von $2h^2n\sigma_2 = x$ (Homogenisierung der Beobachtungsfehler) erhält man aus diesem Ausdruck die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f^{\chi^2}(n)$ bzw. die -verteilungsfunktion $F^{\chi^2}(n)$ der χ^2-Verteilung

$$f^{\chi^2}(x;n) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{n}{2}} \qquad F^{\chi^2}(x;n) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{n}{2}}dt\ . \tag{21}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f^{\chi^2}(x;n)$ stellt eine spezielle Gamma-Verteilung

$$f_{\Gamma(p,b)} = \frac{b^p}{\Gamma(p)}\ x^{p-1}\ e^{-bx} \tag{22}$$

mit den Parametern $p = \frac{r}{2}$ und $b = \frac{1}{2\sigma^2}$ dar. Da die Verteilung $f_{\Gamma(\frac{r}{2},\frac{1}{2\sigma^2})}$ bei vielen Hypothesentests (z.B. Globaltest) eine zentrale Rolle spielt, wird sie auch χ^2-Verteilung genannt[9]. Die Definition der χ^2-Verteilung kann unmittelbar aus Helmerts Herleitung abgelesen werden:

[9] Der Name der χ^2-Verteilung geht auf eine Arbeit von K. Pearson aus dem Jahre 1900 zurück (Pearson, 1900). Mitte des letzten Jahrhunderts wurde aber auch von Kruskal (1946) der Name *„Helmert Verteilung“* (Hel-

Satz: Die Quadratsumme von r stochastisch unabhängigen und standardnormalverteilten Zufallsvariablen $\mathcal{X}_i, i = 1, \ldots, r$ folgt der χ^2 Verteilung mit dem Freiheitsgrad r

$$\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_2^2 + \ldots + \mathcal{X}_r^2 \sim \chi_r^2 \,. \tag{23}$$

Damit hatte Helmert den von Mees (1876, Helf 2, ausgegeben am 10. März 1876) geforderten Beweis erbracht. Aus der abschließenden Bemerkung von Helmert (1876b) kann man entnehmen, dass dies mit einer gewissen Genugtuung geschah:

> „Herr Mees hat [...] auf meine Aeusserung [...] über seinen früheren Aufsatz geantwortet. Dieser Antwort gegenüber genügt es, wiederum auf meine ebenerwähnte Aeusserung hinzuweisen und Herrn Mees daran zu erinnern, dass ich selbst in meinem Buche auf eine gewisse Unvollständigkeit eines Beweises aufmerksam mache, mir also die Priorität einer „Warnung“ verbleibt. zu den Mängeln meines Buches rechne ich selbstverständlich die betreffende Stelle nicht — indem ich nämlich aus prakitschen Gründen der jüngern Gauss'Dartstellung der Ausgleichungsrechnung im Wesentlichen folgte, musste ich nothwendig auch deren Lücken in Kauf nehmen, die selbst durch lange Untersuchungen nicht vollständig ausfüllbar sind, aber doch Erwähnung verdienen, und zwar auch in einem Lehrbuche. Gestattet eine nur auf das Gauss'sche Fehlergesetz gebaute Ausgleichungstheorie gerade in dem streitigen Punkte auch eine weit befriedigendere Lösung, so verbleiben doch auch einer solchen Theorie noch Lücken genug, um im Hinblick auf den weit complicirteren mathematischen Apparat und die engeren Grenzen der Giltigkeit derselben nicht der andern Darstellungsweise den Vorzug geben zu können. “
>
> (Helmert, 1876b, p. 218)

4. Schlußwort

In diesem Artikel sind nur wenige Episoden aus dem vielfältigen Schaffen von Helmert herausgegriffen. Dabei wurde versucht „auf den Spuren von Friedrich Robert Helmert“ zu gehen. Das Denken der Zeit, aber auch den Ablauf mancher Entwicklungen, auf Grund der Quellenlage einzufangen. Die Aufnahme von Helmert als ersten Vertreter der Geodäsie in die *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften* im Jahr 1900 dokumentiert sehr gut die herausragende Stellung von Helmert. In einer Zeit, wo Ingenieure um die Anerkennung ihre Leistungen in der Wissenschaft durchaus ringen mussten. So wurde erst mit dem „Allerhöchsten Erlaß“ des Königs von Preußen Wilhelm II vom 10. Oktober 1899 das Promotionsrecht an drei Technischen Hochschulen Preußens, Berlin-Charlottenburg, Hannover und Aachen zum *Doctor-*

mert's Distribution) vorgeschlagen. Eine starke Befürwortung dieser Namensgebung findet man auch bei Lancaster (1966), der speziell auch die elegante Herleitung von Helmert würdigt und am Ende der Arbeit folgende Empfehlung ausspricht: *„We may follow Kruskal (1946) in recommending that "the joint distrubution of sample mean and standard deviation for samples of independent random observations, drawn from a normal population, may be called* HELMERT'S DISTRIBUTION*"*“. Eine ausführliche Darstellung dieser Diskussion ist auch bei (Johnson und Kotz, 1970, Kap. 17.3) zu finden.

Ingenieur ermöglicht[10](Weiß, 2013). Die Leistungen Helmerts zur Aufnahme in die Akademie müssen daher in der Wissenschaft weithin sichtbar gewesen sein und haben sicher zu folgender Äußerung von Felix Klein, dem berühmten Mathematik Professor des Gauß-Lehrstuhls aus Göttingen, beigetragen:

> „Die *Geodäsie* ist derjenige Teil der Geometrie, in welchem die Idee der Approximationsmathematik ihre klarste und konsequenteste Durchbildung gefunden hat. Man untersucht bei ihr unausgesetzt einerseits die Genauigkeit der Beobachtungen und andererseits die Genauigkeit der Resultate, die aus den Beobachtungen folgen."
>
> (Klein, 1928, p.158)

Appendix:

A Zusammenstellung von Helmert Verfahren

In diesem Abschnitt soll kurz versucht werden eine Zusammenstellung von Verfahren aufzulisten, die in der Ausgleichungsrechnung mit dem Namen von Helmert verknüpft sind. Diese Zusammenstellung kann naturgemäß nicht vollständig sein.

Verfahren/Methode	Zitat
Gauß-Helmert Modell	Helmert (1872, §5 u. §26)
äquivalente Beobachtungen nach Helmert	Helmert (1872, §21)
Helmert-Verteilung (χ^2-Verteilung)	Helmert (1875a, 1876b)
Varianzkomponentenschätzung nach Helmert	Helmert (1877c,d)
Zeitreihenanalyse nach Helmert	Helmert (1905)
Helmertscher Punktlagefehler	Helmert (1907, Kap. 8,§3)
Helmertsche Fehlerellipse	Helmert (1907, Kap. 4,§7)
Helmertsche Blockzerlegung	Helmert (1907, Kap. 8,§6)
Bestimmung latenter Parameter nach Helmert	Helmert (1911)

Literaturverzeichnis

Allmer, F. (1993): Das Erste Technische Doktorat in Der Österreichischen k.u.k. Monarchie. *Der Wirtschaftsingenieur*, 25(4):18–21. URL *http://diglib.tugraz.at/download.php?id=4e9d5d76e5654&location=browse*. 13

Benoit (1924): Note Sur Une Méthode de Résolution des équations Normales Provenant de L'Application de la Méthode des Moindres Carrés a un Système D'équations Linéaires en Nombre Inférieur a Celui des Inconnues. — Application de la Méthode a la Résolution D'un Système Defini D'éQuations LinéAires. *Bulletin géodésique*, 2(1):67–77. ISSN 0007-4632. doi:10.1007/BF03031308. 6

Brezinski, C. (2006): The life and work of André Cholesky. URL *http://math.univ-lille1.fr/~brezinsk/cholNUMA.pdf*. 6

[10] In der K.K. Österreichisch-Ungarischen Monarchie wurde die Promotion zum *Doctor der technischen Wissenschaften* mit dem Reichgesetz Nr. 38 vom 13. April 1901 erlassen. Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, dass die erste vorgenommene Promotion in der gesamten K.K. Österreichisch-Ungarischen Monarchie zum Doctor der technischen Wissenschaften an den Geodäten Hans Löschner am 14. November 1901 an der Technischen Hochschule in Graz erfolgte (Allmer, 1993).

Brezinski, C., D. Tournès (2014): *André-Louis Cholesky - Mathematician, Topographer and Army Officer*. Birkhäuser, Springer International Publishing. ISBN-13: 9783319081342. 6

Cholesky, A.-L. (1910): Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires. *(Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de l'École polytechnique, reprint: Bulletin de la Sabix [En ligne], 39, p 81–95 — 2005)*. URL *http://sabix.revues.org/529*. 6

Eggert, O. (1917): Friedrich Robert Helmert †. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 46:281–295. 1

Encke, J. (1832): Methode der kleinsten Quadrate. *Berliner Astronomisches Jahrbuch 1834*, 59:249–312. URL *http://www.mdz-nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn:nbn:de:bvb:12-bsb10538363-1*. 9

Fuchs, H. (1982): *Adjustment by minimizing the sum of absolute residuals*. Reihe B, 258. Deutsche Geodätische Kommission, München. Proceedings of the "6th International Symposium on Geodetic Network and Computations" (Aug.31 - Sept.5, 1981). 8

Gauss, C. F. (1816): Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*, I:185ff. Nachdruck: Gauss, C. F. (1887): Abhandlung zur Methode der kleinsten Quadrate. Druck und Verlag von P.Stankiewicz' Buchdruckerrei, S . 129–138. 8, 9

Gauss, C. F. (1823): *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*. Göttingen apud Henricum Dieterich. doi:10.3931/e-rara-2857. 8

Golub, G., C. F. van Loan (1980): An Analysis of the Total Least Squares Problem. *Siam J. Numer, Anal.*, 17, No. 6:883–893. 3

Helmert, F. R. (1868a): Studien über rationelle Vermessung im Gebiete der höheren Geodäsie. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 13(2):73–120. URL *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415665_0013|LOG_0009*. 6

Helmert, F. R. (1868b): Studien über rationelle Vermessung im Gebiete der höheren Geodäsie - 2. Teil. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 13(3):163–186. URL *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415665_0013|LOG_0012*. 6

Helmert, F. R. (1872): *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente*. B. G. Teubner. URL *https://books.google.de/books?id=DzBLAAAAMAAJ&printsec=frontcover*. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13

Helmert, F. R. (1875a): Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl wahrer Beobachtungsfehler. *Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch)*, XX(4):300–303. URL *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415665_0020|LOG_0033*. 1, 6, 9, 10, 13

Helmert, F. R. (1875b): Ueber die Formeln für den Durchschnittsfehler. *Astronomische Nachrichten*, 85(22-23):353–366. ISSN 1521-3994. doi:10.1002/asna.18750852203. 6

Helmert, F. R. (1876a): Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. *Astronomische Nachrichten*, 88(8-9):113–131. ISSN 1521-3994. doi:10.1002/asna.18760880802. 1, 6

Helmert, F. R. (1876b): Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit in Zusammenhange stehend Fragen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XXI(3):192–218. URL *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415665_0021|LOG_0024*. 6, 10, 11, 12, 13

Helmert, F. R. (1877a): Die Bestimmung des Fehlergesetzes aus Beobachtungen auf graphischem Weg. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 6:22–26. 6

Helmert, F. R. (1877b): Über den Maximalfehler einer Beobachtung. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 6:131–147. 6

Helmert, F. R. (1877c): Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt (Teil 1 von 2). *Astronomische Nachrichten*, 89(2127):241–246. URL *http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1877AN.....89..225H&defaultprint=YES&filetype=.pdf*. 6, 13

Helmert, F. R. (1877d): Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt (Teil 2 von 2). *Astronomische Nachrichten*, 89(2128):241–246. URL *http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1877AN.....89..241H&defaultprint=YES&filetype=.pdf*. 6, 13

Helmert, F. R. (1900): Antrittsrede des Hrn. Helmert. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, XXXII, S. 698–704. URL *https://ia601401.us.archive.org/7/items/sitzungsberichte1900deut/sitzungsberichte1900deut.pdf*. Öffentliche Sitzung zur Feier des LEIBNIZischen Jahrestages, 28. Juni 1900. 2, 5, 6

Helmert, F. R. (1904): Zur Ableitung der Formel von C.F.GAUSS für den mittleren Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe vom 9. Juni 1904*, XXX, S. 950–964. URL *https://ia802704.us.archive.org/31/items/sitzungsberichte1904deutsch/sitzungsberichte1904deutsch.pdf*. 6

Helmert, F. R. (1905): Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe vom 25. Mai 1905*, XXVIII, S. 594–612. URL *https://ia800306.us.archive.org/18/items/sitzungsberichte1905deutsch/sitzungsberichte1905deutsch.pdf*. 13

Helmert, F. R. (1907): *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geoäsie und die Theorie der Messinstrumente*. B. G. Teubner. URL *http://books.google.de/books?id=ibsJAAAAMAAJ*. Zweite Auflage. 2, 3, 13

Helmert, F. R. (1911): Über die Genauigkeit der Dimensionen des HAYFORDschen Erdellipsoids. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe vom 12. Januar 1911*, II, S. 950–964. URL *https://ia802608.us.archive.org/25/items/sitzungsberichte1911deut/sitzungsberichte1911deut.pdf*. 13

Helmert, F. R. (1924): *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geoäsie und die Theorie der Messinstrumente*. B. G. Teubner. Dritte Auflage. 3

Höpfner, J. (2013): Bibliographie Friedrich Robert Helmert. Technischer Report, Telegraphenberg Potsdam. URL *http://gfzpublic.gfz-potsdam.de/pubman/item/escidoc:117035/component/escidoc:117034/JHHelmertBibliographie.pdf*. 1

Johnson, N., S. Kotz (1970): *Distrubutions in Statistics: Continuous Univariate Distributions-1*, Band 1. Houghton Mifflin Company, Boston. 12

Kendall, M. G. (1951): Regression, Structure and Functional Relationship. Part I. *Biometrika*, 38(1/2):11–25. ISSN 0006-3444. doi:10.2307/2332313. 3

Klein, F. (1928): *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkt aus III*. Springer, Berlin. 13

Koch, K. (1997): *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn. URL *http://www.igg.uni-bonn.de/tg/fileadmin/publication/media/buch97_format_neu.pdf*. 3

Krüger, L. (1917): Anzeige des Todes von Friedrich Robert Helmert. *Astronomische Nachrichten*, 7:397–398. doi:10.1002/asna.19172042104. 1, 3

Kruskal, W. (1946): Helmert's Distribution. *The American Mathematical Monthly*, 53(8):435–438. ISSN 00029890, 19300972. URL *http://www.jstor.org/stable/2306241*. 11

Lancaster, H. O. (1966): Forrunners of the Pearson χ^2. *Australian Journal of Statistics*, 8(3):117–126. ISSN 1467-842X. doi:10.1111/j.1467-842X.1966.tb00262.x. 12

Mees, R. (1875): Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XX(2):145–152. URL *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415665_0020|LOG_0019*. 9

Mees, R. (1876): Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XXI(2):126–128. URL *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415665_0021|LOG_0018*. 10, 12

Meissl, P. (1976): Skriptum aus Ausgleichungsrechnung II. Technischer Report, Institut für Mathematische und Numerische Geodäsie, Technische Universität Graz. 3, 4

Pearson, K. F. (1900): On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Philosophical Magazine Series 5*, 50(302):157–175. doi:10.1080/14786440009463897. 11

Schuh, W.-D. (1985): Transforming the L1-norm adjustment of a levelling network into a flow problem. *Proceedings of the "7th International Symposium on Geodetic Computations"*, S. 385–409. Cracow, Poland (June 18-21, 1985). BIBTEX, PDF. 8

Schuh, W.-D. (2016): Signalverarbeitung in der Physikalischen Geodäsie. Freeden, W., R. Rummel, (Hrsg.), *Handbuch der Geodäsie*, Band Erdmessung und Satellitengeodäsie. *MeteorSystem*. Springer. URL *http://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-3-662-46900-2_15-1*. BIBTEX, PDF. 6

Schuh, W.-D., I. Krasbutter, B. Kargoll (2014): Korrelierte Messung - was nun? Neuner, H., (Hrsg.), *Zeitabhängige Messgrößen - Ihre Daten haben (Mehr-)Wert*, Band 74 *DVW-Schriftenreihe*, S. 85 – 101. Wißner, Augsburg. BIBTEX, PDF. 6

Sheynin, O. (1995): Helmert's Work in the Theory of Errors. *Archive for History of Exact Sciences*, 49(1):73–104.

ISSN 00039519, 14320657. doi:10.1007/BF00374700. 6, 9

Weiß, E. (2013): 200 Jahre Entwicklungen zur heutigen Landwirtschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn. *ALMA MATER Beiträge zur Geschichte der Universität Bonn*, Band 107. 13

Wolf, H. (1967): F. R. Helmert und die moderne Geodäsie. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 92(7):237–240. 1

Wolf, H. (1968): *Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Ferd. Dm̈mlers Verlag, Bonn. 4

Wolf, H. (1978): Das geodätische Gauß-Helmert Modell und seine Eigenschaften. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 103(10):41–43. 3

Wolf, H. (1993): Friedrich Robert Helmert - Sein Leben und Wirken. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 118(12):582–590. 1