
Analyse und Konvergenzbeschleunigung der
Methode der konjugierten Gradienten
bei geodätischen Netzen

Dissertation
zur Verleihung des akademischen Grades
Doktor der technischen Wissenschaften
an der
Technischen Universität Graz

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Wolf-Dieter Schuh

MITTEILUNGEN
der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz
Folge 49

Graz, im Oktober 1984

Herausgeber:

Geodätische Institute der Technischen Universität Graz,
A-8010 Graz, Rechbauerstraße 12, Österreich.

Die Publikation dieser Folge der Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz wurde aus Mitteln der Rektorenkonferenz für den Druck von Dissertationen über die Bibliothekskommission der TU Graz finanziert.

Herstellung:

Hochschülerschaft an der Technischen Universität Graz GmbH.
A-8010 Graz, Rechbauerstraße 12.

Summary

The method of conjugated gradients can be used for an iterative solution of symmetrically definite systems of equations. This iterative process can be applied directly onto the linearized observation equations, such that the storage- and CPU-time consuming set-up of normal equations is avoided. The solution can be shown to improve step by step; the calculation procedure can be terminated, if a sufficient accuracy is achieved, although the accuracy estimation is generally quite difficult. The conditions for termination depend upon the eigenvalues of the system of equations and those, in turn, are subject to network layout and configuration. For large geodetic networks a very good local relative accuracy is achieved, the improvement of the absolute accuracy however is considerably slower.

In the present report the convergence properties of finite networks are analysed and a proper algorithm is presented to speed-up the calculations. The attainable accuracy turns out to be largely independent on the network layout and configuration. The number of elementary operations is dramatically reduced and compares very well with solutions employing minimum profile methods. Due to its simple programming and its low storage requirements - 30 KByte are sufficient to solve a network with 400 unknowns, storage depends linearly on the number of observations and unknowns (!) - , this algorithm presents itself as an ideal tool, even in a micro-computer environment.

V o r w o r t

Die Grundidee der vorliegenden Arbeit stammt von meinem verehrten Lehrer o.Univ.Prof.Dr.Peter Meissl. Er unterstützte den Fortgang dieser Arbeit durch seine ständige Bereitschaft zur Diskussion und gab mir viele wertvolle Hinweise. Dafür bin ich ihm zu großem Dank verpflichtet. Die durch seinen plötzlichen Tod aufgetretene Leere führte zum Stillstand der Arbeit. O.Univ.Prof.Dr.Hans Sünkel ermutigte mich, diese Arbeit fortzuführen und gab mir wertvolle Unterstützung in fachlicher und organisatorischer Hinsicht. Außerdem übernahm er die Erstbegutachtung. Für all diese Mühen möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken. Dank sage ich auch o.Univ.Prof.Dr.Günther Schelling, der mit Interesse die Anwendungen dieser Arbeit verfolgte und diese auch als Zweitbegutachter geprüft hat. Zu danken habe ich auch allen meinen Kollegen an der Abteilung für mathematische und datenverarbeitende Geodäsie, die mich oft unterstützt und ermutigt haben. Stellvertretend für alle möchte ich hier besonders Dr.Norbert Bartelme danken. Er hat mir selbstentwickelte Systemprogramme zur Punkt- und Beobachtungsverwaltung, für Graphik und Textverarbeitung zur Verfügung gestellt.

Inhaltsverzeichnis

Summary

Vorwort

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	...	1
2.	Relaxationsmethoden	...	3
2.1.	Grundprinzip der Relaxation	...	4
2.2.	Gradientenmethoden	...	8
2.2.1.	Prinzip	...	8
2.2.2.	Methode des stärksten Abstiegs	...	10
2.2.3.	Gesamtschrittverfahren	...	11
2.3.	Methode der konjugierten Gradienten	...	11
2.4.	Die Anwendung der konjugierten Gradienten in der Ausgleichsrechnung	...	16
3.	Anwendungsergebnisse der konjugierten Gradienten bei geodätischen Netzen	...	21
3.1	Bisherige Ergebnisse	...	21
3.2	Durchgeführte Berechnungen	...	23
3.2.1	Berechnungen bei geodätischen Höhennetzen	...	24
3.2.2	Berechnungen bei geodätischen Streckennetzen	...	27
3.2.3	Berechnungen bei geodätischen Richtungsnetzen	...	32
3.2.4	Gemeinsame Berechnung unabhängiger Netze	...	34
3.2.5	Stufenweise Berechnung eines Netzes	...	36
3.2.6	Einfluß der Näherungskordinaten auf die Restfehler	...	37
3.2.7	Zusammenfassung der Ergebnisse	...	39

4.	Ausgleichung frei-schwimmender Netze mit der Gradienten- methode	... 41
5.	Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und der Konvergenz der konjugierten Gradienten	... 44
5.1	Praktische Berechnungen	... 44
5.1.1	Regelmäßige Strukturen	... 44
5.1.1.1	Fliegende oder frei schwimmende Zugteile	... 45
5.1.1.2	Zwei oder mehrere Festpunkte, Ausgleichung mit Zwang	... 50
5.1.2	Unregelmäßige Strukturen	... 51
5.2	Abschätzung des größten und kleinsten Eigenwertes bei Nivellementketten	... 54
5.3	Mathematischer Zusammenhang	... 57
5.4	Zusammenfassung der Ergebnisse	... 61
6.	Konvergenzbeschleunigung der konjugierten Gradienten bei Netzen mit lokalen Messgrößen	... 64
6.1	Eindimensionaler linearer finite Elementeansatz	... 64
6.2	Eindimensionaler kubischer finite Elementeansatz	... 67
6.3	Anwendung auf das Liniennivellement	... 72
6.4	Zweidimensionaler linearer finite Elementeansatz	... 77
6.5	Zweidimensionaler kubischer finite Elementeansatz	... 78
6.6	Abschätzung der Rechenoperationen	... 84
6.7	Anwendung auf Höhennetze	... 86
6.8	Anwendung auf Lagenetze	... 91
7.	Schlußfolgerungen	... 99
8.	Literaturverzeichnis	... 102

1. Einleitung

Das Verfahren der konjugierten Gradienten dient der iterativen Auflösung von symmetrisch definiten Gleichungssystemen. Diese Methode wurde von M.Hestenes und E.Stiefel [1952] entwickelt und fand durch P.Läuchli [1959] und H.R.Schwarz [1970] Anwendung in der Ausgleichsrechnung. Praktische Untersuchungen und Berechnungen an geodätischen Netzen wurden unter anderem von L.Gründig [1980], F.Steidler [1980] und B.Benciolini, L.Mussio, F.Sansó [1981] durchgeführt.

Dieser iterative Rechenprozeß kann direkt auf die Verbesserungsgleichungen angewandt werden, sodaß das sehr platz- und zeitintensive Aufstellen der Normalgleichungen umgangen werden kann. Die zu ermittelnde Lösung wird schrittweise verbessert, wobei die Berechnung beim Erreichen einer genügend genauen Lösung abgebrochen werden kann. Die Abschätzung der Genauigkeit dieser Lösung ist im allgemeinen sehr schwierig. Die Abbruchsbedingungen sind abhängig von den Eigenwerten des Gleichungssystems und diese wiederum werden bei finiten Netzen sehr stark von der Netzlagerung und der Netzkonfiguration beeinflusst. Bei großen geodätischen Netzen wird schon nach wenigen Schritten eine sehr gute Nachbarschaftsgenauigkeit erreicht. Die absolute Genauigkeit kann nur sehr langsam erhöht werden.

In dieser Arbeit werden die Konvergenzeigenschaften von finiten Netzen analysiert und anschließend geeignete Methoden zur Beschleunigung der Berechnung aufgezeigt. Die erreichbare Genauigkeit und Konvergenz des Verfahrens wird dabei weitgehend unabhängig von der Lagerung und der Konfiguration der Netze. Die Anzahl der Rechenoperationen, die zur Berechnung notwendig sind, verringert sich sehr stark und erreicht die gleichen Größenordnungen, die zur Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen mit Hilfe von Profilalgorithmen erforderlich

sind. Die Programmierung dieses Verfahrens ist sehr einfach, wobei ohne großen Aufwand an Datenstruktur mit 30K Byte freiem Arbeitsspeicher Netze bis ungefähr 400 Unbekannten gelöst werden können. Der Platzbedarf steigt dabei linear mit der Anzahl der Unbekannten und der Beobachtungen.

2. Relaxationsmethoden

Relaxationsmethoden sind iterative Gleichungsauf Lösungsverfahren, bei denen eine Näherung schrittweise verbessert wird, um die Lösung zu erhalten. Der Begriff Relaxation bedeutet Nachlassen, Erschlaffen und meint ein sukzessives und systematisches Verkleinern der Reste (siehe R.Zurmühl [1964]).

Sei N eine symmetrische und positiv semidefinite Matrix, n der Daten- und x der Unbekanntenvektor,

$$N x + n = 0 . \quad (2.1)$$

Dann ist es Ziel jeder Relaxationsmethode den Versuchsvektor $x^{(0)}$ systematisch so zu verändern, daß die Residuen $r^{(0)}$ verschwinden (siehe Formel (2.2)).

$$N x^{(0)} + n = r^{(0)} \quad (2.2)$$

Betrachtet man die quadratische Funktion

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T N x + x^T n , \quad (2.3)$$

wobei $x^T N x$ immer positiv oder Null ist, wenn N ein symmetrisch positiv semidefinites Gleichungssystem repräsentiert, und versucht man den Vektor x so zu verändern, daß das Minimum dieser Funktion erreicht wird, so gelangt man zu folgender Extremwertbedingung:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \text{grad } F = N x + n = 0 \quad (2.4)$$

Die Auflösung eines symmetrisch-definiten Gleichungssystems (2.1) ist daher gleichbedeutend mit der Aufgabe, das Minimum der quadratischen Funktion (2.3) zu bestimmen. Der Extremwert wird erreicht, wenn das Gleichungssystem (2.2)

widerspruchlos erfüllt wird. Somit sind die Unbekannten x so zu bestimmen, daß alle Residuen r und damit alle partiellen Ableitungen von $F(x)$ verschwinden. Daraus folgt, daß die Funktion $F(x)$ (2.3) für diese Werte von x stationär wird. Wenn man positive Definitheit der quadratischen Form $F(x)$ voraussetzt, muß diese Funktion genau eine stationäre Stelle und zwar ein Minimum haben. Umgekehrt macht offenbar die Lösung eines symmetrisch-definiten Gleichungssystems die zugehörige quadratische Form minimal. Bei semidefiniten Systemen wird die Funktion $F(x)$ auch stationär, nur liegt dann kein Minimum, sondern ein Sattelpunkt vor.

2.1 Grundprinzip der Relaxation

Ausgehend von einem Versuchsvektor $x^{(0)}$ wählt man einen vom Nullvektor 0 verschiedenen Richtungsvektor p (Relaxationsrichtung), in dessen Richtung der Versuchsvektor korrigiert werden soll, um die Gleichung (2.1) zu erfüllen:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + t p \quad (2.5)$$

Der (positive oder negative) Streckungsfaktor dieses Richtungsvektors wird so gewählt, daß der Wert der quadratischen Funktion abnimmt. Auf diese Art wird der Unbekanntenvektor solange korrigiert, bis man nach einigen Wiederholungen dieser Schritte zum Minimum der Funktion $F(x)$ gelangt.

Im Bild 2.1 wird die Funktion $F(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + \text{const.}$ dargestellt. Die Linien mit konstantem Funktionswert bilden konzentrische Ellipsen, deren gemeinsamer Mittelpunkt einerseits der Punkt mit dem geringsten Funktionswert ist und andererseits auch die Lösung des zugehörigen

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

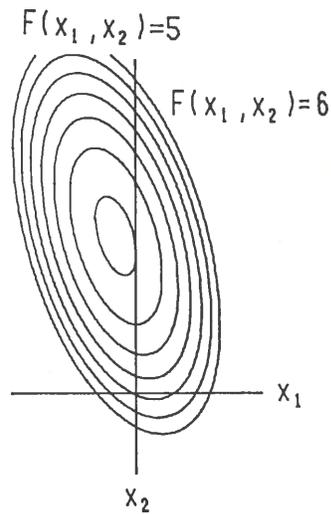


Bild 2.1: Gleichungssystem

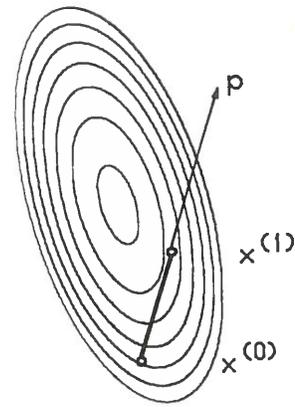


Bild 2.2: iterative Lösung

Gleichungssystems darstellt. Im Bild 2.2 ist die Wahl des Versuchspunktes oder Näherungspunktes beziehungsweise die Richtungswahl dargestellt. Wenn man den Unbekanntenvektor mehrmals mit Hilfe der Beziehung (2.5) korrigiert, so ergibt sich die Formel (2.7) zur allgemeinen Bestimmung des verbesserten Unbekanntenvektors $x^{(i+1)}$,

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + t_i p^{(i)} \quad (2.7)$$

wobei t_i , $p^{(i)}$ den Längenfaktor und die Richtung, in der beim i -ten Schritt korrigiert wird, darstellen. Die Berechnung des Längenfaktors des Fortschrittes t_i bei festem $x^{(i)}$ und $p^{(i)}$ ergibt sich durch die Minimierung der Funktion $F(x^{(i+1)})$, die unter Verwendung von (2.7) und (2.3) folgendermaßen umgeformt wird:

$$\begin{aligned} F(x^{(i+1)}) &= F(x^{(i)} + t_i p^{(i)}) = \\ &= \frac{1}{2} (x^{(i)} + t_i p^{(i)})^T N (x^{(i)} + t_i p^{(i)}) + (x^{(i)} + t_i p^{(i)})^T n = \\ &= \frac{1}{2} t_i^2 p^{(i)T} N p^{(i)} + t_i r^{(i)T} p^{(i)} + F(x^{(i)}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Der Parameter t_i ist so zu bestimmen, daß $F(x^{(i+1)})$ in bezug auf die Richtung $p^{(i)}$ minimal wird,

$$\frac{dF(x^{(i+1)})}{dt_i} = t_i p^{(i)T} N p^{(i)} + r^{(i)T} p^{(i)} = 0 \quad (2.9)$$

Daraus ergibt sich

$$t_{i \min} = - \frac{(r^{(i)})^T p^{(i)}}{(p^{(i)})^T N p^{(i)}} \quad (2.10)$$

Der Beweis, daß $t_{i \min}$ wirklich die Funktion minimiert, geht direkt aus der zweiten Ableitung der Funktion $F(x)$ (Formel 2.8) nach t_i hervor, wenn man berücksichtigt, daß $p^{(i)T} N p^{(i)}$ wegen der positiven Definitheit von N und wegen $p \neq 0$ größer als Null ist.

Betrachtet man bei fester Relaxationsrichtung $p^{(i)}$ die Abhängigkeit der quadratischen Funktion $F(x)$ vom Parameter t_i (Figur 2.2 geschnitten mit einer durch $p^{(i)}$ und $F(x)$ aufgespannten Ebene), so erkennt man, daß die sich ergebende Kurve eine nach oben offene Parabel ist. Der Wert von $F(x^{(i+1)})$ für alle Werte von t_i , welche zwischen 0 und $2t_{i \min}$ liegen, ist damit kleiner als $F(x^{(i)})$.

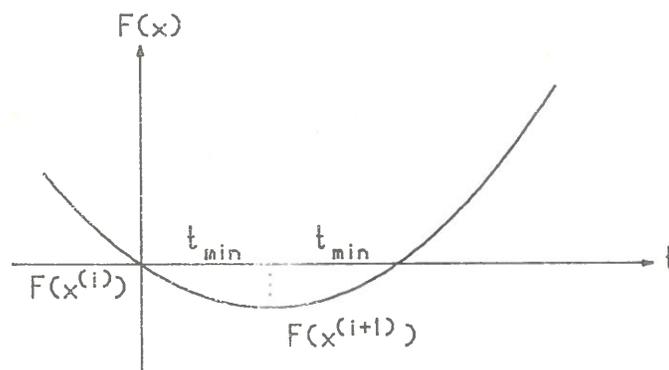


Bild 2.3: $F(x)$ in Abhängigkeit des Parameters t

Die Abnahme der quadratischen Funktion $F(x)$ beim Übergang von $x^{(i)}$ zu $x^{(i+1)}$ folgt aus

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x^{(i)} + t_{i,\min} p^{(i)}) - F(x^{(i)}) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{[(r^{(i)})^T p^{(i)}]^2}{(p^{(i)})^T N p^{(i)}} < 0 . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aus der Formel für den Betragsfaktor $t_{i,\min}$ (2.10) folgt, daß die Relaxationsrichtung $p^{(i)}$ nicht orthogonal auf den Residuenvektor $r^{(i)}$ stehen darf, da man ansonsten im Näherungspunkt verweilt.

Im Bild 2.4 wird die Wahl der Länge $t_{i,\min}$ veranschaulicht. Wenn man entlang der gewählten Richtung bis zum Punkt mit minimalem Funktionswert fortschreitet, so bedeutet dies, daß die Relaxationsrichtung in diesem Punkt zur Tangente an die Niveaulinie wird.

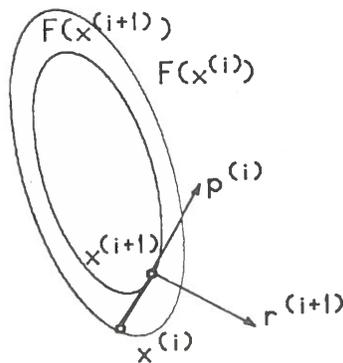


Bild 2.4: Optimale Wahl von t_i

Daraus ergibt sich, daß die Richtung des größten Abstiegs, repräsentiert durch den Gradientenvektor $\text{grad}(F(x^{(i+1)}))$, normal zur gewählten Relaxationsrichtung ist. Der Gradientenvektor steht normal auf die Niveaulinie und ist gleichzeitig Residuenvektor $r^{(i+1)}$. Dies ergibt sich auch unmittelbar aus dem Formelsystem (2.2) durch Einsetzen von (2.7) und (2.10).

$$\begin{aligned} r^{(i+1)} &= N x^{(i+1)} + n = N (x^{(i)} + t_i p^{(i)}) + n = \\ &= r^{(i)} + t_i N p^{(i)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$p^{(i)T} r^{(i+1)} = p^{(i)T} r^{(i)} + t_i p^{(i)T} N p^{(i)} = 0 \quad \text{für } t = t_{\min} \quad (2.13)$$

Da sich trotz dieser Optimierung des Längenfaktors nicht immer eine schnelle und rechengünstige Lösung ergibt, haben sich verschiedene Relaxationsverfahren entwickelt, die sich durch die Wahl der Relaxationsrichtung und des Längenfaktors unterscheiden.

Einzelrittverfahren : Handrelaxation

Gauß - Seidel

Überrelaxation

Gradientenverfahren : Methode des stärksten Abstieges

Gesamtschrittverfahren

Methode der konjugierten Gradienten

2.2 Gradientenmethoden

2.2.1 Das Prinzip

Der Residuenvektor $r^{(i)}$ als Gradient der zu minimierenden quadratischen Funktion $F(x)$ für den Versuchsvektor $x^{(i)}$ weist in die Richtung, in welcher $F(x)$ lokal am stärksten fällt. Es ist somit nur natürlich, den Gradienten von $F(x)$ im Näherungspunkt $x^{(i)}$ zur Festlegung der Relaxationsrichtung $p^{(i)}$ zu benutzen. Relaxationsmethoden, welche den Residuenvektor $r^{(i)}$ oder bereits zuvor auftretende Residuenvektoren $r^{(k)}$, $0 \leq k < i$ verwenden, nennt man Gradientenverfahren.

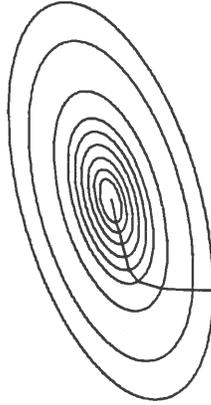


Bild 2.5: Prinzip der Gradientenmethode

Bei der Herleitung der Gradientenverfahren läßt man sich weitgehend von geometrischen Überlegungen leiten. Ausgehend von einem Versuchsvektor $x^{(0)}$ gelangt man in das gemeinsame Zentrum der Ellipsen oder Ellipsoide auf der von $x(0)$ auslaufenden orthogonalen Trajektorie (siehe Bild 2.5).

Im Prinzip führt das skizzierte Verfahren auf das Problem, das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx}{dt} = - \text{grad } F(x) = - N x - n \quad (2.14)$$

zu lösen. Der Parameter t stellt den Fortschritt auf der Trajektorie dar. Es ergeben sich verschiedene Lösungsmöglichkeiten zur Berechnung des Polygonzuges, der die Trajektorie darstellt. Bei kleinem Parameter t wird die Lösung nur sehr langsam konvergieren, bei großem t kann die Lösung auch divergieren. Je nach der Wahl von t unterscheidet man verschiedene Methoden.

2.2.2 Methode des stärksten Abstieges

$$p^{(i)} = -r^{(i)} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

$$t_{\min} = \frac{(r^{(i)})^T r^{(i)}}{(r^{(i)})^T N r^{(i)}} = \frac{1}{R(r^{(i)})} \quad (2.16)$$

$$R(x) = \frac{x^T N x}{x^T x} \quad \dots \text{Rayleigh Quotient} \quad (2.17)$$

Bei der Methode des stärksten Abstieges wird als Relaxationsrichtung $p^{(i)}$ die Richtung des negativen Residuenvektors $r^{(i)}$ verwendet und der Längenfaktor t_{\min} wird so bestimmt, daß der Funktionswert von F in der Relaxationsrichtung $p^{(i)}$ minimiert wird. Nach der Durchführung des i -ten Relaxationsschrittes steht der neue Residuenvektor $r^{(i+1)}$ orthogonal zum vorhergehenden Residuenvektor $r^{(i)}$. Dies folgt unmittelbar aus Gleichung (2.13), wo gezeigt wird, daß der neue Residuenvektor $r^{(i+1)}$ orthogonal zur Relaxationsrichtung $p^{(i)}$ ist (siehe auch Bild 2.4). Da die Relaxationsrichtung $p^{(i)}$ bis auf das Vorzeichen ident mit dem Residuenvektor $r^{(i)}$ ist, sind $r^{(i)}$ und $r^{(i+1)}$ zueinander orthogonal. Während der Relaxation beschreibt man, geometrisch betrachtet, im n -dimensionalen euklidischen Raum einen stückweise geradlinigen, rechtwinkligen Weg, der schließlich im Mittelpunkt der Ellipsen endet. Dieser Mittelpunkt weist den minimalen Funktionswert der Funktion $F(x)$ auf.

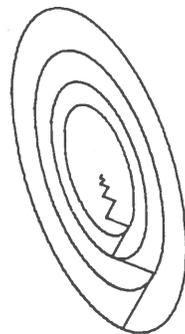


Bild 2.6: Methode des stärksten Abstieges

Bei der Berechnung nach dieser Methode (Formeln (2.15) und (2.16)) erkennt man (siehe Bild 2.6), daß die Wahl der "besten" Strategie in einem individuellen Punkt (optimale Richtungs- und Längenwahl) nicht immer den besten Weg in Hinblick auf das Gesamtproblem darstellt.

2.2.3 Das Gesamtschrittverfahren

Diese Methode ist eine Vereinfachung der Methode des stärksten Abstiegs. Der Parameter $t_{i_{\min}}$ wird nicht bei jedem Schritt berechnet, sondern konstant angesetzt, wobei für die Konvergenz dieser Methode als notwendige und hinreichende Bedingung folgendes gelten muß (siehe E. Stiefel [1952] S.20):

$$0 < t < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad \lambda_{\max} \dots \text{größter Eigenwert} \quad (2.18)$$

Die Bedingung (2.18) kann mit Hilfe der Gleichung (2.16) veranschaulicht werden, wenn man beachtet, daß für den Rayleigh'schen Quotienten $\lambda_{\min} \leq R(x) \leq \lambda_{\max}$ gilt.

2.3 Methode der konjugierten Gradienten

Nach der Wahl eines Versuchsvektors $x^{(0)}$ (Näherungslösung) wird wie bei der Methode des stärksten Abstiegs vorgegangen, das heißt, daß die erste Relaxationsrichtung identisch mit dem negativen Residuenvektor der Näherungslösung ist. In dieser Richtung wird bis zum Minimalpunkt vorgegangen. Der zugehörige Wert des Parameters $t_{i_{\min}}$ wird mit q_0 bezeichnet.

$$x^{(1)} = x^{(0)} - q_0 r^{(0)} \quad (2.19)$$

$$q_0 = \frac{(r^{(0)})^T r^{(0)}}{(r^{(0)})^T N r^{(0)}} = \frac{1}{R(r^{(0)})} \quad (2.20)$$

Im allgemeinen i - ten Relaxationsschritt ($i \geq 1$) wird nicht mehr das Minimum in Richtung des negativen Residuenvektors $-r^{(i)}$ gesucht, sondern das Minimum in der Ebene, die durch den Punkt $x^{(i)}$ geht und von der vorangehenden Relaxationsrichtung $p^{(i-1)}$ sowie dem Residuenvektor $r^{(i)}$ bestimmt wird, ermittelt.

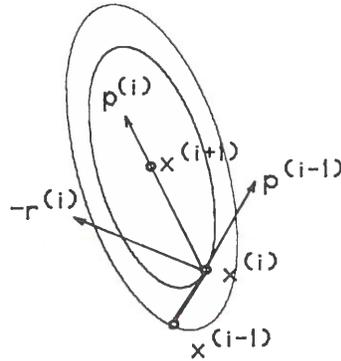


Bild 2.7: Konjugierte Gradientenmethode

Diese Verallgemeinerung wird durch die geometrische Tatsache motiviert, daß die zweidimensionale Ebene die durch den Näherungspunkt $x^{(i)}$ laufende Niveauläche der quadratischen Funktion $F(x^{(i)})$ in einer Ellipse schneidet. Die Schnittellipse geht durch den Punkt $x^{(i)}$, wo sie die alte Relaxationsrichtung $p^{(i-1)}$ berührt, da $x^{(i)}$ Minimalpunkt war. Die Schnittellipsen der betrachteten Ebene mit verschiedenen Niveaulächen $F(x)=const.$ sind dazu konzentrisch und ähnlich. Das Minimum von $F(x)$ in dieser Ebene liegt daher im gemeinsamen Mittelpunkt der Ellipsen. Damit dieser Mittelpunkt von $x^{(i)}$ aus auf der neuen Relaxationsrichtung $p^{(i)}$ zu liegen kommt, müssen $p^{(i)}$ und $p^{(i-1)}$ konjugiert sein. Sie müssen konjugiert sein in bezug auf jede Ellipse $F(x)=const.$ und haben daher die folgende Bedingung zu erfüllen.

$$p^{(i)T} N p^{(i-1)} = p^{(i)T} N^T p^{(i-1)} = 0 \quad (2.21)$$

Geht man vom zweidimensionalen Raum auf einen m - dimensionalen Raum über, so werden die Niveaulinien zu Niveaulächen und damit die Ellipsen zu Ellipsoiden

oder Hyperellipsoiden. Die im Bild 2.7 dargestellte Zeichnung stellt nun die Situation in einer Schnittebene des Paraboloids dar. Der Richtungsvektor $p^{(i)}$ liegt in der durch $p^{(i-1)}$ und $r^{(i)}$ aufgespannten Ebene und läßt sich daher als Linearkombination von $r^{(i)}$ und $p^{(i-1)}$ darstellen. Da der Koeffizient von $r^{(i)}$ sicher von Null verschieden ist, kann er im Sinne einer Normierung gleich -1 gesetzt werden.

$$p^{(i)} = -r^{(i)} + e_i p^{(i-1)} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22)$$

Der unbekannte Wert e_i läßt sich durch die Bedingung der konjugierten Richtung (2.21) errechnen, wenn man (2.22) einsetzt.

$$-r^{(i)T} N p^{(i-1)} + e_i p^{(i-1)T} N p^{(i-1)} = 0 \quad (2.23)$$

$$e_i = \frac{(r^{(i)})^T N p^{(i-1)}}{(p^{(i-1)})^T N p^{(i-1)}} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

In der so errechneten Relaxationsrichtung $p^{(i)}$ geht man bis zum Minimalpunkt (siehe Formel (2.10)),

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + q_i p^{(i)} \quad (2.25)$$

mit

$$q_i = - \frac{(r^{(i)})^T p^{(i)}}{(p^{(i)})^T N p^{(i)}} \quad (2.26)$$

Man beachte, daß die Nenner der Ausdrücke für q_0 , e_i und q_i infolge der positiven Definitheit von N für jeden von Null verschiedenen Richtungsvektor $p^{(i)}$ positiv sind.

Nach dem ausgeführten $(i-1)$ -ten Relaxationsschritt ist $x^{(i)}$ Minimalpunkt in der von $r^{(i-1)}$ und $p^{(i-1)}$ beziehungsweise von $r^{(i-1)}$ und $p^{(i-2)}$ aufgespannten

zweidimensionalen Ebene. Der neue Residuenvektor $r^{(i)}$ als Gradient von $F(x)$ ist orthogonal zu dieser Ebene, so daß folgende Relationen gelten:

$$r^{(i)T} r^{(i-1)} = 0 \quad (2.27)$$

$$r^{(i)T} p^{(i-1)} = 0 \quad (2.28)$$

$$r^{(i)T} p^{(i-2)} = 0 \quad (2.29)$$

Mit Hilfe dieser neuen Beziehungen kann eine neue Berechnungsmöglichkeit für q_i und e_i angegeben werden: Zunächst betrachten wir den Zähler von q_i in Formel (2.26) und formen diesen mit Hilfe von (2.22) und (2.28) um:

$$\begin{aligned} r^{(i)T} p^{(i)} &= - r^{(i)T} r^{(i)} + e_i r^{(i)T} p^{(i-1)} = \\ &= - r^{(i)T} r^{(i)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Damit ergibt sich eine neue Form für (2.26) mit

$$q_i = \frac{(r^{(i)})^T r^{(i)}}{(p^{(i)})^T N p^{(i)}} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

Wenn $r^{(i)} \neq 0$ ist, so ergibt sich wegen der positiver Definitheit von N , daß $q_i > 0$ ist. Um die Formel zur Berechnung von e_i (2.24) einfacher zu gestalten, betrachtet man zunächst die Formel für den Residuenvektor $r^{(i)}$ (2.12).

$$\begin{aligned} r^{(i)} &= N x^{(i)} + n = N x^{(i-1)} + q_{i-1} N p^{(i-1)} + n = \\ &= r^{(i-1)} + q_{i-1} N p^{(i-1)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Daraus ergibt sich

$$N p^{(i-1)} = \frac{1}{q_{i-1}} (r^{(i)} - r^{(i-1)}) \quad (2.33)$$

Der Zähler von e_i (2.24) erhält mit (2.33) und wegen (2.27) die neue Form

$$\begin{aligned} r^{(i)T} N p^{(i-1)} &= \frac{1}{q_{i-1}} (r^{(i)T} r^{(i)} - r^{(i)T} r^{(i-1)}) \\ &= \frac{1}{q_{i-1}} r^{(i)T} r^{(i)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

womit man durch Einsetzen von q_{i-1} (Formel (2.31)) e_i folgendermaßen ermitteln kann.

$$e_i = \frac{(r^{(i)})^T r^{(i)}}{(r^{(i-1)})^T r^{(i-1)}} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.35)$$

Aus der Formel (2.35) ist ersichtlich, daß $e_i \neq 0$ ist, solange $r^{(i)} \neq 0$ gilt.

Aus dem oben Gesagten ergibt sich beim Verfahren der konjugierten Gradienten, daß die Relaxationsrichtungen $p^{(i)}$ ($i=0,1,2, \dots$) ein System von konjugierten Richtungen in bezug auf die Matrix N bilden. Die Residuenvektoren $r^{(i)}$ ($i=0,1,2, \dots$) stehen aufeinander orthogonal, was man mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen kann (siehe H.R.Schwarz [1968] S.73). Der von den Spalten von N aufgespannte Raum muß daher nach $Rg(N)$ Schritten durchwandert sein, womit sich eine strenge Lösung ergibt, da kein neuer Residuenvektor in diesem Raum gebildet werden kann, der orthogonal auf alle vorhergehenden steht. Das Verfahren der konjugierten Gradienten ist somit theoretisch ein endlicher Prozeß.

Bei der numerischen Durchführung zeigen sich Abweichungen der Orthogonalitäten der Residuenvektoren durch numerische Instabilitäten. Da die Lösung in jedem Schritt verbessert wird, kann die Iteration über die theoretische Grenze von $Rg(N)$ Schritten geführt werden und so die Genauigkeit der Lösung weiter gesteigert werden. Die Konvergenz ist durch diese Relaxationsmethode gewährleistet, da sich der Wert $F(x)$ bei jedem Schritt verringert (siehe Formel (2.11)).

Formelzusammenstellung:

$x^{(0)}$... Näherungslösung

$$r^{(0)} = N x^{(0)} + n$$

$$p^{(0)} = - r^{(0)}$$

Für den i - ten Relaxationsschritt ($i = 0, 1, 2, \dots$) gilt

$$\left. \begin{aligned} e_i &= \frac{(r^{(i)})^T r^{(i)}}{(r^{(i-1)})^T r^{(i-1)}} \\ p^{(i)} &= - r^{(i)} + e_i p^{(i-1)} \end{aligned} \right\} \text{für } i \geq 1$$

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{(r^{(i)})^T r^{(i)}}{(p^{(i)})^T N p^{(i)}} \\ x^{(i+1)} &= x^{(i)} + q_i p^{(i)} \\ r^{(i+1)} &= r^{(i)} + q_i N p^{(i)} \end{aligned} \right\} \text{für } i \geq 0 \quad (2.36)$$

2.4 Die Anwendung der konjugierten Gradienten in der Ausgleichsrechnung

Der vermittelnde Ausgleich:

$$A x - l = v \quad \text{Verbesserungsgleichungen} \quad (2.37)$$

$$A^T A x - A^T l = 0 \quad \text{Normalgleichungen} \quad N x - n = 0 \quad (2.38)$$

Nach der Einführung eines Näherungsvektors ergibt sich damit

$$A x^{(i)} - \underline{l} = v^{(i)} \quad x^{(i)} \dots \text{Näherungsvektor} \quad (2.39)$$

$v^{(i)}$... Verbesserungsvektor zu $x^{(i)}$ gehörig

$$N x^{(i)} - n = r^{(i)} \quad r^{(i)} \dots \text{Residuenvektor} \quad (2.40)$$

$$A^T A x^{(i)} - A^T \underline{l} = r^{(i)} \quad (2.41)$$

$$A^T v^{(i)} = r^{(i)} \quad \text{Orthogonalitätsdefekt} \quad (2.42)$$

Setzt man die so gewonnenen Ausdrücke in die Formeln der konjugierten Gradienten (2.36) ein, so kann man den Nenner von q_i auf folgende Weise darstellen:

$$p^{(i)T} N p^{(i)} = p^{(i)T} A^T A p^{(i)} = (A p^{(i)})^T (A p^{(i)}) \quad (2.43)$$

Die Formel für $r^{(i+1)}$ (2.36) kann man umformen in

$$\begin{aligned} r^{(i+1)} &= r^{(i)} + q_i N p^{(i)} = A^T v^{(i)} + q_i N p^{(i)} \\ &= A^T v^{(i)} + q_i A^T A p^{(i)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Mit der Gleichung (2.42) für den $(i+1)$ -ten Schritt ergibt sich

$$v^{(i+1)} = v^{(i)} + q_i A p^{(i)} \quad (2.45)$$

Im folgenden werden nun die Formeln zusammengestellt, die zur direkten Berechnung der ausgeglichenen Unbekannten aus den Verbesserungsgleichungen mit Hilfe der konjugierten Gradientenmethode dienen.

$$v^{(0)} = A x^{(0)} - \underline{b}$$

$$r^{(0)} = A^T v^{(0)}$$

$$p^{(0)} = - r^{(0)}$$

Für den i - ten Relaxationsschritt ($i = 0, 1, 2, \dots$) gilt

$$\left. \begin{aligned} e_i &= \frac{(r^{(i)})^T r^{(i)}}{(r^{(i-1)})^T r^{(i-1)}} \\ p^{(i)} &= - r^{(i)} + e_i p^{(i-1)} \end{aligned} \right\} \text{für } i \geq 1$$

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{(r^{(i)})^T r^{(i)}}{(A p^{(i)})^T A p^{(i)}} \\ x^{(i+1)} &= x^{(i)} + q_i p^{(i)} \\ v^{(i+1)} &= v^{(i)} + q_i A p^{(i)} \\ r^{(i+1)} &= A^T v^{(i+1)} \end{aligned} \right\} \text{für } i \geq 0 \tag{2.46}$$

Bei Benützung dieser Formeln müssen pro Iterationsschritt zwei Operationen der Art "Matrix mal Vektor" durchgeführt werden; dafür erspart man sich die Aufstellung der Normalgleichungsmatrix N . Auf Grund der schwachen Besetzung der Verbesserungsgleichungen können diese Produkte sehr rasch berechnet werden.

Aus den vorhergehenden Formeln (2.46) für den neuen Residuenvektor $r^{(i+1)}$ erkennt man, daß sich der Residuenvektor als Folge der Nichtorthogonalität des genäherten Verbesserungsvektors $v^{(i+1)}$ zu den Spalten der Koeffizientenmatrix A ergibt. Durch die oben angeführte Wahl der Relaxationsrichtung $p^{(i)}$ und des Längenfaktors q_i (Formel (2.46)) erreicht man, daß der neue Residuenvektor $r^{(i+1)}$ orthogonal auf den vorhergehenden Residuenvektor $r^{(i)}$ steht (siehe Formel (2.27)). Zweitens erreicht man damit, daß man sich nur in dem von den Zeilen von A aufgespannten m -dimensionalen Unterraum bewegt ($m = \text{Rg}(A)$), in dem auch die Beobachtungen dargestellt sind. Diese Bemerkung ist im Kapitel 4 bei der

Berechnung von frei schwimmenden Netzen von Bedeutung.

Wie im Folgenden bewiesen wird, hat die Methode der konjugierten Gradienten die Eigenschaft, daß der Betrag des Verbesserungsvektors monoton abnimmt. (Der Betrag des Residuenvektors bildet keine monoton abnehmende Reihe. In der Regel nimmt der Betrag ab, jedoch bei schlechter Konditionierung oder bei Rangdefekten kann er zwischendurch auch ansteigen.) Berechnet man mit Hilfe von (2.45) den Betrag des Verbesserungsvektors $v^{(i)}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} v^{(i)}{}^T v^{(i)} &= (v^{(i+1)} - q_1 A p^{(i)})^T (v^{(i+1)} - q_1 A p^{(i)}) \\ &= v^{(i+1)}{}^T v^{(i+1)} - v^{(i+1)}{}^T q_1 A p^{(i)} - \\ &\quad - q_1 (A p^{(i)})^T v^{(i+1)} + q_1^2 (A p^{(i)})^T A p^{(i)} \quad , \quad (2.47) \end{aligned}$$

wobei wegen (2.28) gilt

$$v^{(i+1)}{}^T A p^{(i)} = (A^T v^{(i+1)})^T p^{(i)} = r^{(i+1)}{}^T p^{(i)} = 0 \quad (2.48)$$

$$(A p^{(i)})^T v^{(i+1)} = 0 \quad (2.49)$$

Somit erhält man die Formel (2.50) für die Veränderung des Betrages des Verbesserungsvektors nach der Durchführung eines Relaxationsschrittes.

$$(v^{(i+1)})^T v^{(i+1)} = (v^{(i)})^T v^{(i)} - q_1^2 (A p^{(i)})^T A p^{(i)} \quad (2.50)$$

Da der zweite Ausdruck der rechten Seite eine quadratische Form darstellt, kann dieser Ausdruck nur positiv oder Null sein. Der Ausdruck wird zu Null, wenn $p^{(i)}=0$, daß heißt, wenn die Lösung erreicht ist oder die Matrix der Verbesserungsgleichungen nicht vollen Spaltenrang besitzt.

Bei der Lösung von größeren Systemen von Verbesserungsgleichungen in der Geodäsie beobachtete H.R.Schwarz [1970], daß der Wert des Quadrates des Verbesserungsvektors oft schon nach relativ wenigen Iterationsschritten seinen

minimalen Wert erreicht, auch wenn das Quadrat des Residuenvektors noch nicht den Wert Null im Sinne der Maschinengenauigkeit erreicht hat. Der Rechenprozeß kann dennoch abgebrochen und die erhaltene Näherung als Lösung angenommen werden.

3. Anwendungsergebnisse der konjugierten Gradienten bei geodätischen Netzen

3.1 Bisherige Ergebnisse

Bei einer Studie über den Einsatz der konjugierten Gradientenmethode zur Lösung großer, schwach besetzter, symmetrischer Gleichungssysteme stellte L. Gründig [1980] fest:

- * Die konjugierte Gradientenmethode arbeitet gut für Ausgleichungen mit Zwangspunkten. Die Konvergenz hängt stark von der Anzahl und der Lage der Festpunkte ab, besonders bei Triangulierungsnetzen. Diese Methode soll nicht für freie Richtungsnetze verwendet werden. Bei Polygonnetzen ist eine gute Konvergenz zu beobachten.
- * Die globalen Änderungen der Unbekannten zu ihren endgültigen Werten sind während der Iteration sehr klein. Ein Grund dafür könnte sein, daß kleine lokale Diskrepanzen diese globalen Bewegungen absorbieren. Diese Tendenzen treten vor allem bei freien Netzen auf.
- * Die Konvergenz bei Strecken- und Polygonnetzen ist besser als bei Richtungsnetzen. Durch eine schlechte Maßstabsbestimmung kann die bessere Konvergenz gestört werden.
- * Vorkonditionierungen mit Diagonalmatrizen und Dreiecksmatrizen erhöhen die Rechenzeit und bringen keine Vorteile.
- * Die Anwendung der Methode der konjugierten Gradienten auf die Beobachtungsgleichungen und die Lösung der reduzierten Normalgleichungen (Orientierungs- und Maßstabsunbekannte eliminiert)

benötigen ungefähr den gleichen Zeitaufwand.

- * Als Abbruchskriterium wird der Betrag des Residuenvektors verwendet, für den gilt: $|\Delta x| \leq |N^{-1}| |r|$.

Folgende Ergebnisse stellte F. Steidler [1980] in seiner Dissertation fest:

- * Der Vergleich der direkten Methode zum Verfahren der konjugierten Gradienten fällt zu Gunsten der direkten Techniken aus.
- * Bei gut konditionierten Netzen benötigt das konjugierte Gradientenverfahren weniger Rechenzeit.
- * Geringerer Speicherbedarf beim konjugierten Gradientenverfahren.
- * Starke Abhängigkeit der Konvergenz von der Wahl der Festpunkte.
- * Vorwegelimination der Orientierungsunbekannten bringt keine Zeitersparnis und wird daher nicht empfohlen.
- * Skalierung wird empfohlen.
- * Vorkonditionierung erhöht die Rechenzeit. Nur bei schlecht konditionierten Fällen soll eine Vorkonditionierung erfolgen.

Eine in den letzten Jahren entwickelte Vorkonditionierungsmethode, die Methode der partiellen Choleskyzerlegung, wurde von B. Benciolini, L. Mussio und F. Sansó [1980] an geodätischen Netzen getestet. Bei dieser Methode, die auch bei H.R. Schwarz [1982] beschrieben ist, wird die Vorkonditionierungsmatrix durch eine partielle Cholesky-Zerlegung der aufzulösenden Matrix errechnet. Diese

Berechnung wird analog zur exakten Choleskyzerlegung durchgeführt, nur daß die Füllelemente bei der Berechnung vernachlässigt werden. Mit dieser Vorkonditionierungsmethode wird versucht, alle Eigenwerte auf eine Größe zu bringen, womit eine wesentliche Steigerung der Konvergenz der Methode der konjugierten Gradienten möglich wird. Dies liegt darin begründet, daß aus dem Ellipsoid mit stark unterschiedlichen Achslängen ein Ellipsoid mit fast gleichen Achslängen gebildet wird, wobei der Mittelpunkt dieses Ellipsoids mit Hilfe der Methode der konjugierten Gradienten rasch ermittelt werden kann. Wie in der oben erwähnten Arbeit dargestellt ist, können mit dieser Methode der partiellen Choleskyzerlegung nicht alle Eigenwerte in die gleiche Größenordnung gebracht werden, womit wieder unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeiten vorhanden sind. Bei regelmäßigen Höhennetzen wird eine gute Konvergenz der Methode der konjugierten Gradienten erreicht, sodaß sich ungefähr gleiche Rechenzeiten wie bei Profilalgorithmen ergeben. Bei Streckennetzen konnte die Konvergenz auch gesteigert werden, jedoch bedingt durch den Aufwand der Vorkonditionierung werden längere Rechenzeiten als bei der direkten Methode erzielt.

3.2 Durchgeführte Berechnungen

Bei den nachfolgenden Berechnungen werden mit Hilfe des Formelsystems (2.46) Höhen-, Strecken- und Richtungsnetze berechnet. Es wird keine Vorkonditionierung durchgeführt, da sich der größere Rechenaufwand nur bei schlecht konditionierten Fällen rechtfertigt. Durch entsprechende Wahl der Koeffizienten in den Beobachtungsgleichungen wird versucht, die Größenordnung der Koeffizienten der Normalgleichung gleich groß zu halten. Eine Skalierung der Normalgleichungsmatrix wird daher nicht durchgeführt.

In den folgenden Abschnitten wird an Hand von regelmäßigen und unregelmäßigen Netzen das Konvergenzverhalten der Methode der konjugierten Gradienten dargestellt. Es werden verschiedene Varianten der Netzlagerung berechnet.

Anschließend wird das Verhalten bei der gemeinsamen Berechnung unabhängiger Netze und bei der stufenweisen Berechnung eines Netzes untersucht.

3.2.1 Berechnungen bei geodätischen Höhennetzen

Dieser Untersuchung wird ein regelmäßiges Höhennetz mit 200 Stationen zugrundegelegt. Die 370 Beobachtungen sind widerspruchsfrei angenommen. Der Lage und Beobachtungsplan ist im Bild 3.1 dargestellt. Die Soll-Höhen werden mit Hilfe eines Zufallsgenerators um maximal ± 500 Einheiten abgeändert und als Näherungsunbekannte verwendet. In der Folge werden zwei Fälle berechnet, wobei im ersten Fall drei Festpunkte in regelmäßig verteilter Randlage (Bild 3.2) angenommen werden. Beim zweiten Fall wird nur ein Punkt am Rand festgehalten (Bild 3.4). Die Festpunkte sind durch das Symbol " Δ " gekennzeichnet.

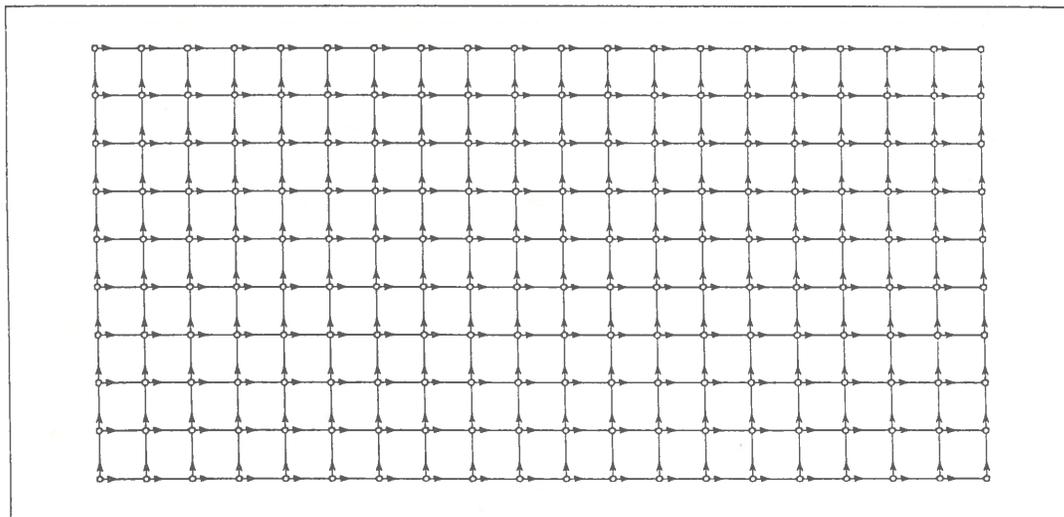


Bild 3.1: Regelmäßiges Höhennetz;
Lage- und Beobachtungsplan

In der ersten Variante (Bild 3.2) mit den drei Festpunkten wird eine sehr rasche Konvergenz bei der konjugierten Gradientenmethode erreicht. Nach zehn Relaxationsschritten hat sich der maximale Fehler auf 10% der Ausgangsfehler verringert (Bild 3.2). Nach weiteren zehn Relaxationen sind die Fehler wieder

um 1/10, das heißt auf 1% der Fehler der Näherungswerte, gesunken (Bild 3.3).

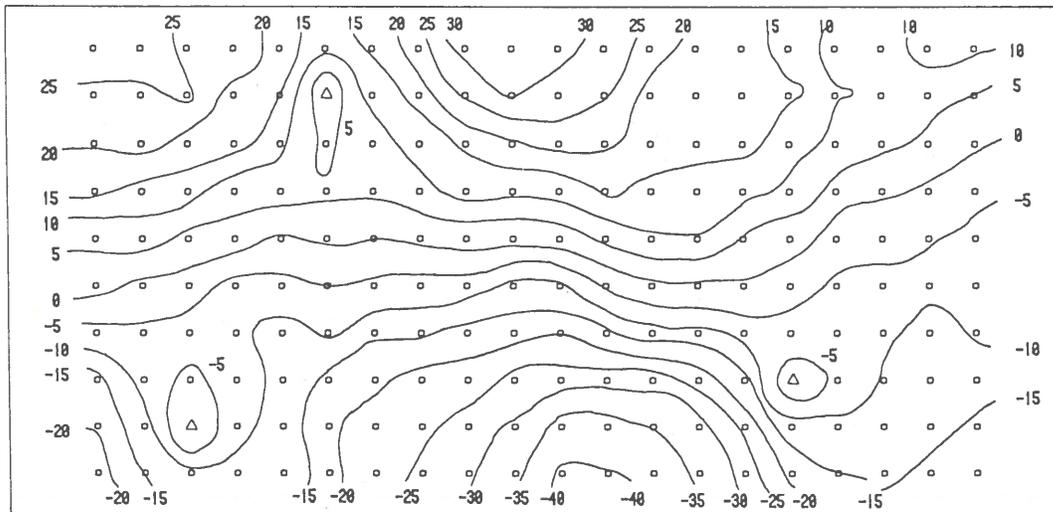


Bild 3.2: Höhenetz, Fall 1;
Restfehler nach 10 Relaxationsschritten

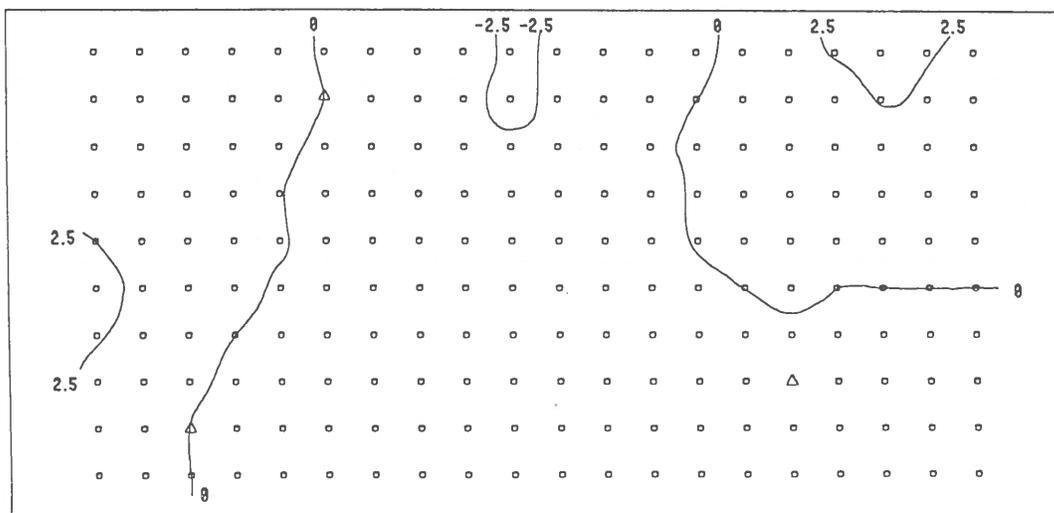


Bild 3.3: Höhenetz, Fall 1;
Restfehler nach 20 Relaxationsschritten

Im zweiten Fall wird nur ein Punkt am Rande des Netzes festgehalten. Diese Konfiguration der absoluten Höhenfestlegung stellt einen sehr ungünstigen Fall bei der Berechnung mit konjugierten Gradienten dar (siehe F. Steidler [1980]). Wie auf Grund der Darstellungen 3.4 bis 3.6 erkennbar ist, konvergiert die Berechnung nun wesentlich langsamer.

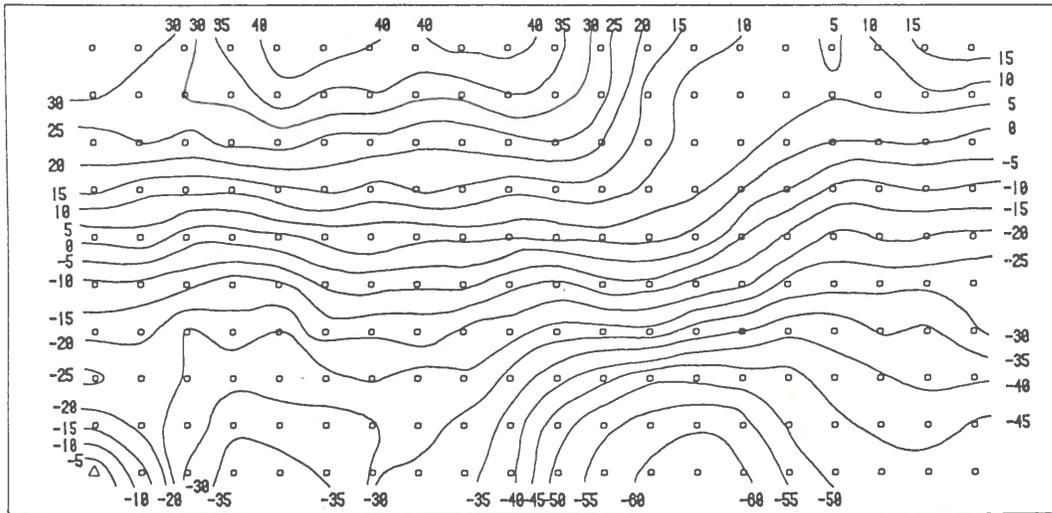


Bild 3.4: Höhennetz, Fall 2;
Restfehler nach 10 Relaxationsschritten

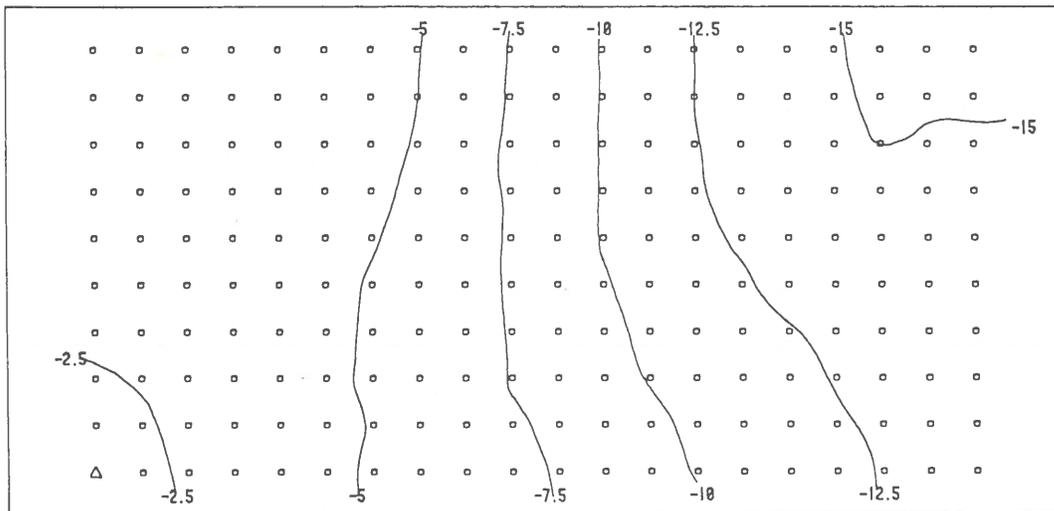


Bild 3.5: Höhennetz, Fall 2;
Restfehler nach 30 Relaxationsschritten

Es werden an die 60 Iterationen benötigt, um ein Absinken des Unterschiedes der genäherten Lösung von der Sollösung auf unter 1 % zu erreichen.

In beiden zuvor besprochenen Fällen ist jedoch schon nach wenigen Relaxationsschritten eine sehr gute Nachbarschaftsgenauigkeit zu erkennen. Die Genauigkeit zwischen nicht unmittelbar durch eine Beobachtung verbundene Punkte kann nur durch viele Relaxationsschritte gesteigert werden.

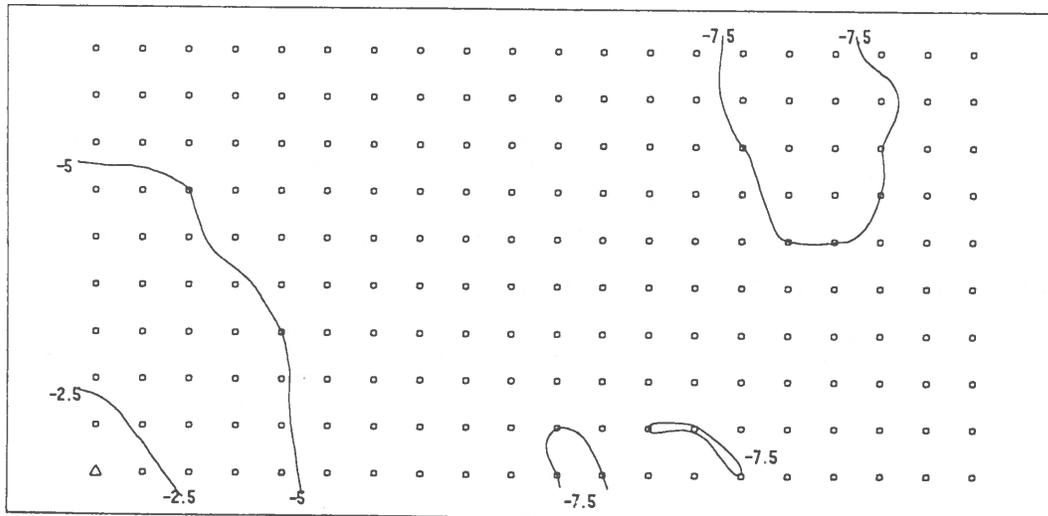


Bild 3.6: Höhenetz, Fall 2;
Restfehler nach 50 Relaxationsschritten

3.2.2 Berechnungen bei geodätischen Streckennetzen

Als Grundnetz wird ein Streckennetz (Bild 3.7) mit 225 Stationen und 812 widerspruchsfreien Streckenbeobachtungen verwendet. Die Lagekoordinaten der Stationen bilden ein zufällig gestörtes Gitter, wobei die maximale Störung in der Größenordnung von $\pm 5\%$ des Abstandes der Stationspunkte liegt. Dieses Netz wird für vier Fälle berechnet. Die Fälle 1, 2 und 3 unterscheiden sich untereinander nur durch die Anzahl und die Lage der Festpunkte. Im Fall 1 (Bild 3.8) werden ein Festpunkt in der Nähe des Schwerpunktes und ein Festpunkt in Randlage angenommen. Fünf auf das gesamte Netz verteilte Festpunkte weist der Fall 2 (Bild 3.10) auf. Im Fall 3 (Bild 3.12) werden zwei Festpunkte in Randlage angenommen, wobei diese Festpunkte nur durch eine Station getrennt sind. Für den vierten Fall (Bild 3.15) wird die regelmäßige Lage der Stationen gestört, sodaß die maximale Störung in einer Größenordnung liegt, die dem halben Abstand der regelmäßigen Stationen entspricht.

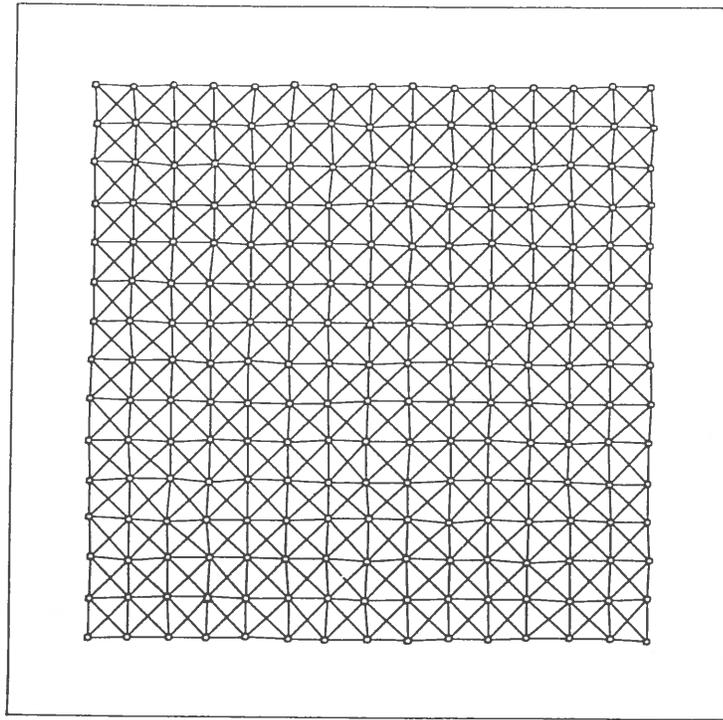


Bild 3.7: Regelmäßiges Streckennetz;
Lage- und Beobachtungsplan

In den Fällen 1 bis 3 bildet sich nach fünf Relaxationsschritten ein regelmäßiges Muster der Restfehler der Unbekannten für bestimmte Gebiete heraus. Diese gebietsweise regelmäßigen Muster der Restfehler weisen nach ungefähr 50 Relaxationsschritten schon einen ruhigen Verlauf im Gesamtgebiet auf. Bei den nachfolgenden Bildern (Bilder 3.8 bis 3.16) werden jeweils die Vektoren der Restfehler dargestellt. Der Maßstab der Vektoren ist durch die Längenangabe für 10% der ursprünglichen Fehler mit der Angabe $f_{10\%}$ am unteren Rand jedes Bildes erkennbar.

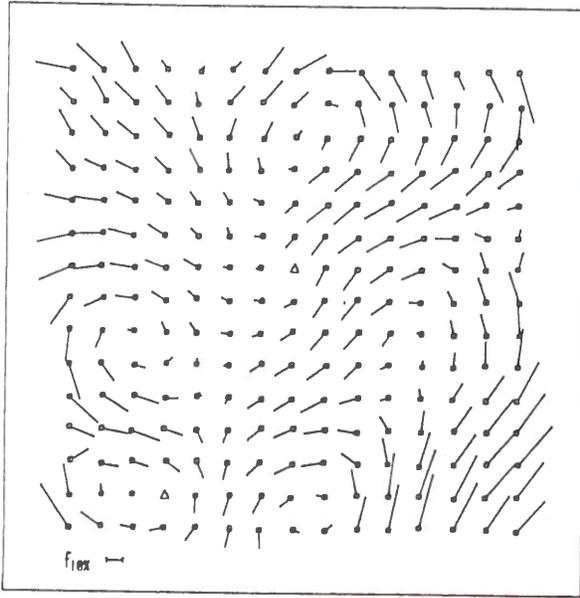


Bild 3.8: Streckennetz, Fall 1;
Restfehler nach 5
Relaxationsschritten

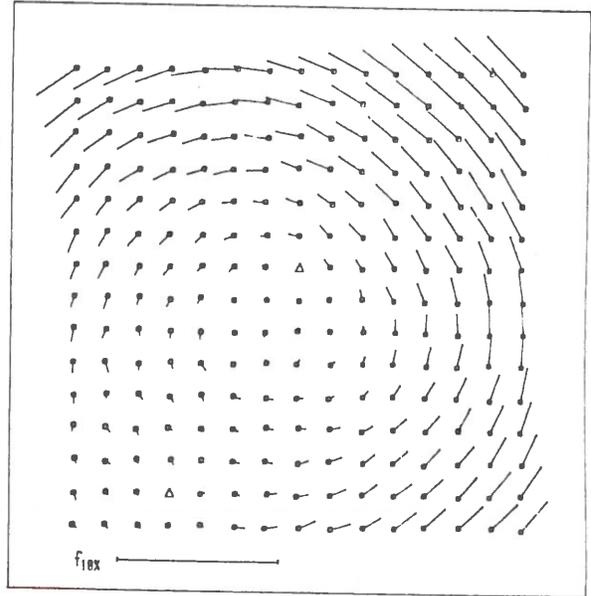


Bild 3.9: Streckennetz, Fall 1;
Restfehler nach 50
Relaxationsschritten

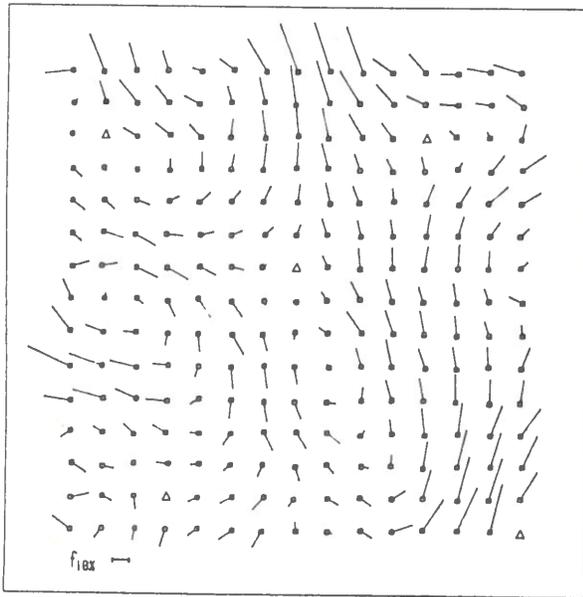


Bild 3.10: Streckennetz, Fall 2;
Restfehler nach 5
Relaxationsschritten

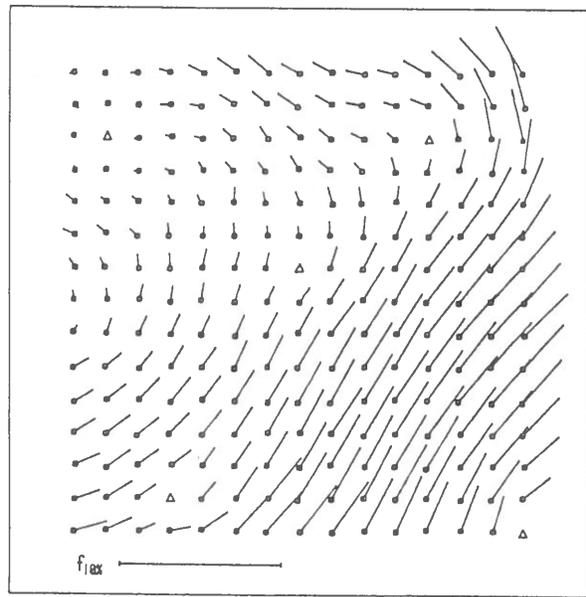


Bild 3.11: Streckennetz, Fall 2;
Restfehler nach 25
Relaxationsschritten

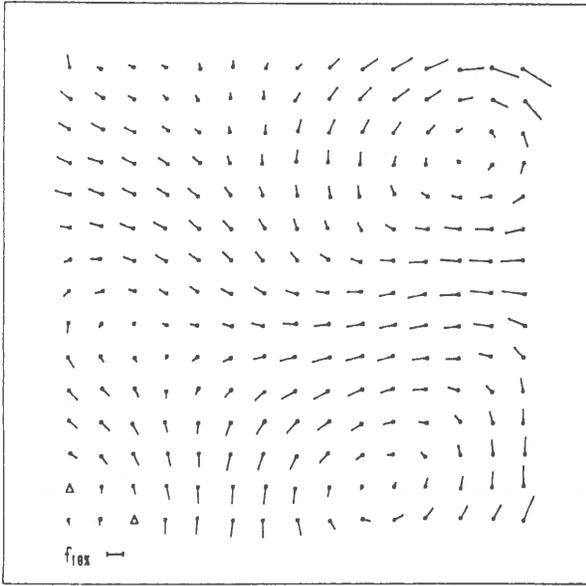


Bild 3.12: Streckennetz, Fall 3;
Restfehler nach 10
Relaxationsschritten

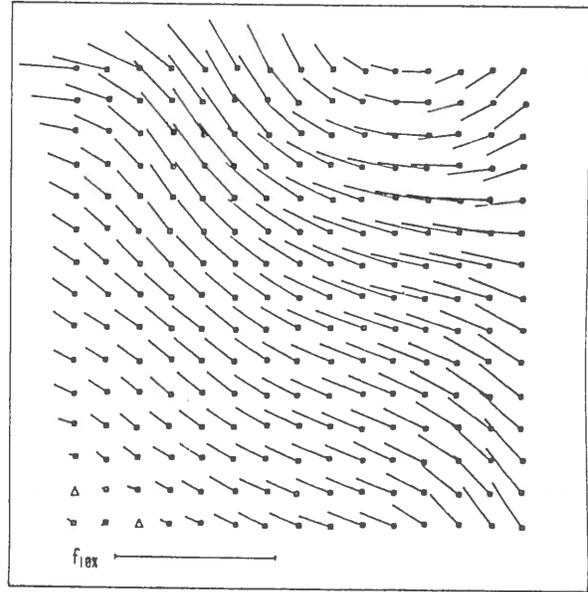


Bild 3.13: Streckennetz, Fall 3;
Restfehler nach 25
Relaxationsschritten

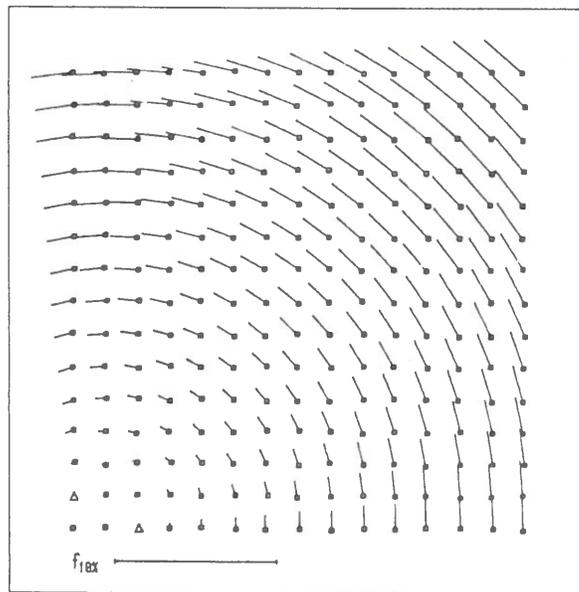


Bild 3.14: Streckennetz, Fall 3;
Restfehler nach 60 Relaxationsschritten

Um die globalen Restfehler zu eliminieren, sind viele Relaxationsschritte notwendig. In den drei gezeigten Fällen kann nach ungefähr 100,75 beziehungsweise 150 Iterationen der Rechenprozeß abgebrochen werden, da dann die Restfehler nur mehr weniger als 1% der Verbesserung des Näherungsvektors betragen.

Für den Fall 4 werden die Lagekoordinaten der Stationen zufällig verändert, wobei die maximale Größenordnung der Veränderungen den halben Stationsabstand der Fälle 1,2 und 3 beträgt. Der Beobachtungsplan (Bild 3.7) wird unverändert beibehalten und die Festpunktswahl so wie im Fall 1 (Bild 3.8) angenommen. Sowohl die Konvergenzgeschwindigkeit wie auch die Regelmäßigkeit der entsprechenden Fehlerfiguren ändert sich dabei nur unwesentlich. Nach ungefähr 100 Iterationen ist das gewünschte Ergebnis errechnet.

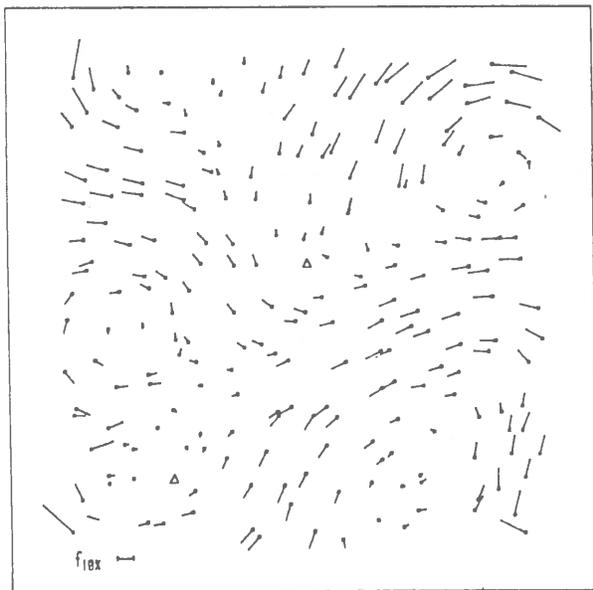


Bild 3.15: Streckennetz, Fall 4;
Restfehler nach 10
Relaxationsschritten

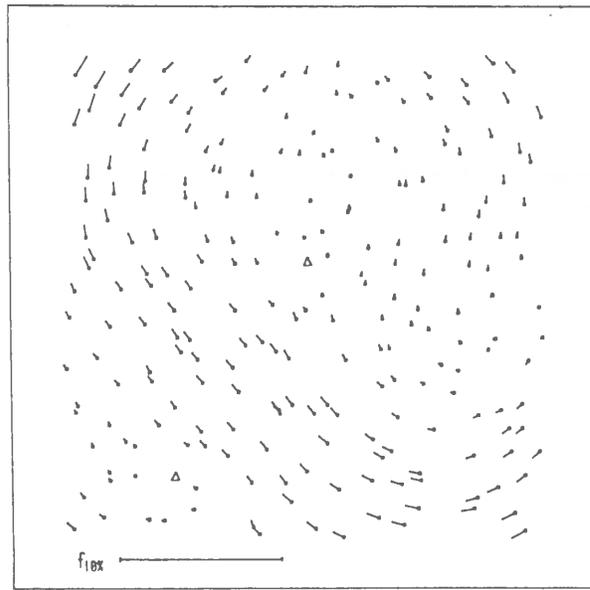


Bild 3.16: Streckennetz, Fall 4;
Restfehler nach 45
Relaxationsschritten

3.2.3 Berechnungen bei geodätischen Richtungsnetzen

Es wird ein regelmäßiges Richtungsnetz gerechnet. Das Netz beinhaltet 100 Stationen, wobei pro Station drei Unbekannte auftreten. Es werden zwei Punkte des Netzes festgehalten. Insgesamt ergeben sich damit 296 Unbekannte (196 Lageunbekannte, 100 Orientierungsunbekannte) bei 684 Richtungsmessungen (Bild 3.17). Schon nach 14 Relaxationsschritten erkennt man wieder das regelmäßige Muster der Restfehler.

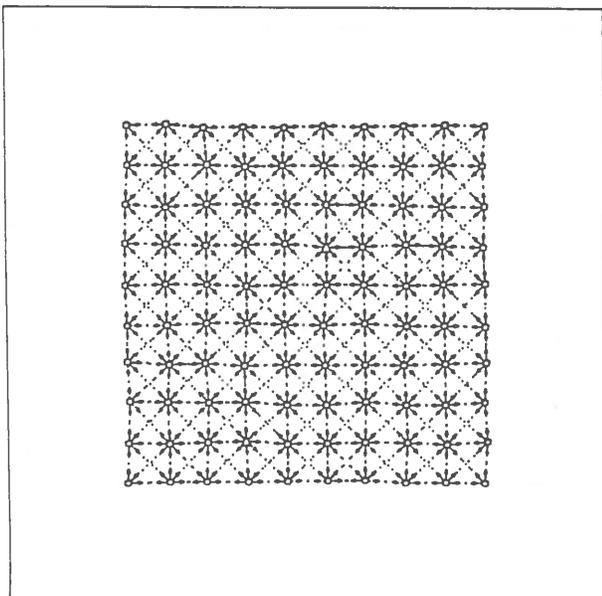


Bild 3.17: Richtungsnetz;
Lage- und Beobachtungsplan

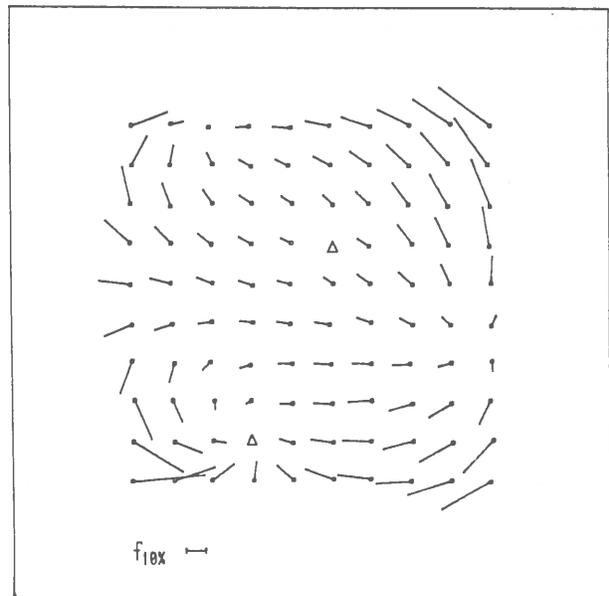


Bild 3.18: Richtungsnetz;
Restfehler nach 14
Relaxationsschritten

Nach weiteren 33 Schritten weisen die Unbekannten noch immer Fehler im Bereich von 5% des Fehlervektors der Näherungskordinaten auf. Es sticht deutlich der systematische Verlauf der Fehler und die gute Nachbarschaftgenauigkeit der vorläufigen Lösung heraus. Nach weiteren 49 Relaxationsschritten verringern sich die Fehler auf 2% des Fehlervektors und nach weiteren 54 Schritten beträgt der Restfehler 0.1% des Fehlervektors der Näherungskordinaten.

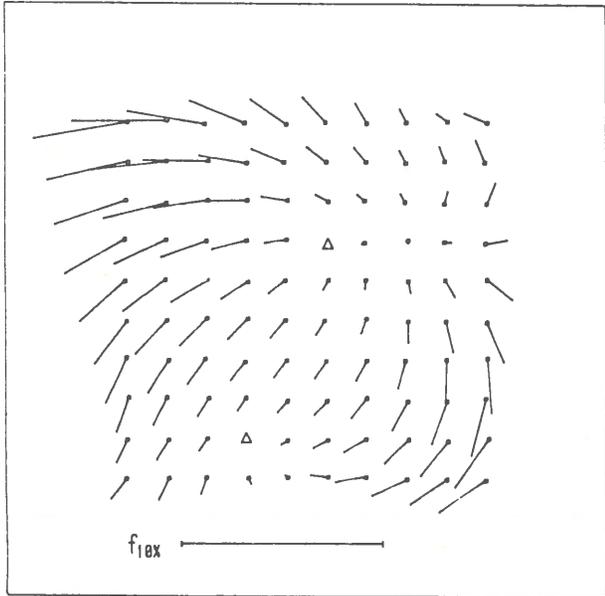


Bild 3.19: Richtungsnetz,
Restfehler nach 47
Relaxationsschritten

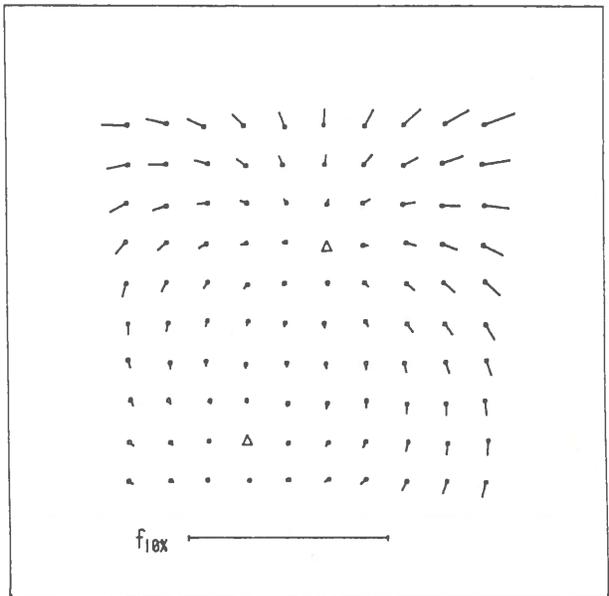


Bild 3.20: Richtungsnetz;
Restfehler nach 96
Relaxationsschritten

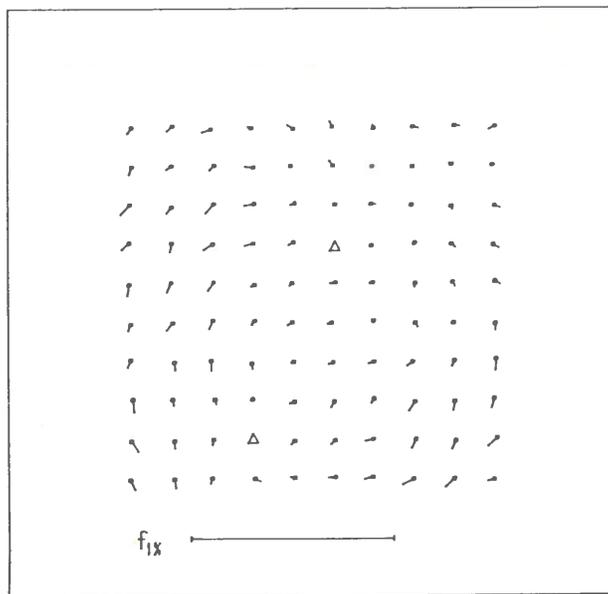


Bild 3.21: Richtungsnetz;
Restfehler nach 150 Relaxationsschritten

3.2.4 Gemeinsame Berechnung unabhängiger Netze

In diesem Abschnitt wird dargestellt, in welcher Weise sich zwei oder mehrere vollkommen unabhängige Netze bei der gemeinsamen Berechnung mit Hilfe der Methode der konjugierten Gradienten verhalten. Zu diesem Zweck wird das Gleichungssystem (3.1) auf zwei Arten berechnet. Diese Berechnung wird in den Bildern 3.22 und 3.23 veranschaulicht.

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 + 5x_4 &= 2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

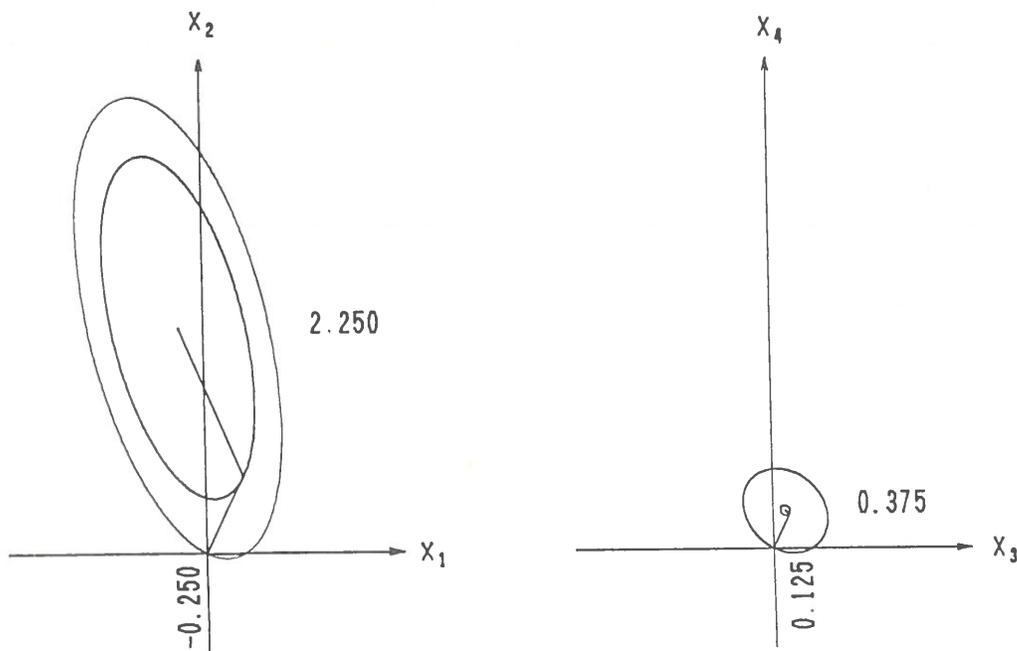


Bild 3.22: Zwei unabhängige Netze (je 2 Relaxationsschritte)

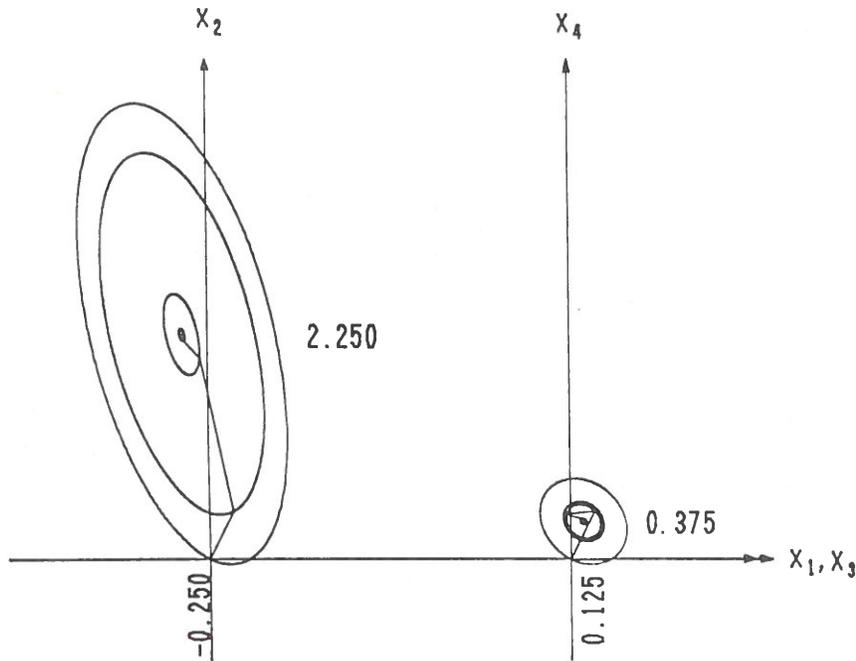


Bild 3.23: Zwei unabhängige Netze (4 Relaxationsschritte)
Projektion in die Teilräume

Das Gleichungssystem besteht aus zwei unabhängigen Gruppen mit jeweils zwei Unbekannten. Das Bild 3.22 zeigt das Ergebnis bei einer getrennten Berechnung der beiden Gruppen. Die linke (rechte) Darstellung zeigt die Berechnung und die Niveaulinien bei der ersten und zweiten (dritten und vierten) Zeile der Matrix (3.1). Die Methode der konjugierten Gradienten führt in beiden Fällen nach 2 Relaxationsschritten zur strengen Lösung. Im Bild 3.23 wird das Ergebnis der gemeinsamen Berechnung mit der Methode der konjugierten Gradienten dargestellt. Die beiden Bilder zeigen die Projektionen in die beiden orthogonalen Räume. Bei der gemeinsamen Berechnung wird erst nach 4 Relaxationsschritten die strenge Lösung erreicht.

Begründet durch die gemeinsame Berechnung des Längenfaktors q_i und auch des Faktors e_i zur Bestimmung der Relaxationsrichtung $p^{(1)}$ wird im allgemeinen nicht nach n_T -Schritten (n_T ist der Rang der Matrix eines Teilnetzes) eine strenge Lösung erreicht. Bei speziellen Annahmen (symmetrisches Teilnetz, siehe

Bild 5.4) kann es zu einem besseren Konvergenzverhalten kommen. Dies liegt darin begründet, daß die Anteile der letzten Relaxationsrichtungen und die Längenfaktoren für beide Netze auch bei getrennter Berechnung eine optimale Wahl darstellen würden, und daher der systematische Anteil der Restfehler schneller eliminiert wird.

3.2.5 Stufenweise Berechnung eines Netzes

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der Methode der konjugierten Gradienten bei der stufenweisen Berechnung von Netzen studiert. Teile des Netzes werden in einem ersten Schritt streng berechnet. In einem zweiten Schritt werden diese exakt berechneten Teilnetze zusammengefügt und das Gesamtnetz wird exakt ermittelt. Um das Konvergenzverhalten der Methode der konjugierten Gradienten zu studieren, wird ein fliegender Nivellementzug mit 41 Stationen berechnet. Der Nivellementzug wird in der Mitte (zwischen dem 21. und 22. Punkt) getrennt, sodaß zwei Teilzüge entstehen. Der erste Teilzug ist ein fliegender Zug mit einem Festpunkt zu Beginn und 20 Neupunkten. Der zweite Teilzug beinhaltet nur 20 Neupunkte und enthält keinen Festpunkt. Bei der ersten Berechnung wird die Lagerung dieses Zuges mit Hilfe der minimalen Abweichungen von den Näherungskordinaten durchgeführt. Durch die getrennte Berechnung ergeben sich im ersten Teilzug die endgültigen Koordinaten und im zweiten Teilzug die endgültigen Koordinaten plus einem durch die Lagerung bedingten konstanten Verschiebungsanteil. Diese Ausgangssituation ist im Bild 3.24 ersichtlich, wo die Restfehler, die während der zweiten Berechnung entstehen, dargestellt sind. Jeder Block von Linien bezeichnet die Restfehler eines Punktes während der Berechnung mit der konjugierten Gradientenmethode. Die linke Linie stellt den Restfehler dieses Punktes in den Näherungskordinaten dar. Jede weitere Linie zeigt die Fehler nach jeweils fünf Relaxationsschritten auf.



Bild 3.24: Fliegender Nivellementzug mit 41 Punkten;
Restfehler nach jeweils 5 Relaxationsschritten

Man erkennt im Bild 3.24 eine große Schwäche der Methode der konjugierten Gradienten. Der konstante Sprung in den Näherungskoodinaten, die nur mehr diesen Fehler aufweisen, kann nur mit vielen Schritten eliminiert werden, sodaß die Vorausberechnung von Netzteilen keine Vorteile für die gemeinsame Berechnung bringt.

3.2.6 Einfluß der Näherungskoodinaten auf die Restfehler

Das im Kapitel 3.2.2 dargestellte Streckennetz, Fall 4 (Bilder 3.15,3.16) wird mit unterschiedlichen Näherungswerten für alle Koodinaten berechnet. In den Bildern 3.25 beziehungsweise 3.26 sind zwei verschiedene Ausgangssituationen aufgezeigt. Die Vektoren stellen die zufällig erzeugten Abweichungen der Näherungskoodinaten von den Sollwerten dar. Die Lagedarstellung ist dabei um einen Faktor 1000 kleiner gezeichnet als die Darstellung der Restfehler. In den Bildern 3.27 und 3.28 beziehungsweise 3.29 und 3.30 sind die Situationen nach 10 beziehungsweise 30 Relaxationsschritten aufgezeigt, wobei die Restfehler in diesen Bildern 10 mal so groß wie in den Bildern 3.25 und 3.26 gezeichnet sind.

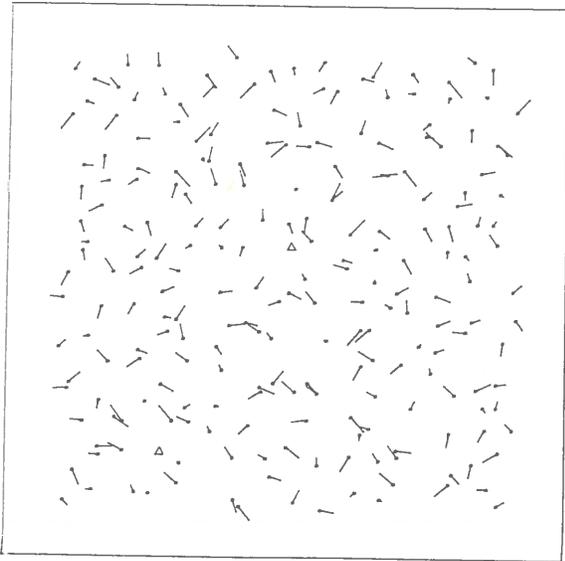


Bild 3.25: Streckennetz, Fall 4;
Näherungskoodinaten 1
Ausgangssituation

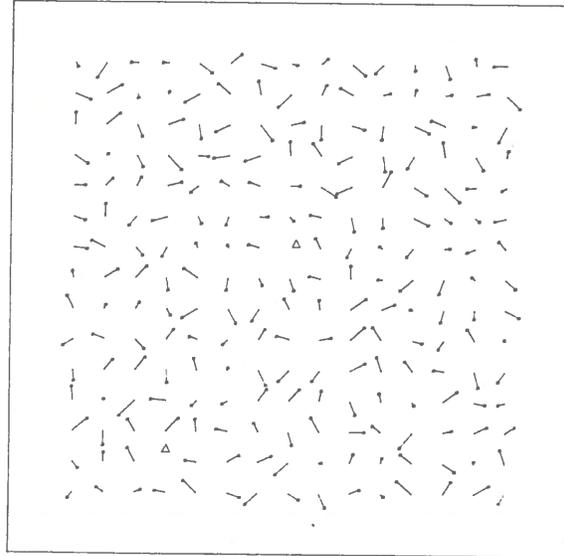


Bild 3.26: Streckennetz, Fall 4;
Näherungskoodinaten 2
Ausgangssituation

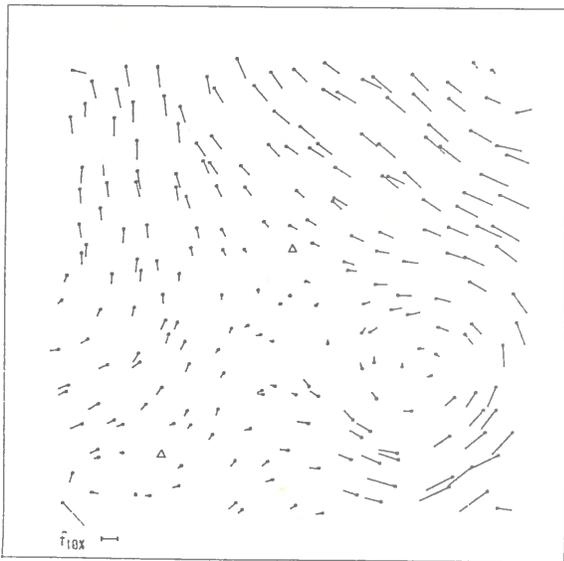


Bild 3.27: Streckennetz, Fall 4;
Näherungskoodinaten 1
Restfehler nach
10 Relaxationsschritten

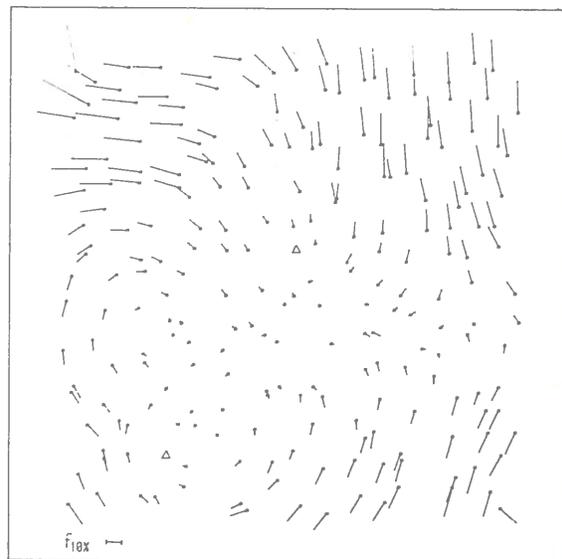


Bild 3.28: Streckennetz, Fall 4;
Näherungskoodinaten 2
Restfehler nach
10 Relaxationsschritten

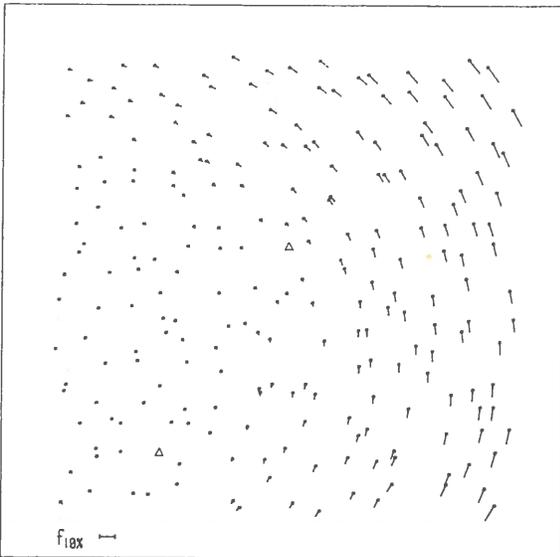


Bild 3.29: Streckennetz, Fall 4;
Näherungskoodinaten 1
Restfehler nach
30 Relaxationsschritten

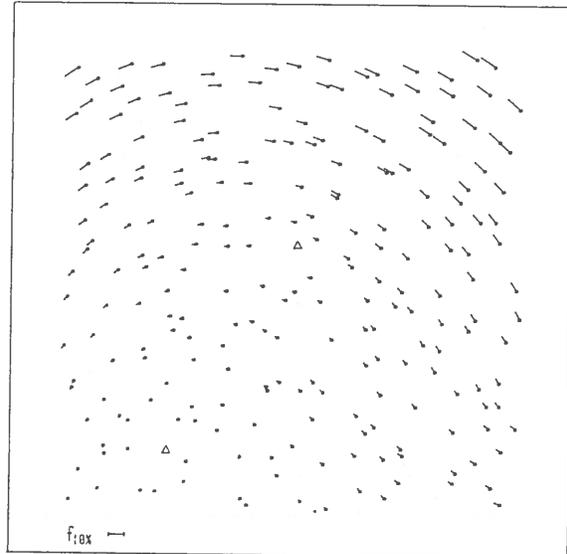


Bild 3.30: Streckennetz, Fall 4;
Näherungskoodinaten 2
Restfehler nach
30 Relaxationsschritten

Anhand der Bilder 3.27 bis 3.30 erkennt man, daß das Muster der Restfehler nach wenigen Relaxationsschritten noch sehr stark von den Näherungskoodinaten abhängig ist. Mit zunehmender Anzahl von Schritten zeigen diese Muster einen immer ähnlicheren Verlauf und werden bis auf das Vorzeichen immer unabhängiger von den Ausgangskoodinaten.

3.2.7 Zusammenfassung der Ergebnisse

Bei der Berechnung von geodätischen Höhen- und Lagenetzen tritt bei der Methode der konjugierten Gradienten immer das gleiche Konvergenzverhalten auf. Nach wenigen (ungefähr 10) Relaxationsschritten werden die Abweichungen auf ungefähr 20% der Abweichungen der Näherungskoodinaten gesenkt. Das Auftreten von systematischen Mustern weist auf eine gesteigerte Nachbarschaftsgenauigkeit (Genauigkeit zwischen Punkten, die durch Beobachtungen verbunden sind) hin. Bei

den weiteren Relaxationsschritten wird zunächst die Nachbarschaftsgenauigkeit erhöht (die Muster weisen immer weniger Störungen auf) und dann die Genauigkeit zwischen weit auseinanderliegenden Punkten gesteigert (die Muster werden großräumiger). Bis die absolute Genauigkeit der Station auf unter 1% der Fehler der Näherungskordinaten gesenkt werden kann, sind sehr viele Relaxationsschritte notwendig. Die Anzahl dieser Schritte zur Steigerung der absoluten Genauigkeit ist sehr stark von der Netzkonfiguration, der Netzausdehnung und der Lagerung abhängig.

Wie im Abschnitt 3.2.4 aufgezeigt wird, beeinflußt die gemeinsame Berechnung mehrerer unabhängiger Teilnetze das Konvergenzverhalten sehr wesentlich. Bei der Methode der konjugierten Gradienten erweist es sich als nicht sinnvoll, eine Ausgleichung in Stufen durchzuführen, wobei im ersten Schritt Teilnetze streng berechnet werden und in einem weiteren Schritt diese streng berechneten Teilnetze zusammengefügt werden.

Der Einfluß der Näherungskordinaten ist im Kapitel 3.2.6 aufgezeigt. Durch verschiedene Wahl der Näherungskordinaten wird das Muster der Restfehler verändert, wobei vor allem in der Phase der Beseitigung der absoluten Restfehler ein sehr ähnlicher Verlauf der Muster erkennbar ist.

4. Ausgleichung frei-schwimmender Netze mit der Gradientenmethode

Ausgehend von einem allgemeinen Gleichungssystem mit Rangdefekt, das auf folgende Art geschrieben wird,

$$N x - n = 0, \quad N \dots m \times m \text{ Matrix}, \quad u = \text{Rg}(N), \quad (4.1)$$

soll ein Unbekanntenvektor so bestimmt werden, daß der Betrag des Lösungsvektors x beziehungsweise das innere Produkt $x^T x$ zu einem Minimum wird. Das Gleichungssystem $N x - n = 0$ tritt dabei als Nebenbedingung auf.

$$F(x, \lambda) = x^T x - 2\lambda^T (N x - n) \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x} = x^T - \lambda^T N = 0 \quad (4.3)$$

$$x = N^T \lambda \quad (4.4)$$

Um den Lösungsvektor eines singulären linearen Gleichungssystems zu minimieren, muß folgendes erfüllt sein:

- 1.) $N x - n = 0$... x ist eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.
- 2.) $x = N^T \lambda$... x setzt sich aus einer Linearkombination der Zeilen der singulären Matrix zusammen.

Für den Spezialfall, daß die Matrix N eine symmetrische Matrix darstellt, ergibt sich die spezielle Lösung mit der minimalen Länge durch eine Linearkombination der Spalten von N . Die Lösung liegt damit im Unterraum, der von der Matrix N aufgespannt wird.

Wendet man die eben gewonnenen Erkenntnisse auf den vermittelnden Netzausgleich an, so ergibt sich folgende Problemstellung:

Für den Fall, daß das Netz oder Netzteile nicht eindeutig gelagert sind, wenn also die Koeffizientenmatrix A nicht vollen Spaltenrang hat, verlangt man, daß die Quadratsumme der Klaffungen zwischen den Näherungswerten und den ausgeglichenen Koordinaten ein Minimum werden soll. Nach einer Linearisierung ergibt sich das singuläre Normalgleichungssystem mit

$$A^T A x - A^T l = 0 \quad . \quad (4.5)$$

Die Unbekannten x sind nun so zu bestimmen, daß der Betrag von x zu einem Minimum wird. Die zu minimierende Funktion ergibt sich mit

$$G(x, \lambda) = x^T x - 2\lambda^T (A^T A x - A^T l) \quad , \quad (4.6)$$

woraus sich durch partielle Differentiation nach x die Bedingung

$$x = A^T A \lambda \quad (4.7)$$

ergibt. Daraus folgt, daß jene Lösung x des singulären Gleichungssystems die gesuchte Minimallösung darstellt, für welche sich der Unbekanntenvektor als Linearkombination der Zeilen (oder Spalten) von $A^T A$ darstellen läßt. Dies entspricht demselben Unterraum, der von den Zeilen von A aufgespannt wird. Die Existenz einer Lösung des singulären Gleichungssystems ist gegeben, da sich $A^T l$ im selben Unterraum befindet und daher der Rang von $A^T A$ gleich dem Rang des mit $A^T l$ erweiterten Systems ist (siehe z.B. E. Peschl [1970], Seite 45). Bei jeder Gradientenmethode bewegt man sich nur in diesem Unterraum, da die Relaxationsrichtung durch den Residuenvektor oder eine Kombination von Residuenvektoren festgelegt wird. Der Residuenvektor befindet sich wie schon

oben erwähnt immer in diesem Unterraum. Damit ist die oben gestellte Bedingung immer erfüllt, womit im Falle eines Rangdefektes der Koeffizientenmatrix der Betrag des Unbekanntenvektors automatisch minimiert wird.

5. Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und der Konvergenz der konjugierten Gradienten

Die Eigenwerte und Eigenvektoren geben die Form der Niveaulinien beziehungsweise Niveauflächen des Paraboloids (2.3) wieder, wodurch ein direkter Zusammenhang zwischen der Konvergenz der Methode der konjugierten Gradienten und den Eigenwerten beziehungsweise Eigenvektoren besteht. Da geodätische Netze einen speziellen Aufbau (relative Beobachtungen zwischen benachbarten Punkten) aufweisen, wird in diesem Kapitel zunächst das Verhalten der Eigenwerte und Eigenvektoren anhand von Nivellementzügen studiert. Der Einfluß der Eigenwerte und Eigenvektoren auf die Methode der konjugierten Gradienten wird im Kapitel 5.1 durch praktische Berechnungen und im Kapitel 5.3 durch mathematische Überlegungen aufgezeigt. Im Kapitel 5.2 wird die Verbindung zwischen den mittleren Fehlern und den Eigenwerten dargestellt und Möglichkeiten zur Abschätzung des größten und kleinsten Eigenwertes behandelt.

5.1 Praktische Berechnungen

Da die Konvergenz der konjugierten Gradienten wesentlich von den Eigenwerten und Eigenvektoren der Normalgleichungsmatrix abhängt (Ellipsoidachsen), soll anhand einfacher Beispiele (Nivellementzüge) das Verhalten der Eigenwerte im Zusammenhang mit den Restfehlern der konjugierten Gradienten betrachtet werden.

5.1.1 Regelmäßige Strukturen

Zuerst werden die Untersuchungen an regelmäßigen Liniennivellementzügen mit gleicher Gewichtung und zufälligen Näherungskordinaten durchgeführt. Ausgehend von einem Nivellementzug mit 21 Punkten werden verschiedene Kombinationen der Festpunktswahl studiert.

5.1.1.1 Fliegende oder frei schwimmende Zugteile

Im Bild 5.1 wird das Konvergenzverhalten eines fliegenden Polygonzuges bei der Methode der konjugierten Gradienten dargestellt. Der Nivellementzug besteht aus 21 Punkten, wobei der erste Punkt fest ist. Die Näherungskoodinaten werden durch einen Zufallsgenerator ermittelt. Die entsprechenden Linien stellen die Restfehler der Näherungslösung nach 5,10,15,18,19 und 20 Relaxationsschritten dar. Im Bild 5.2 sind für jeden zweiten Relaxationsschritt der normierte Residuenvektor, der Betrag des Residuenvektors, die normierte Relaxationsrichtung, der Betrag der Verbesserungen dieses Schrittes, der normierte Restfehlervektor, der Betrag des Restfehlervektors und der maximale Restfehler wiedergegeben.

Anhand dieser beiden Bilder kann man wieder (siehe Kapitel 3.2.7) erkennen, daß nach 4 bis 6 Schritten schon eine gute Nachbarschaftsgenauigkeit erreicht wird. Diese Genauigkeit zwischen benachbarten Punkten wird immer mehr gesteigert, sodaß sich die Kurve der Restfehler einer Geraden annähert (18.Schritt). In den beiden letzten Schritten werden diese Restfehler sehr effizient eliminiert, sodaß man von einem "Umklappen der Geraden" sprechen kann. Dies wird dadurch erreicht, daß die Relaxationsrichtung fast die gleiche Form annimmt wie der Vektor der Restfehler (siehe Bild 5.2, unterste mittlere Kurve und vorletzte rechte Kurve). Typisch für diesen Effekt des "Umklappens" ist das Ansteigen des Betrages des Residuenvektors (siehe Bild 5.2, 2.Spalte).

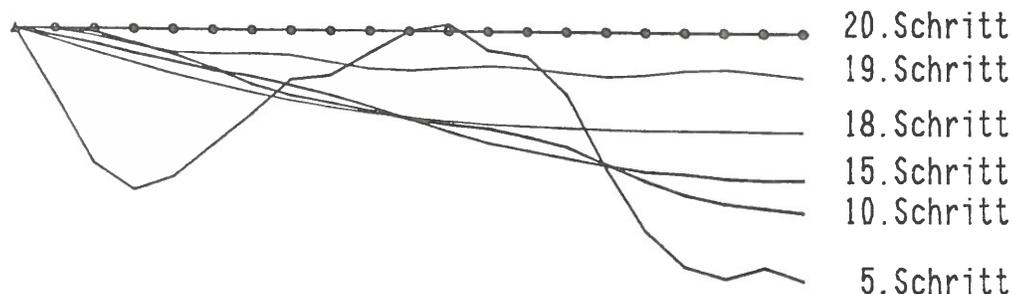


Bild 5.1: Fliegenden Nivellementzug mit 21 Punkten;
Restfehler nach 5,10,15,18,19 und 20 Relaxationsschritten

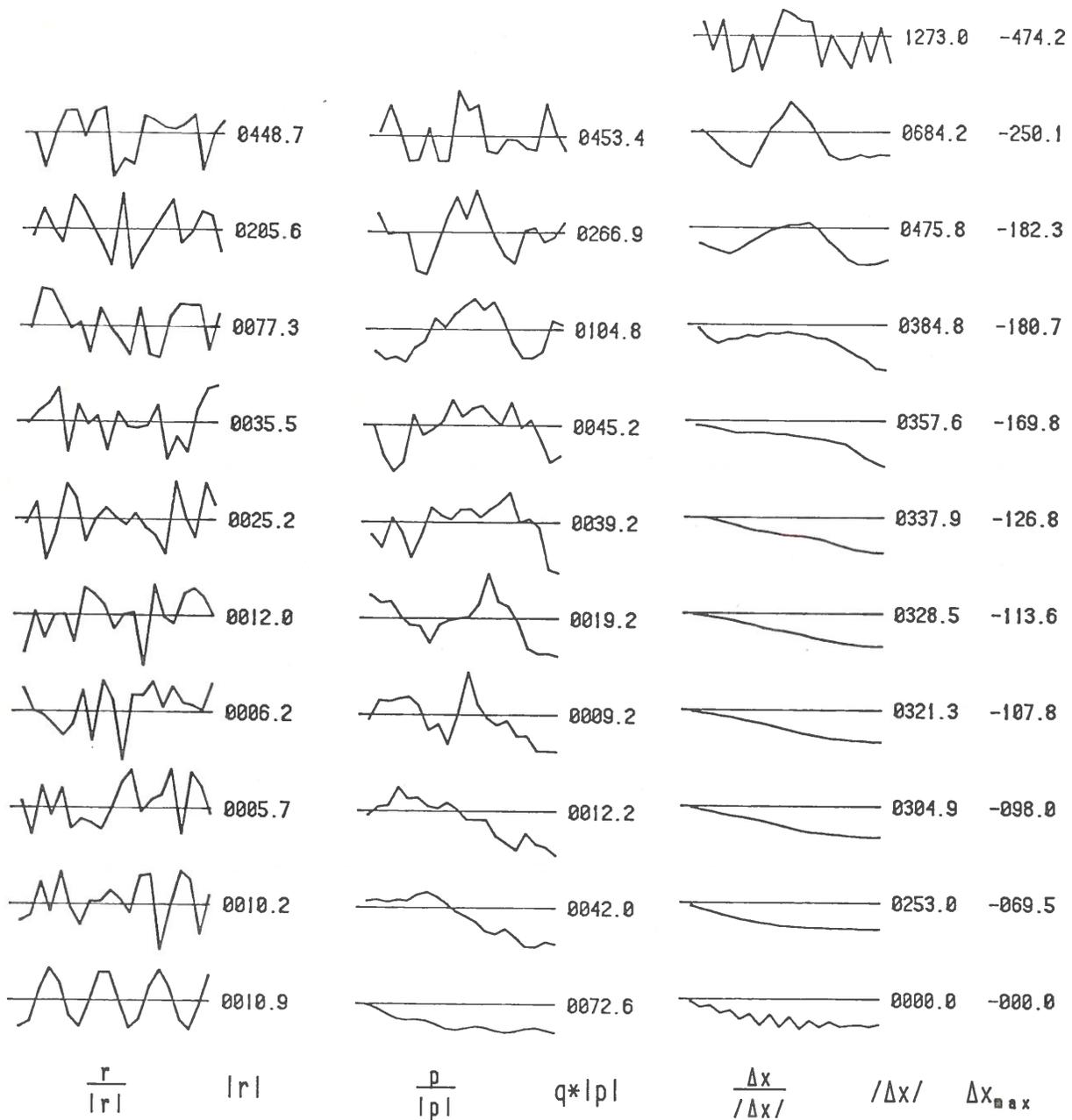


Bild 5.2: Fliegender Nivellementzug mit 21 Punkten;
 Näherungskoodinaten und konjugierte Gradienten
 bei jedem 2. Relaxationsschritt

Bei der Betrachtung des letzten Restfehlervektors ist zu beachten, daß die Darstellung den normierten Vektor aufzeigt dessen Betrag beinahe Null ist.

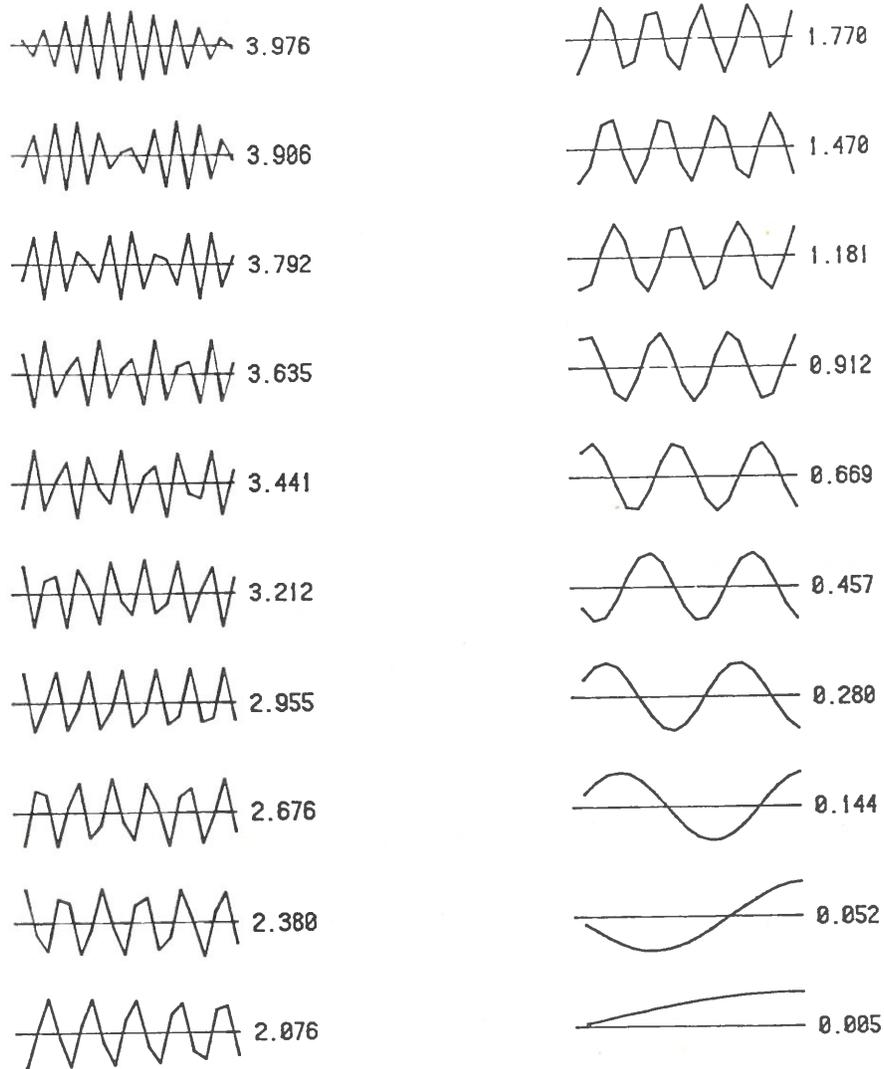


Bild 5.3: Fliegender Nivellementzug mit 21 Punkten;
Eigenvektoren und Eigenwerte

Bei der Berechnung der Eigenwerte (Bild 5.3) zeigt sich, daß der Großteil der Eigenwerte die gleiche Größenordnung hat. Die restlichen Eigenwerte, ungefähr ein Viertel, sind etwas kleiner. Der kleinste Eigenwert ist hingegen deutlich kleiner als alle anderen. Die Eigenvektoren bilden regelmäßige Schwingungen (Sinusschwingungen), wobei der kleinste Eigenwert eine Schwingung verursacht, die ungefähr eine viertel Sinusschwingung über das gesamte Gebiet darstellt. Je größer der Eigenwert wird, umso kürzer wird die Wellenlänge der Schwingung des

dazugehörigen Eigenvektors. Jeder Eigenwert verkürzt die Wellenlänge (1/4, 3/4, 5/4, ...).

Derzeit am Institut durchgeführte Studien über das Verhalten der Eigenwerte und Eigenvektoren haben gezeigt, daß sich die Eigenwerte und Eigenvektoren eines fliegenden Nivellementzuges mit beliebig vielen Punkten direkt berechnen lassen. Da an dieser Studie noch gearbeitet wird, ist hier ohne Beweis die Formel für die Eigenwerte (λ_i) und die Eigenvektoren (ψ_i) für den fliegenden Nivellementzug wiedergegeben,

$$\lambda_i = 4 \sin^2 \frac{(2i-1) \pi}{2 \cdot (2n+1)} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

$$\psi_i = \sqrt{\frac{4}{2n+1}} \sin \frac{(2i-1) \pi}{2n+1} jx \quad j, i = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

wobei i der Index für den entsprechenden Eigenwert und j der Index für den Koeffizienten im i -ten Eigenvektor darstellt. Die Anzahl der unbekannt Punkte ist durch n gegeben.

Betrachtet man nun anhand der Bilder 5.1, 5.2 und 5.3 die Restfehler bei der Methode der konjugierten Gradienten und die Eigenvektoren, so läßt sich bereits nach dem zweiten Relaxationsschritt ein gleiches Verhalten der Restfehler und des Eigenvektors, der zum Eigenwert 0.144 gehört, feststellen. Ab dem 10. Schritt zeigt der Restfehlervektor einen ähnlichen Verlauf wie der Eigenvektor, der zum kleinsten Eigenwert (0.005) gehört.

Eine Unterteilung des Zuges durch einen Festpunkt genau in der Mitte (Bild 5.4), sodaß zwei symmetrische Teile entstehen, verringert die Anzahl der notwendigen Relaxationsschritte um die Hälfte. Die Fehlerfiguren sind infolge der verschiedenen Näherungskordinaten zunächst (5. Relaxationsschritt) unterschiedlich (links Halbschwingung, rechts Viertelschwingung) und weisen

nach weitem Relaxationsschritten den gleichen Verlauf auf.

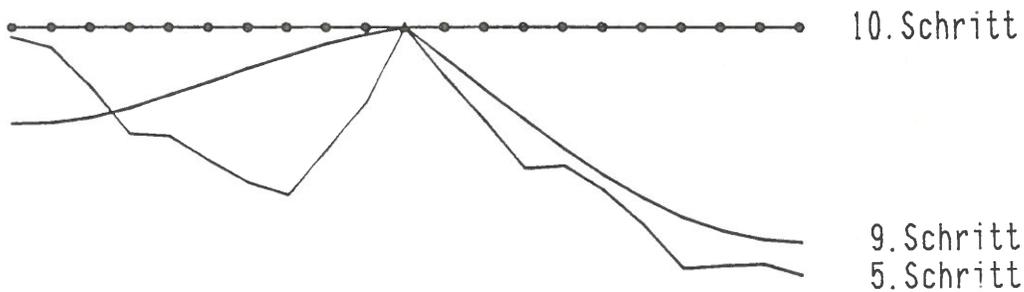


Bild 5.4: Symmetrisch gelagerter Nivellementzug,
Restfehler nach 5,9 und 10 Relaxationsschritten

Eine unsymmetrische Unterteilung des Zuges (Bild 5.5), etwa nach einem Viertel, bestätigt die Aussage über das Verhalten bei unabhängigen Teilnetzen, die im Kapitel 3.2.4 getroffen wurde. Obwohl bei getrennter Berechnung nur 5 beziehungsweise 15 Relaxationsschritte notwendig wären, tritt die richtige Lösung erst nach 20 Schritten ein. Auch hier ist wieder die Ausbildung der Schwingung erkennbar, die sich immer mehr einer Geraden annähert und im letzten Iterationsschritt "umgeklappt" wird (Ansteigen des Betrags des Residuenvektors).

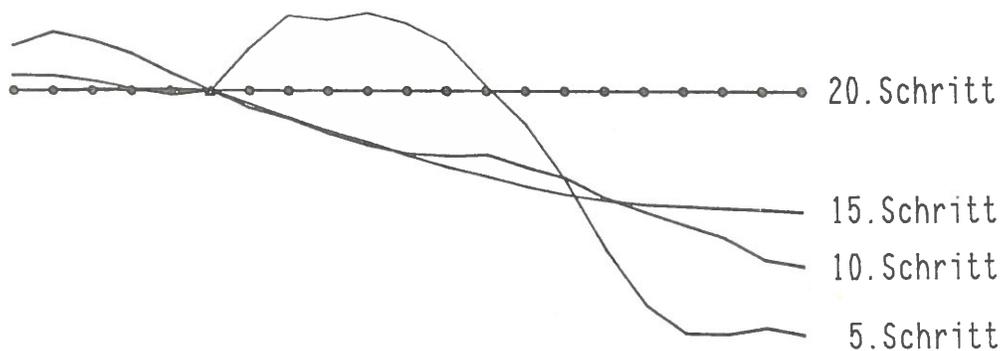


Bild 5.5: Unsymmetrisch gelagerter Nivellementzug,
Restfehler nach 5,10,15 und 20 Relaxationsschritten

5.1.1.2 Zwei oder mehrere Festpunkte, Ausgleichung mit Zwang

Es wird ein Nivellementzug bestehend aus 21 Punkten, wobei die beiden Randpunkte festgehalten werden, berechnet. Die Näherungshöhen des Zuges werden mit Hilfe eines Zufallsgenerators erzeugt. Die Beobachtungen sind widerspruchsfrei. Durch das Bild 5.6 wird das Konvergenzverhalten bei der Methode der konjugierten Gradienten dargestellt. Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Normalgleichungsmatrix sind im Bild 5.7 aufgezeigt. Auch für einen abgeschlossenen Zug lassen sich die Eigenwerte und Eigenvektoren direkt berechnen (siehe Borre [1979], Meissl [?]).

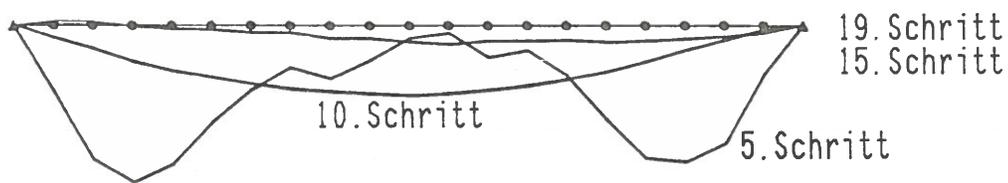


Bild 5.6: Beidseitig abgeschlossener Nivellementzug;
Restfehler nach 5,10,15 und 19 Relaxationsschritten

Wenn man das Konvergenzverhalten des beidseitig abgeschlossenen Nivellementzuges anhand von Bild 5.6 und die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren (Bild 5.7) betrachtet, so wird der Zusammenhang zwischen den auftretenden Fehlerkurven und den Eigenvektoren der kleineren Eigenwerte wieder deutlich erkennbar.

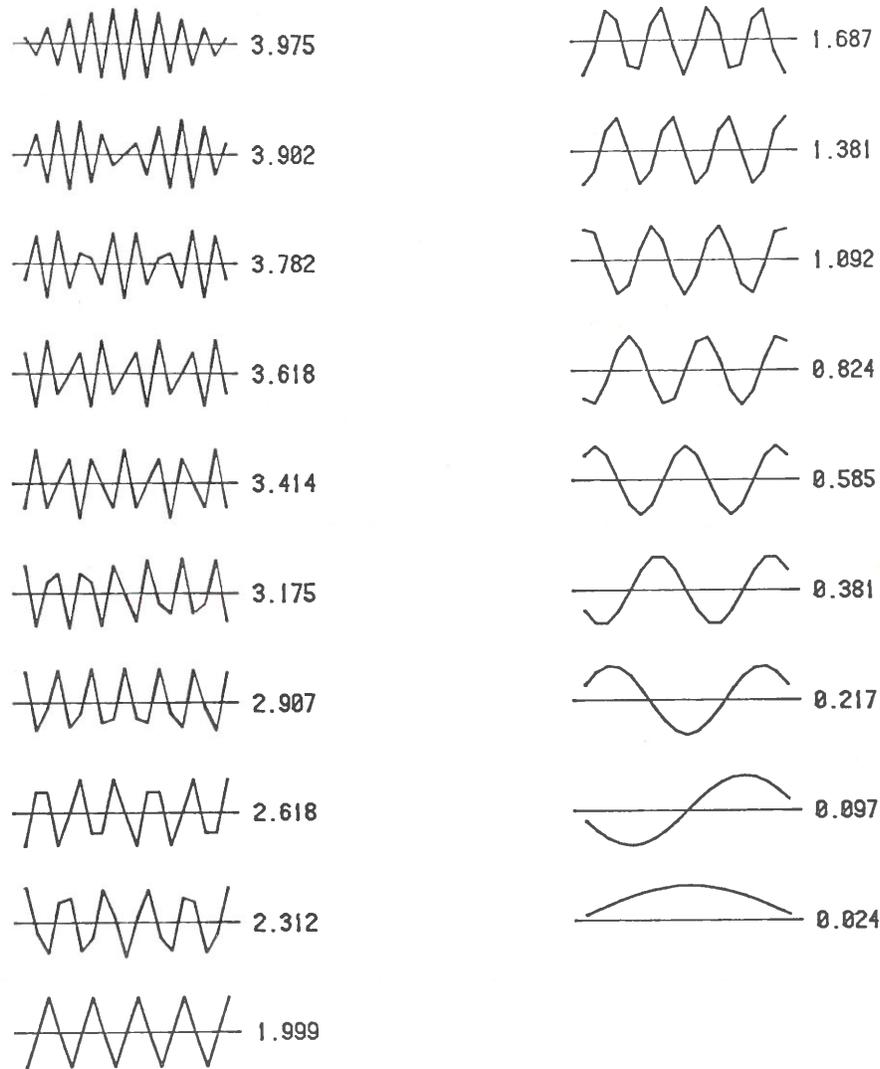


Bild 5.7: Beidseitig abgeschlossener Nivellementzug;
Eigenvektoren und Eigenwerte

5.1.2 Unregelmäßige Strukturen

Ausgehend von der regelmäßigen Struktur werden nun unregelmäßige Versteifungen durch zusätzliche Beobachtungen eingeführt. Als Grundnetz dient ein fliegender Nivellementzug, der am Anfang einen Festpunkt hat. Die Versteifungen werden willkürlich gewählt.

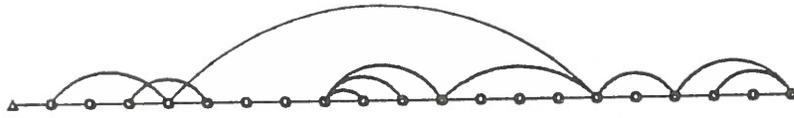


Bild 5.8: Nivellementzug mit unregelmäßigen Versteifungen;
Lage- und Beobachtungsplan

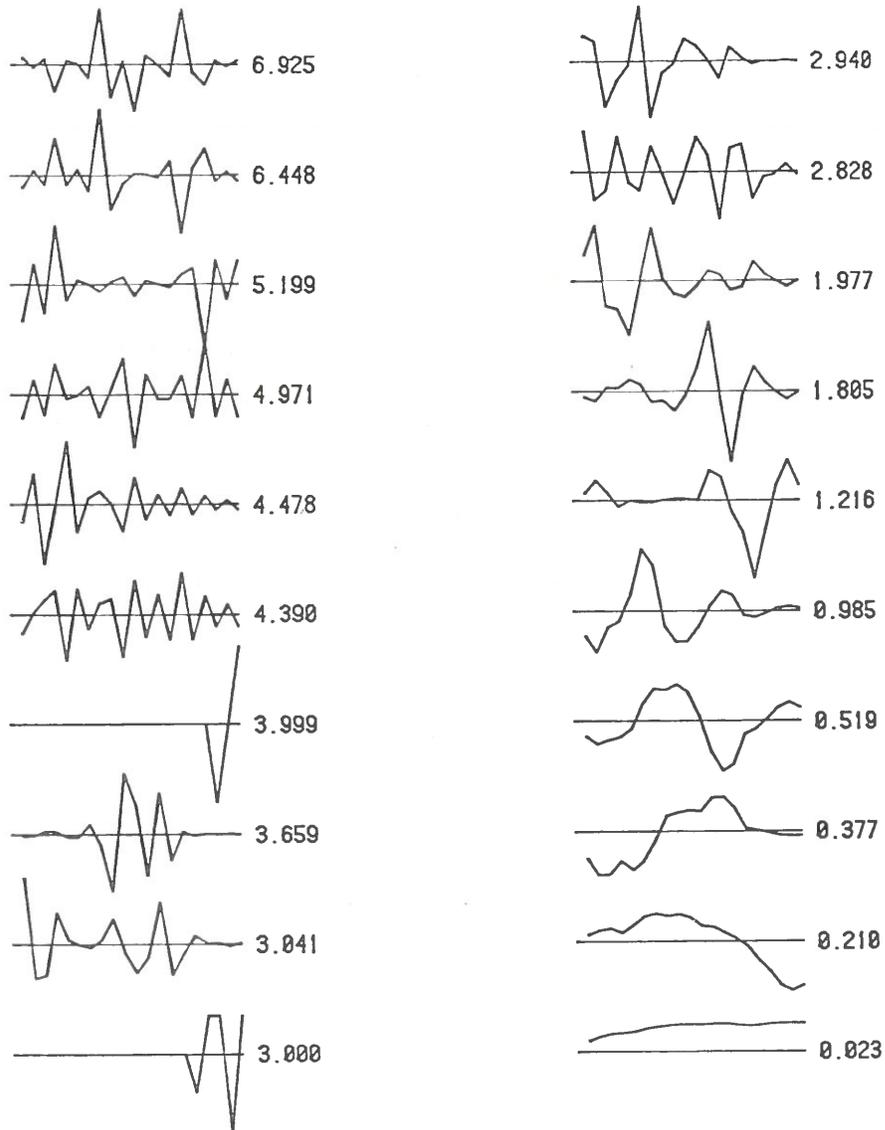


Bild 5.9: Nivellementzug mit unregelmäßigen Versteifungen;
Eigenvektoren und Eigenwerte

Werden diese Versteifungen eingeführt (10 zusätzliche Beobachtungen), so ändert sich die Größenordnung der Eigenwerte. Der kleinste Eigenwert bleibt weiterhin um eine Zehnerpotenz kleiner als alle anderen, die wiederum alle ungefähr die gleiche Größenordnung haben (Bild 5.9). Der Unterschied zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Eigenwert ändert sich durch die Versteifungen jedoch kaum (vergleiche Bild 5.3 und 5.9). Der zum kleinsten Eigenwert gehörende Eigenvektor beschreibt wieder einen Viertelbogen mit leichten Abweichungen. Alle anderen Eigenvektoren zeigen stärkere Abweichungen vom Verlauf der Vektoren beim regelmäßigen Nivellementzug (Bild 5.3).

Das Konvergenzverhalten der Gleichungsauflösung (Bild 5.10) zeigt das gleiche Verhaltensmuster wie in den vorhergehenden Fällen. Es tritt lediglich durch die Versteifungen im Netz eine raschere Konvergenz ein. Die Fehlerfiguren bleiben gleich, nur der Betrag der Fehler wird kleiner. Die Steigerung der Konvergenz ist nicht sehr groß (vergleiche Bild 5.1).

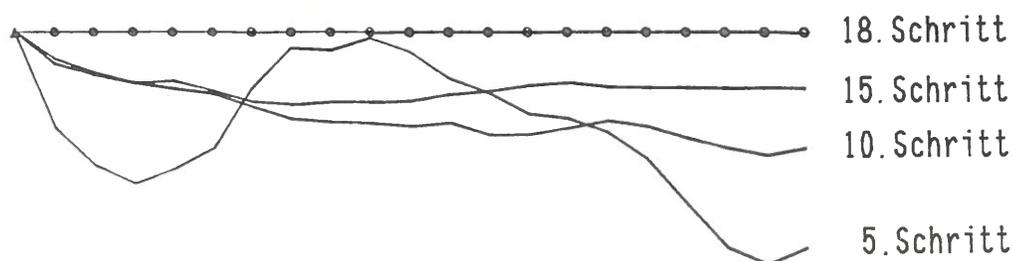


Bild 5.10: Nivellementzug mit unregelmäßigen Versteifungen;
Restfehler nach 5,10,15 und 18 Relaxationsschritten

Anschließend wird das Konvergenzverhalten bei Näherungskordinaten mit systematischen Fehleranteilen getestet. Das oben erwähnte Konvergenzmuster tritt dabei noch gesteigert auf. Die Restfehler sind vorerst größer und die Änderungen der letzten Schritte sind noch signifikanter. Dieser Fall von Näherungskordinaten mit gebietsweise systematischen Fehleranteilen wird in

der geodätischen Praxis durch die Art der Berechnung der genäherten Koordinaten sehr oft auftreten.

5.2 Abschätzung des größten und kleinsten Eigenwertes bei Nivellementketten

Wenn man die Normalgleichungsmatrix und die Inverse der Normalgleichungsmatrix aufspaltet in die Matrix der Eigenwerte (Spektralmatrix L) und die der Eigenvektoren (Modalmatrix V), so gelangt man zu folgenden Formeln:

$$N = V L V^T \quad (5.3)$$

$$Q = N^{-1} = V L^{-1} V^T \quad (5.4)$$

Betrachtet man die kleinsten Eigenwerte eines großen geodätischen Netzes, so erkennt man, daß je nach der Art des Netzes wenige Eigenwerte sehr klein im Verhältnis zu den anderen Eigenwerten werden. Die inverse Normalgleichungsmatrix errechnet sich, wie die obigen Formeln zeigen, aus den Eigenvektoren und aus der inversen Eigenwertmatrix. Bei der Inversion dieser Diagonalmatrix werden die reziproken Eigenwerte gebildet. Die Hauptanteile der inversen Matrix werden dort gebildet, wo große Glieder in L^{-1} stehen, das heißt, die Eigenwerte sehr klein waren. Da die Eigenvektoren normiert sind, liegen alle Komponenten der Eigenvektoren zwischen Null und Eins. Wenn das Verhältnis zwischen dem kleinsten und zweitkleinsten Eigenwert größer als 1:10 ist, so dominiert nur der kleinste Eigenwert die erste Ziffer der Diagonale der inversen Normalgleichungsmatrix und damit die quadratischen mittleren Fehler der Unbekannten. Im folgenden Beispiel wird die Berechnung von (5.4) nachvollzogen, wobei nur diese dominanten Werte für die Berechnung verwendet werden.

Beispiel: fliegender Nivellementzug mit 19 Unbekannten

$$\lambda_{n_1} = 0.0065 \quad \lambda_{n_2} = 0.0581$$

Unbekannte	m_i^2	$EV(\lambda_{\min})$	$EV(\lambda_{\min}) * [EV(\lambda_{\min})_{\max}] / \lambda_{\min}$
1	1	0.026	1.3
2	2	0.052	2.6
3	3	0.077	3.8
4	4	0.101	5.0
5	5	0.126	6.2
6	6	0.149	7.3
7	7	0.171	8.4
8	8	0.192	9.5
9	9	0.212	10.5
10	10	0.231	11.4
11	11	0.248	12.2
12	12	0.264	13.0
13	13	0.277	13.7
14	14	0.289	14.3
15	15	0.299	14.8
16	16	0.308	15.2
17	17	0.314	15.5
18	18	0.318	15.7
19	19	0.320	15.8

m_i mittlerer Fehler des Punktes i

λ_{\min} kleinster Eigenwert

$EV(\lambda_{\min})$ Eigenvektor des kleinsten Eigenwertes

$EV(\lambda_{\min})_{\max}$. Maximalwert von $EV(\lambda_{\min})$

Eine ungefähre Abschätzung für den kleinsten Eigenwert ergibt sich damit durch den Vergleich des größten mittleren Fehlers m_{\max}^2 mit der entsprechenden Berechnungsmöglichkeit mit dem dominanten Eigenwert

$$m_{\max}^2 = EV(\lambda_{\min})_{\max} * EV(\lambda_{\min})_{\max} / \lambda_{\min} \quad (5.5)$$

Woraus sich eine Abschätzung für den kleinsten Eigenwert mit

$$\lambda_{\min} = [EV(\lambda_{\min})_{\max}]^2 / m_{\max}^2 \quad (5.6)$$

ergibt. Wenn man nun den Verlauf des kleinsten Eigenvektors von Netzen mit lokalen Beobachtungen betrachtet, so erkennt man, daß der zum kleinsten

Eigenwert gehörende Eigenvektor einen sehr ruhigen Verlauf besitzt. Dieser Verlauf kann bei fliegenden Netzen mit Geraden und bei eingehängten Netzen mit Bögen angenähert werden. Da der Betrag des Eigenvektors gleich Eins ist, kann man verschiedene grobe Näherungsformeln für den größten Wert des zum kleinsten Eigenwert gehörenden Eigenvektors angeben. Eine mögliche Abschätzung ist eine von einem Festpunkt ansteigende Gerade

$$EV(\lambda_{\min})_{\max} = \sqrt{n^2 / (1+2^2+3^2+ \dots +(n-1)^2+n^2)} \quad (5.7)$$

$$EV(\lambda_{\min})_{\max} = \sqrt{3/n} \quad (5.8)$$

oder eine parallele Gerade

$$EV(\lambda_{\min})_{\max} = 1 / \sqrt{n} \quad (5.9)$$

Die erste Abschätzung (5.7) wird meist zu groß ausfallen, die zweite Abschätzung (5.9) fällt zu klein aus. Für den fliegenden Polygonzug mit 19 Unbekannten erhält man folgende Ergebnisse für die Schätzung des kleinsten Eigenwertes ($\lambda_{\min} = 0.0065$):

$$\begin{aligned} m_f^2 = 19 \quad EV(\lambda_{\min})_{\max} &= 0.382 & \lambda_{\min} &= 0.0077 \\ EV(\lambda_{\min})_{\max} &= 0.229 & \lambda_{\min} &= 0.0028 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Für den überbestimmten Fall eines Nivellementzuges mit unregelmäßigen Versteifungen (Bild 5.8) ergeben sich damit die Schätzungen für den kleinsten Eigenwert ($\lambda_{\min} = 0.023$) (Bild 5.9).

$$\begin{aligned} m_f^2 = 4.20 \quad EV(\lambda_{\min})_{\max} &= 0.373 & \lambda_{\min} &= 0.033 \\ EV(\lambda_{\min})_{\max} &= 0.224 & \lambda_{\min} &= 0.012 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Der größte Eigenwert kann mit Hilfe des Kreisesatzes von Gerschgorin mit ausreichender Genauigkeit abgeschätzt werden. Dieser Kreisesatz gibt folgende Aussage über die Lage der Eigenwerte: Man berechne in jeder Zeile der Matrix die Summe der absoluten Beträge der Koeffizienten $n_{i,k}$ unter Auslassung des Diagonalgliedes, also die Größen

$$r_i = |n_{i,1}| + \dots + |n_{i,i-1}| + |n_{i,i+1}| + \dots + |n_{i,n}| \quad (5.12)$$

Wenn man diese Summen nun um die Mittelpunkte $n_{i,i}$ auf einer komplexen Zahlenebene aufträgt, so überstreichen diese Kreise jenes Gebiet, in dem alle Eigenwerte liegen. Da bei den Normalgleichungen nur positive, reelle Eigenwerte auftreten, ist in diesem Fall nur eine Ausbreitung auf der reellen Achse von Interesse. Da das Diagonalglied ebenfalls immer positiv ist, kann man den größten Eigenwert durch folgende Formel abschätzen:

$$\lambda_{\max} < \left\{ \sum_{j=1}^n |n_{i,j}| \right\}_{\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.13)$$

Für die beiden zuvor angegebenen Beispiele des fliegenden Nivellementzuges (Bild 5.1) und des unregelmäßig versteiften Nivellementzuges (Bild 5.8) ergibt sich für den Fall ohne Oberbestimmung eine Abschätzung von $\lambda_{\max} < 4$ und der wahre Wert beträgt $\lambda_{\max} = 3.97$ (Bild 5.3). Für den Fall der unregelmäßigen Versteifungen ergibt sich der Wert 10 als Abschätzung und 6.92 als wahrer Wert (Bild 5.9).

5.3 Mathematischer Zusammenhang

Um den mathematischen Zusammenhang zwischen dem Verhalten der konjugierten Gradienten und den Eigenwerten beziehungsweise den Eigenvektoren herzustellen, sind hier die verwendeten Formeln (2.36), (5.3) und (5.4) wiedergegeben.

$p^{(i)}$... Relaxationsrichtung

q_i ... Längenfaktor in Relaxationsrichtung

e_i ... Koeffizient der Linearkombination des Residuenvektors
mit der alten Relaxationsrichtung

N, n ... lineares Gleichungssystem

$$r^{(0)} = N x^{(0)} + n$$

$$p^{(0)} = - r^{(0)}$$

Für den i -ten Relaxationsschritt ($i=0,1,2,\dots$) gilt:

$$\left. \begin{aligned} e_i &= \frac{(r^{(i)})^T r^{(i)}}{(r^{(i-1)})^T r^{(i-1)}} \\ p^{(i)} &= - r^{(i)} + e_i p^{(i-1)} \end{aligned} \right\} \text{für } i \geq 1$$

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{(r^{(i)})^T r^{(i)}}{(p^{(i)})^T N p^{(i)}} \\ x^{(i+1)} &= x^{(i)} + q_i p^{(i)} \\ r^{(i+1)} &= r^{(i)} + q_i N p^{(i)} \end{aligned} \right\} \text{für } i \geq 0 \tag{5.14}$$

Eigenwerte:

L ... Diagonalmatrix mit den Eigenwerten (Spektralmatrix)

V ... Matrix der Eigenvektoren (Modalmatrix) $V^T = V^{-1}$, $V^T V = I$
(i -te Spalte entspricht dem i -ten Eigenvektor)

N ... Normalgleichungsmatrix

$$L = V^T N V \tag{5.15}$$

$$N = V L V^T \tag{5.16}$$

Betrachtet man die Formeln zur Berechnung des Residuenvektors $r^{(i)} = Nx^{(i)} + n$ und wählt eine Spektraldarstellung der Normalgleichungsmatrix, so ergibt sich

$$r^{(i)} = V L V^T x^{(i)} + n . \quad (5.17)$$

Aus dem inneren Produkt der Eigenvektoren mit der Näherungslösung $V^T x^{(i)}$ ergeben sich bei zufälliger Verteilung der Näherungskordinaten lauter gleich große Komponenten. Haben die Näherungslösungen jedoch Restfehler, die in Richtung des Eigenvektors zum kleinsten Eigenwert zeigen, so wächst dieses innere Produkt an und diese Komponente wird größer als alle anderen. Diese inneren Produkte werden nun mit den Eigenwerten multipliziert. Daraus ergibt sich, daß der Ergebnisvektor stark unterschiedliche Größenordnungen aufweisen kann. Jene Komponente, die zum kleinsten Eigenwert gehört, wird sehr klein sein. Der Residuenvektor ergibt sich nun durch eine Linearkombination der verschiedenen Eigenvektoren. Da die Komponenten zu den Eigenvektoren der kleineren Eigenwerte sehr klein sind, bleiben deren Beiträge sehr lange nahezu wirkungslos. Die neue Relaxationsrichtung ergibt sich aus einer Kombination des Residuenvektors und der vorhergehenden Relaxationsrichtung. Da in diesen beiden Vektoren die Richtungen der größeren Eigenwerte vorherrschen, muß solange iteriert werden, bis das innere Produkt der Eigenvektoren mit der Näherungslösung nur mehr Komponenten in Richtung des Eigenvektors, der zum kleinsten Eigenwert gehört, hat. Somit verschwinden alle anderen Komponenten (inneren Produkte) und die Fehler in Richtung dieses Eigenvektors können eliminiert werden. Dieser Effekt tritt auch bei der praktischen Berechnung auf und wird dort mit "Umklappen" bezeichnet. Das typische Ansteigen des Betrages des Residuenvektors ist dadurch zu erklären, daß das innere Produkt der Näherungslösung mit dem Eigenvektor plötzlich einen großen Wert aufweist und somit der volle Betrag des Restfehlers in den Residuenvektor eingeht. Die letzte Relaxationsrichtung entspricht fast genau dem kleinsten Eigenvektor (vergleiche Bild 5.2 mit 5.3 und 5.9 mit 5.12).

Da der Betrag des Residuenvektors wächst, wird der Faktor e_i größer als Eins. Die neue Relaxationsrichtung wird also einstweilen sehr von der vorhergehenden beeinflusst. Wenn dann der Betrag des Residuenvektors auf sehr kleine Werte fällt, geht in die Relaxationsrichtungen fast nur der Residuenvektor ein, der in diesen Fällen schon stark von den Eigenvektoren mit den kleinsten Eigenwerten beeinflusst wird.

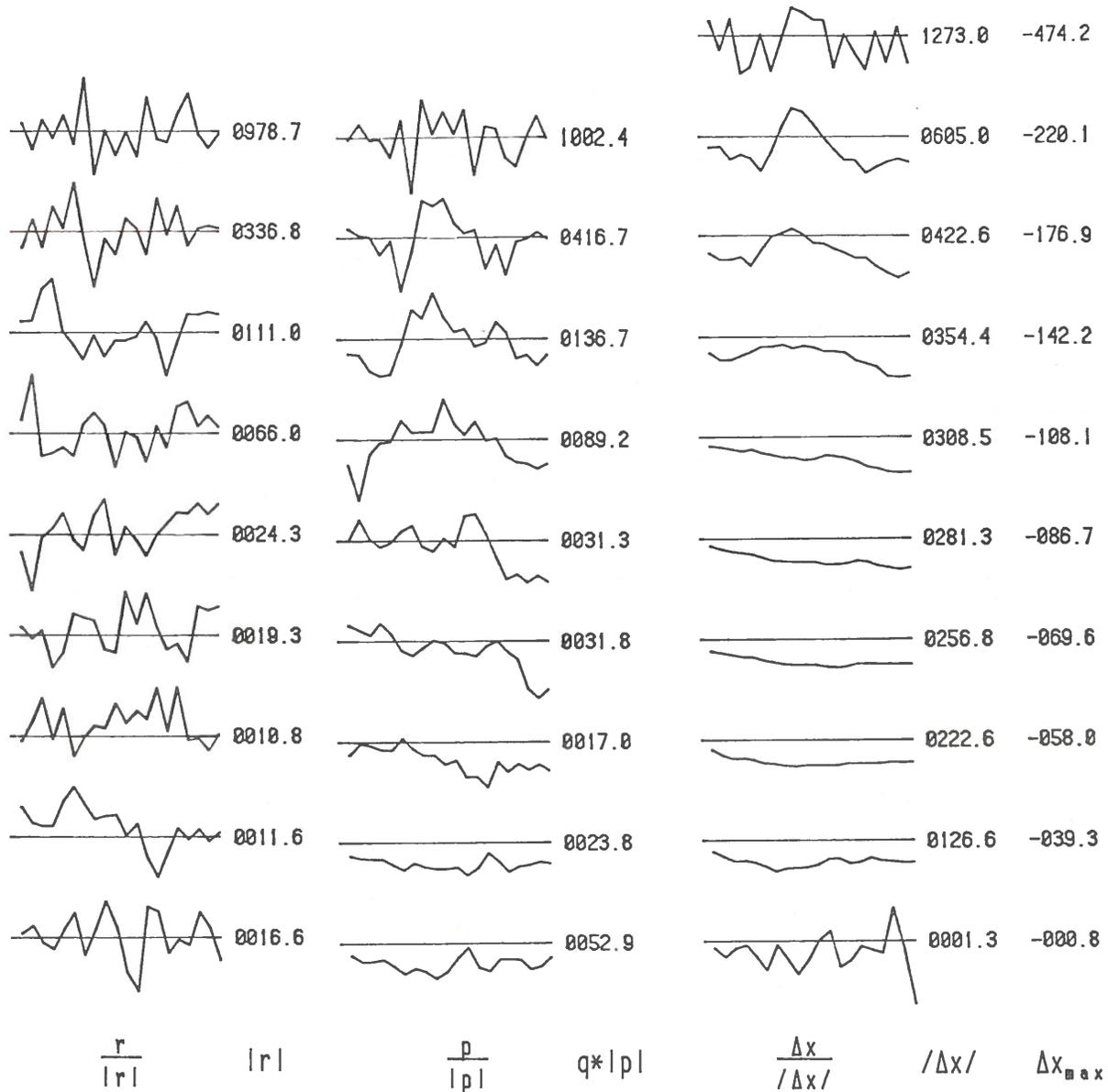


Bild 5.12: Nivellementzug mit unregelmäßigen Versteifungen; Näherungskoodinaten und konjugierte Gradienten bei jedem 2. Relaxationsschritt

Aus dem Vorangegangenen erklärt sich auch unmittelbar der Zusammenhang zwischen den Näherungskoodinaten und der Richtigkeit der erreichten Näherungslösungen. Die Näherungslösung ist zumindest noch soweit entfernt, wie die Projektion der Näherungslösung auf die Richtung des "kleinsten" Eigenvektors (Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert) ausmacht. Bei kleinen systematischen Verfälschungen der Näherungskoodinaten wird der absolute Restfehler noch sehr groß sein. Lokale Restfehler werden sehr schnell eliminiert. Bei sehr großen systematischen Verfälschungen (das innere Produkt des kleinsten Eigenvektors mit der Näherungslösung ist sehr groß und alle anderen Produkte der Eigenvektoren mit der Näherungslösung sind verhältnismäßig klein, so wie $\lambda_{\max}:\lambda_{\min}$) tritt eine raschere Beseitigung dieser systematischen Fehler auf. Die erlangten Lösungen zeigen dann ähnliches Verhalten wie ohne systematischen Fehler.

Betrachtet man den Spezialfall, daß die Normalgleichungsmatrix eine Diagonalmatrix mit lauter gleich großen Elementen ist, so ergeben die Schnitte der Niveauflächen $x=\text{const.}$ der zu minimierenden quadratischen Funktion $F(x)$ mit beliebigen Ebenen immer Kreise. Der Mittelpunkt der Kreise einer Schnittebene ist der Mittelpunkt aller anderen Kreise. Daraus ergibt sich, daß der Kreismittelpunkt die gesuchte Lösung ist und in einem Schritt ermittelt wird.

5.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

Es besteht ein sehr enger Zusammenhang zwischen den Eigenwerten, den zugehörigen Eigenvektoren und dem Konvergenzverhalten der Näherungslösung bei der Methode der konjugierten Gradienten. Bedingt durch den starken Größenunterschied zwischen der Mehrheit der Eigenwerte und dem (den) kleinsten Eigenwert(en) ist dessen (sind deren) Eigenvektor(en) für das Konvergenzverhalten und das Muster der Restfehler bei der Methode der konjugierten Gradienten dominierend. Dieser Eigenvektor ist für das großräumige

Muster der Restfehler zuständig. Da dieser Eigenwert sehr klein im Verhältnis zu den anderen Eigenwerten ist, ist er bei der Bildung der inversen Normalgleichungsmatrix und damit bei der Berechnung der mittleren Fehler dominant. Damit kann eine Beziehung zwischen der Genauigkeit der Näherungslösung und den mittleren Fehlern hergestellt werden:

In Gebieten, wo ein großer mittlerer Fehler auftritt, wird die Näherungslösung ungenauer sein als in Gebieten, wo nur kleinere mittlere Fehler auftreten.

Die Genauigkeit der erreichten Lösung hängt unmittelbar mit der Anzahl der Relaxationsschritte und der Verteilung der Eigenwerte zusammen. Haben mehrere Eigenwerte die gleiche Größenordnung, oder genauer, sind die inneren Produkte der Näherungslösung mit den Eigenvektoren, multipliziert mit den entsprechenden Eigenwerten (siehe 5.17), ungefähr gleich groß, so werden diese Fehler in einem Schritt eliminiert. Die Reihenfolge der Elimination der Fehleranteile ist direkt abhängig von der Größe dieser inneren Produkte. Das bedeutet andererseits, daß jene Fehler, die in Richtung der Eigenvektoren, die zu kleinen Eigenwerten gehören, zu liegen kommen, erst dann eliminiert werden, wenn alle anderen Fehler schon mit einer Genauigkeit, die dem Verhältnis des größten zum kleinsten Eigenwert ($\lambda_{n \max} : \lambda_{n \min}$) entspricht, eliminiert sind.

Bei schlechter Konditionierung, wenn also das Verhältnis zwischen größtem und kleinstem Eigenwert sehr groß ist, kann es auf Grund der beschränkten Ziffernanzahl bei der Berechnung zu Konvergenzschwierigkeiten kommen.

Wenn während der Berechnung über konjugierte Gradienten mit der Näherungslösung die Koeffizienten der Beobachtungsgleichungen neu berechnet werden, wird die gute Nachbarschaftsgenauigkeit gestört. Durch oftmalige Neuberechnung der Koeffizienten wird die Nachbarschaftsgenauigkeit immer wieder

gestört, wodurch es bei der Konvergenz der Methode der konjugierten Gradienten zu Schwierigkeiten kommen kann. Die globalen Fehleranteile können nur dann eliminiert werden, wenn die lokalen Beziehungen mit übertriebener Genauigkeit berechnet sind.

6. Konvergenzbeschleunigung der konjugierten Gradienten bei Netzen mit lokalen Messgrößen

Die im Kapitel 3 aufgezeigten Schwächen der konjugierten Gradientenmethode treten bei großen Netzen mit lokaler Messanordnung immer sehr deutlich zu Tage. Solche Netze sind zum Beispiel geodätische Höhen- und Lagenetze, können jedoch auch Schwerenetze oder allgemein schwach besetzte Gleichungssysteme sein. Da dabei die globalen Restfehler mit der Gradientenmethode nur sehr schwer zu eliminieren sind, können solche Netze kaum mit einem vernünftigen Zeitaufwand berechnet werden. Zu Schwierigkeiten bei der Konvergenz beim Verfahren der konjugierten Gradienten kann es kommen, wenn das Verhältnis des größten und kleinsten Eigenwertes sehr groß wird. Auch durch die beschränkte Ziffernanzahl kann es bei der Berechnung zu ungenauen, ja sogar zu unbrauchbaren Lösungen kommen.

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wird nun versucht, diese globalen Muster der Restfehler durch Approximationsverfahren zu ermitteln und dadurch die Methode der konjugierten Gradienten zu unterstützen. Damit soll eine größere Stabilität und eine Konvergenzbeschleunigung erreicht werden. Die konjugierten Gradienten sollen dabei die lokalen Unstimmigkeiten beseitigen, mit Hilfe der Approximation sollen die globalen Anomalien erfasst und entfernt werden.

6.1 Eindimensionaler linearer finite Elementansatz

Für den eindimensionalen Fall werden zunächst lineare Elemente gewählt, die die globalen Muster der Restfehler möglichst rasch beseitigen sollen. Es ergibt sich damit die im Bild 6.1 dargestellte Approximationsaufgabe.

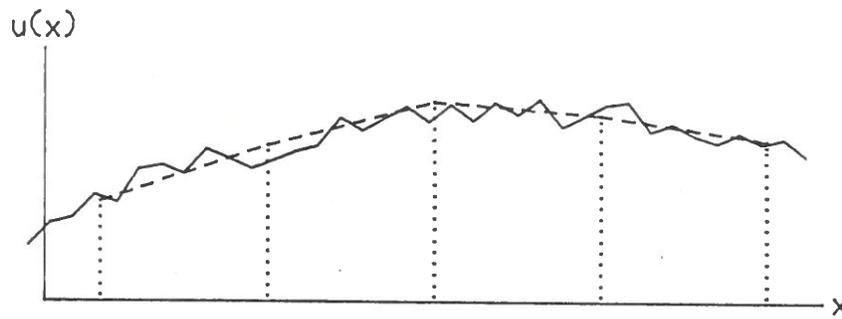


Bild 6.1: Approximationsaufgabe

Die Kurve der Abweichungen wird stückweise durch lineare Elemente angenähert. Greift man ein Element heraus (Bild 6.2) und wählt als Träger das Einheitsintervall, so ergibt sich die Formel (6.1) zur Berechnung der Funktionswerte.

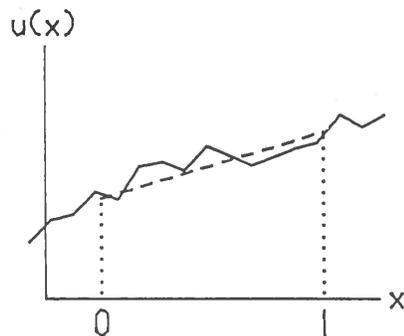


Bild 6.2: Element im Einheitsintervall

$$u(\xi) = c_0 + c_1 \xi \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (6.1)$$

Wenn man diesen Ansatz für alle Felder wählt, so erhält man pro Feld eine zu approximierende Gerade. Damit ein stetiger Übergang zwischen den einzelnen Feldern gewährleistet ist, muß man Bedingungen für die Koeffizienten c_0 und c_1 einführen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß man die Koeffizienten transformiert und als neue Unbekannte direkt die Funktionswerte in den Randpunkten einführt. Durch Identifikation der Funktionswerte bei benachbarten Elementen ist der stetige Übergang sofort gewährleistet. Diese Transformation ist leicht durchzuführen. Betrachtet man zunächst die Funktionswerte in den

Stützstellen, so ergibt sich

$$u(0) = c_0 \tag{6.2}$$

$$u(1) = c_0 + c_1, \tag{6.3}$$

woraus die Umkehrung gegeben ist mit

$$c_0 = u(0) \tag{6.4}$$

$$c_1 = -u(0) + u(1) . \tag{6.5}$$

Setzt man nun die beiden Formeln (6.4) und (6.5) in den Geradenausdruck (6.1) ein, so erhält man

$$u(\xi) = (1-\xi) u(0) + \xi u(1) . \tag{6.6}$$

Diese Gleichung beschreibt die lineare Funktion, wobei als Unbekannte direkt die Funktionswerte in den Stützstellen aufscheinen. Bezeichnet man diese unbekanntenen Funktionswerte mit Indizes u_i , $i=0, \dots, n$ und geht wieder von der lokalen Darstellung ab, so ergeben sich die Geradengleichungen

$$u(x) = (1-\xi) u_i + \xi u_{i+1} \quad \xi = (x-h*i-x_0) / h \tag{6.7}$$
$$i = \text{INT} ((x-x_0)/h) ,$$

wobei $u_i = u_i(0)$ beziehungsweise $u_{i-1}(1)$ bedeutet. Mit x_0 wird ein Anfangswert und mit h die Intervalllänge bezeichnet. Man erkennt hier sehr schön das lokale Wirken der Unbekannten. Der Einflußbereich (Träger) einer Unbekannten beträgt die zweifache Intervalllänge. Die Gesamtkurve wird angenähert durch eine Linearkombination der Basiselemente, wobei ein Basiselement die im Bild 6.3 dargestellte Form hat.

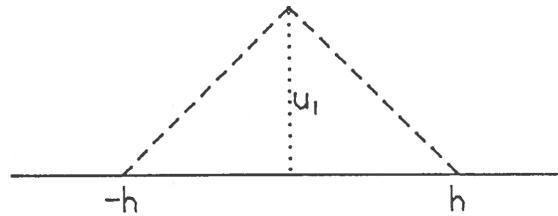


Bild 6.3: Eindimensionales Basiselement

Durch die Linearkombination dieser Basiselemente ergibt sich die im Bild 6.4 aufgezeigte Kurvenannäherung,

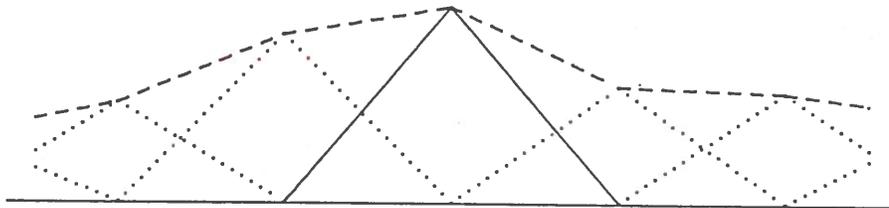


Bild 6.4: Linearkombination von eindimensionalen Basiselementen

die einen stetigen Übergang an den Stützstellen gewährleistet.

6.2 Eindimensionaler kubischer finite Elementansatz

Zur Approximation sind bereichsweise kubische Polynome zugelassen, deren lokaler Ansatz durch die Formel (6.8) gegeben ist.

$$u(\xi) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3$$

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^3 c_i \xi^i \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (6.8)$$

Dieses Polynom, welches im Einheitsintervall definiert ist, hat die Unbekannten c_i , $i=0, \dots, 3$. Um mehrere solche Polynome stetig miteinander verknüpfen zu können, wird auf die Funktionswerte und die ersten Ableitungen in den

Stützstellen als neue Unbekannte übergegangen. Durch die Identifizierung der Funktionswerte und der ersten Ableitungen in den Stützstellen kann ein stetiger Übergang und eine stetige erste Ableitung zwischen benachbarten Elementen erreicht werden.

$$\frac{d u(\xi)}{d \xi} = u'(\xi) = c_1 + 2c_2\xi + 3c_3\xi^2 \quad (6.9)$$

Wenn man in die Funktionen $u(\xi)$ und $u'(\xi)$ (Formel (6.8) und (6.9)) die Randwerte des Gebietes einsetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} u(0) &= c_0 & u(1) &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \\ u'(0) &= c_1 & u'(1) &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Faßt man die Formeln (6.10) in Matrizen zusammen, so ergibt sich der Übergang von den Unbekannten c ($c_i, i=0, \dots, 3$) auf die neuen Unbekannten u ($u(0), u'(0), u(1), u'(1)$) in folgender Form.

$$u = A c \quad (6.11)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u(1) \\ u'(1) \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Die Umkehrung dieses Übergangs ist gegeben durch

$$c = A^{-1} u \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Somit läßt sich das kubische Polynom (6.8) auch folgendermaßen darstellen, wobei die neuen Unbekannten die Funktionswerte und die ersten Ableitungen in den Stützstellen sind:

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3] \quad c = \\
 &= [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3] \quad A^{-1} \quad u \qquad (6.13) \\
 &= [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3] \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u(1) \\ u'(1) \end{bmatrix} \quad 0 \leq \xi \leq 1
 \end{aligned}$$

Multipliziert man die beiden Matrizen vor den Unbekannten, so erhält man die Funktionen, die den Einfluß der Unbekannten auf das Gebiet festlegen:

$$u(\xi) = N_1 u(0) + N_2 u'(0) + N_3 u(1) + N_4 u'(1) \qquad (6.14)$$

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_2 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$$N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_4 = -\xi^2 + \xi^3$$

Für die erste Ableitung des Funktionswertes ergibt sich

$$u'(\xi) = N_5 u(0) + N_6 u'(0) + N_7 u(1) + N_8 u'(1) \qquad (6.15)$$

$$N_5 = N_1' = -6\xi + 6\xi^2$$

$$N_6 = N_2' = 1 - 4\xi + 3\xi^2$$

$$N_7 = N_3' = 6\xi - 6\xi^2$$

$$N_8 = N_4' = -2\xi + 3\xi^2$$

Führt man von diesen acht Funktionen (siehe Bild 6.5) die Funktionen N_1 und N_2 als Grundfunktionen $\chi(t)$ und $\omega(t)$ ein, so lassen sich alle anderen Funktionen direkt darstellen.

$$\chi(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 = N_1$$

$$\omega(t) = t - 2t^2 + t^3 = N_2$$

$$\chi(1-t) = 3t^2 - 2t^3 = N_3$$

$$\omega(1-t) = t^2 - t^3 = -N_4$$

$$\chi'(t) = -6t + 6t^2 = N_5$$

$$\omega'(t) = 1 - 4t + 3t^2 = N_6$$

$$\chi'(1-t) = 6t - 6t^2 = N_7$$

$$\omega'(1-t) = 2t - 3t^2 = -N_8$$

(6.16)

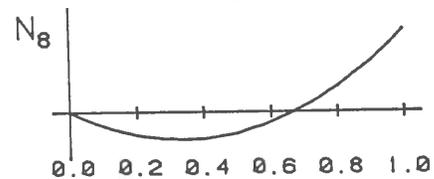
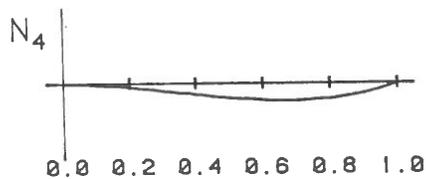
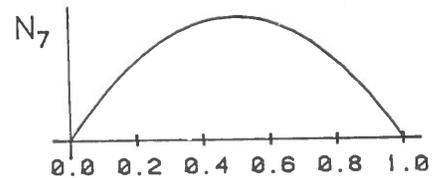
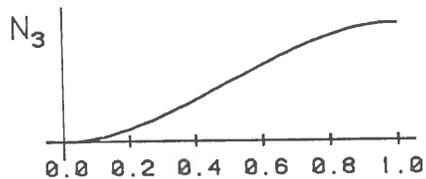
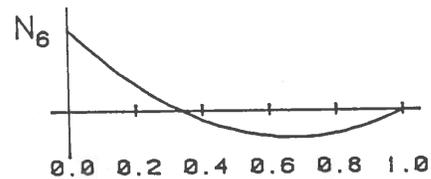
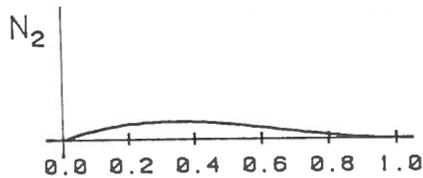
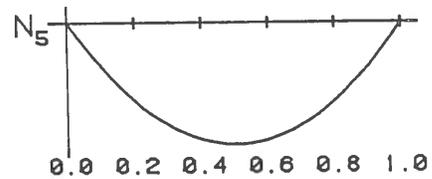
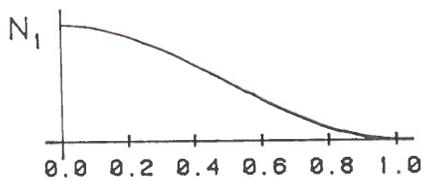


Bild 6.5: Formfunktionen der eindimensionalen kubischen Elemente

Führt man anstatt des Parameters ξ einen Parameter ξ_j bezogen auf den

entsprechenden Randpunkt ein ($\xi_j: j=0 \rightarrow \xi_j=\xi$; $j=1 \rightarrow \xi_j=1-\xi$), so ergibt sich die Formel für den Funktionswert und dessen Ableitung mit

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^1 \chi(\xi_j) u(j) + (-1)^j \omega(\xi_j) u'(j) \quad (6.17)$$

$$u'(\xi) = \sum_{j=0}^1 (-1)^j \chi'(\xi_j) u(j) + \omega'(\xi_j) u'(j) . \quad (6.18)$$

Verallgemeinert man den Bereich auf eine Intervalllänge h und den Anfangsknoten an der Stelle x_0 , so folgt

$$\begin{aligned} \xi &= (x-x_0) / h , & x &= \xi * h + x_0 , & \frac{\partial x}{\partial \xi} &= h , \\ \frac{d u}{d \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial \xi} = h \frac{\partial u}{\partial x} ; \end{aligned} \quad (6.19)$$

bezeichnet man ferner

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi = (x-x_0) / h , \\ \xi_1 &= 1-\xi = h - (x-x_0) / h , \end{aligned} \quad (6.20)$$

so ergibt sich

$$u(x) = \sum_{j=0}^1 \chi(\xi_j) u(j*h) + (-1)^j \omega(\xi_j) h u'(j*h) , \quad (6.21)$$

$$u'(x) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \chi'(\xi_j) u(j*h) + \omega'(\xi_j) h u'(j*h) . \quad (6.22)$$

Benennt man die unbekanntes Funktionswerte und die unbekanntes ersten Ableitungen mit Indizes $u_i, u'_i, i=0, \dots, n$ und geht auf mehrere Intervalle über, so ergibt sich die Darstellung

$$u(x) = \sum_{j=0}^1 \chi(\xi_j) u_{i+j} + (-1)^j \omega(\xi_j) h u'_{i+j} , \quad (6.23)$$

$$u'(x) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \chi'(\xi_j) u_{i+j} + \omega'(\xi_j) h u'_{i+j} , \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} i &= \text{INT} ((x-x_0) / h) , \\ \xi_j &= (x-h(i+j)-x_0) / h . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Jeder Funktionswert läßt sich durch eine Aufsummierung der vier entsprechenden Unbekannten leicht errechnen.

6.3 Anwendung auf das Liniennivellement

Es wird eine Kombination der konjugierten Gradientenmethode und der Approximation durch finite Elemente berechnet. Nach einigen Relaxationsschritten mit Hilfe der konjugierten Gradienten (KG-Iterationen) wird die Berechnung unterbrochen und die globalen Restfehler der Näherungslösung werden durch eine Approximation mit finiten Elementen ermittelt (FE-Iteration). In den genäherten Verbesserungen treten diese globalen Restfehler als systematische Anteile auf.

Betrachtet man eine Beobachtungsgleichung für einen gemessenen Höhenunterschied

$$h_{i,j} + v = \Delta H_j - \Delta H_i + H_j^0 - H_i^0 , \quad (6.26)$$

wobei $h_{i,j}$ der gemessene Höhenunterschied, $\Delta H_i, \Delta H_j$ die unbekanntes Höhenzuschläge und H_i^0, H_j^0 die Näherungshöhen sind. Bei der Approximation (Generalisierung) werden die Unbekannten $\Delta H_i, \Delta H_j$ durch Funktionen approximiert.

$$u(\text{Lage von } H_i) = \Delta H_i \quad (6.27)$$

Dadurch kann eine gegenseitige Beeinflussung von benachbarten Unbekanntenzuschlägen erzwungen werden. Das globale Muster kann damit errechnet und die Restfehler eliminiert werden. Die Beobachtungsgleichungen erhalten damit folgende Form:

$$h_{i,j} + v = u(\text{Lage von } H_j) - u(\text{Lage von } H_i) + H_j^0 - H_i^0 \quad (6.28)$$

Da die Beobachtungen fast nur zwischen benachbarten Punkten durchgeführt werden, kann der Unterschied der Funktionswerte durch die Steigung u' im Mittelpunkt H_m und die Entfernung s der beiden Stationen ermittelt werden, sodaß sich folgende Beobachtungsgleichung ergibt, wenn beide Stationen unbekannte Höhen aufweisen:

$$h_{i,j} + v = u'(\text{Lage von } H_m) * s + H_j^0 - H_i^0 \quad (6.29)$$

Bei dieser Generalisierung der Unbekannten werden finite Elemente verwendet. Das Gebiet wird in regelmäßige Teilstücke geteilt und in jedem Teilstück wird ein lineares oder kubisches Polynom zur Bildung der Funktion verwendet. Wie in den beiden vorangehenden Abschnitten 6.1 und 6.2 erläutert wird, ergeben sich die Funktionswerte durch Linearkombinationen von Formfunktionen, wodurch eine glatte Funktion und im kubischen Fall auch eine stetige erste Ableitung erreicht wird. Durch diesen Übergang von den individuellen Stationsunbekannten ΔH_i auf unbekannte Funktionen wird eine wesentliche Reduktion der Unbekanntenzahl erreicht. Mit den neuen Unbekannten, den Funktionswerten (und ersten Ableitungen) an den Gitterpunkten u_k beziehungsweise u_k' , die die Faktoren für den Einfluß der entsprechenden Formfunktionen darstellen, ergibt sich folgendes neues Ausgleichsproblem (siehe (6.30)).

$$h_{i,j} + v = F(u_k, u_k') \quad (6.30)$$

Die individuellen Stationsunbekannten ΔH_i lassen sich aus der Funktion rückrechnen und ergeben sich aus den Formeln (6.7) beziehungsweise (6.23) als Linearkombination der Formfunktionen.

Um die Funktion eindeutig berechnen zu können, sind Festpunkte notwendig. Werden nur Höhenunterschiede verwendet, so werden nur die ersten Ableitungen der Formfunktionen benützt. Da sich die Formfunktionen der ersten Ableitungen (parallele Geraden zur Grundlinie im linearen Fall - N_5 und N_7 (siehe Bild 6.5) im kubischen Fall) nicht unterscheiden (außer im Vorzeichen), ist eine eindeutige Berechnung nicht möglich. Tritt in den Beobachtungsgleichungen ein Festpunkt auf,

$$\Delta H_i = u(\text{Lage von } H_i) = 0 \quad (6.31)$$

so verändert sich die Beobachtungsgleichung (6.28) beziehungsweise (6.29) zu

$$h_{ij} + v = u(\text{Lage von } H_j) + H_j^0 - H_i \quad (6.32)$$

Damit ergeben sich als Formfunktionen allgemeine Geraden im linearen und die Funktionen N_1 und N_3 im kubischen Fall, womit die eindeutige Berechnung möglich wird. Sind keine Festpunkte im Netz oder Teilnetz, vorhanden so kann die absolute Lage durch zusätzliche Bedingungen festgelegt werden (z.B. Biegebungsbedingungen siehe Kap. 6.7 und H. Ebner [1979]).

Beispiel:

Im folgenden wird an Hand des unregelmäßig verstärkten Nivellementzuges (Bild 5.8) vom vorhergehenden Kapitel dieses kombinierte Verfahren getestet und der Methode der konjugierten Gradienten gegenübergestellt. Nach jeweils 5 Relaxationsschritten wird eine Approximation durchgeführt, wobei über das gesamte Gebiet zwei kubische Elemente gelegt werden, die an den Rändern etwas

über das Beobachtungsgebiet hinausreichen. Bei dieser Wahl der Elemente wird das ursprüngliche Gleichungssystem mit 20 Unbekannten durch ein System mit 6 Unbekannten generalisiert.

Ergebnisse:

Schritt	konjugierte Gradienten			kombiniertes Verfahren		
	r	Δx	Δx _{max}	r	Δx	Δx _{max}
0		1273.0	-474.2		1273.0	-474.2
1	4415.6	744.2	-278.9	4415.6	744.2	-278.9
2	978.7	605.0	-220.1	978.7	605.0	-220.1
3	528.4	510.1	-167.5	528.4	510.1	-167.5
4	336.8	422.6	-176.9	336.8	422.6	-176.5
5	187.9	391.3	-163.3	187.9	391.3	-163.3
1.FE					59.5	-25.9
6	111.0	354.4	-142.2	121.5	47.0	-22.1
7	122.5	324.3	-122.5	55.1	34.5	-15.7
8	66.0	308.5	-108.1	33.4	30.8	-11.9
9	38.7	298.9	-99.9	12.4	29.9	-11.0
10	24.3	281.3	-86.7	6.5	29.3	-10.5
2.FE					2.7	-1.2
11	23.7	272.8	-77.7	5.7	2.1	-0.9
12	19.3	256.8	-69.6			
13	13.8	247.9	-65.6			
14	10.8	222.6	-58.0			
15	20.7	183.2	-51.1			
16	11.6	126.6	-39.3			
17	20.8	27.6	-9.8			
18	16.6	1.3	-0.8			

Wie aus den oben angeführten Zahlen für den Betrag des Restfehlervektors $|Δx|$ und der maximalen Restfehler $Δx_{max}$ zu erkennen ist, senkt sich der Fehler bei der ersten FE-Iteration um ungefähr 5/6. Bemerkenswert ist die gute Konvergenz der weiteren KG-Iterationen nach dieser ersten Approximation. Nach ungefähr fünf Relaxationsschritten verlangsamt sich die Konvergenzgeschwindigkeit. Die nun durchgeführte neue Approximation mit derselben Feldeinteilung wie früher läßt den Restfehler auf unter 0.25% der Ausgangsfehler absinken. Da die Felder sich nicht verändert haben, ist bei dieser Approximation lediglich die rechte Seite mit den Funktionswerten neu zu rechnen und zu reduzieren.

Schön zu erkennen ist die Wirksamkeit dieses Verfahrens, wenn man die Restfehler der Unbekannten vor und nach der Approximation aufzeichnet.

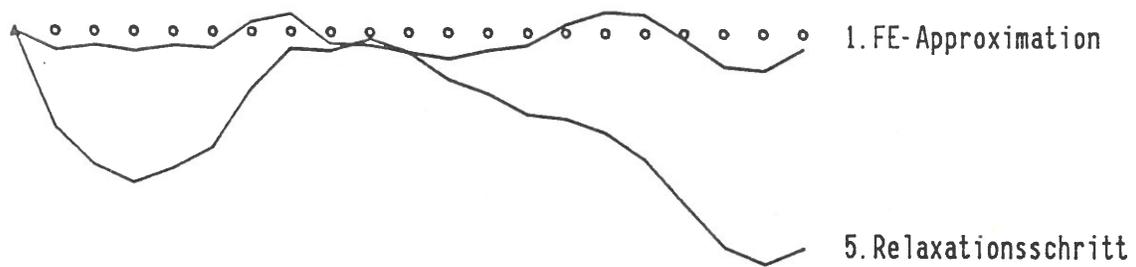


Bild 6.6: Unregelmäßig versteifter Nivellementzug;
Reduktion der Restfehler durch die 1. FE-Iteration

Diese verbleibenden Fehler werden nun in 10-facher Vergrößerung aufgetragen und die Wirkung der fünf weiteren Relaxationsschritte und der zweiten FE-Approximation dargestellt.

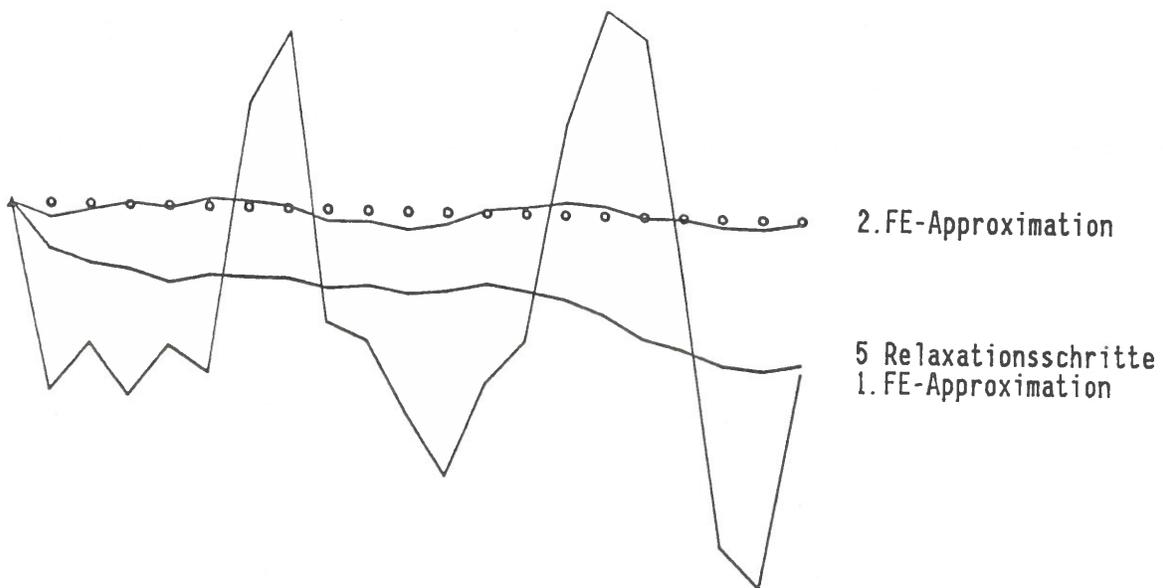


Bild 6.7: Unregelmäßig versteifter Nivellemnetz;
Reduktion der Restfehler durch die 2. FE-Iteration

Anhand von Bild 6.7 erkennt man sehr gut die unregelmäßigen Restfehleranteile,

die von der ersten Approximation zurückbleiben. Durch die fünf Relaxations-
schritte wird diese Kurve geglättet und anschließend werden durch die zweite
Kurvenapproximation wieder die systematischen Fehleranteile gut eliminiert:

6.4 Zweidimensionaler linearer finite Elementansatz

Für den zweidimensionalen Fall werden zunächst lineare finite Elemente
gewählt. Diese Elemente haben in einem Einheitsintervall folgende Darstellung.

$$u(\xi, \eta) = c_{00} + c_{01}\eta + c_{10}\xi + c_{11}\eta\xi \quad \begin{array}{l} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \end{array} \quad (6.33)$$

Führt man wieder einen Unbekanntenübergang auf die Funktionswerte in den Knoten
durch, so setzt man zunächst die Funktionswerte in diesen Knoten an.

$$\begin{aligned} u(0,0) &= c_{00} \\ u(0,1) &= c_{00} + c_{01} \\ u(1,0) &= c_{00} + c_{10} \\ u(1,1) &= c_{00} + c_{01} + c_{10} + c_{11} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Daraus ergibt sich die Umkehrung

$$\begin{aligned} c_{00} &= u(0,0) \\ c_{01} &= -u(0,0) + u(0,1) \\ c_{10} &= -u(0,0) + u(1,0) \\ c_{11} &= u(0,0) - u(0,1) - u(1,0) + u(1,1) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Setzt man diese Werte in die Darstellung im Einheitsintervall ein und ordnet die
Gleichung nach den neuen Unbekannten, so erhält man

$$u(\xi, \eta) = (1-\eta)(1-\xi)u(0,0) + \eta(1-\xi)u(0,1) + (1-\eta)\xi u(1,0) + \eta\xi u(1,1) \quad (6.36)$$

Nun geht man von der Darstellung im Einheitsintervall ab und geht auf mehrere Elemente mit den globalen Koordinaten x, y und den knotenbezogenen Koordinaten ξ_i, η_j über, wobei die Knoten selbst wieder durch Indizes bezeichnet werden.

$$u(x, y) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 (1+(-1)^{i+1}\xi_i)(1+(-1)^{j+1}\eta_j) u_{i+1, j+1} \quad (6.37)$$

$$ii = \text{INT} \left((x-x_0) / a \right) \quad \xi_i = (x-a(ii+i)-x_0) / a$$

$$jj = \text{INT} \left((y-y_0) / b \right) \quad \eta_j = (y-b(jj+j)-y_0) / b$$

Die Ableitungen ergeben sich mit

$$u_x(x, y) = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-1)^{i+1} (1+(-1)^{j+1}\eta_j) u_{i+1, j+1} \quad (6.38)$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{b} \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-1)^{j+1} (1+(-1)^{i+1}\xi_i) u_{i+1, j+1} \quad (6.39)$$

Die Werte a und b sind die Intervalllängen in x - und y -Richtung.

6.5 Zweidimensionaler kubischer finite Elementansatz

Für jedes Flächenelement wird ein bikubisches Polynom mit den unbekanntenen Koeffizienten c_{ij} , $i=0,1, \dots, 3$, $j=0,1, \dots, 3$ angesetzt.

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = & c_{00} + c_{01}\eta + c_{02}\eta^2 + c_{03}\eta^3 + \\ & + c_{10}\xi + c_{11}\xi\eta + c_{12}\xi\eta^2 + c_{13}\xi\eta^3 + \\ & + c_{20}\xi^2 + c_{21}\xi^2\eta + c_{22}\xi^2\eta^2 + c_{23}\xi^2\eta^3 + \\ & + c_{30}\xi^3 + c_{31}\xi^3\eta + c_{32}\xi^3\eta^2 + c_{33}\xi^3\eta^3 \end{aligned}$$

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 c_{ij} \xi^i \eta^j \quad (6.40)$$

An Stelle der unbekanntenen Koeffizienten $c_{i,j}$ wird auf neue Unbekannte übergegangen, die eine direkte Beziehung zum Nachbarelement herstellen. Diese neuen Unbekannten sind die Funktionswerte an den Intervallgrenzen, die Werte der Ableitungen der Funktion nach ξ und η an den Intervallgrenzen und die Werte der gemischten zweiten Ableitungen an den Intervallgrenzen.

$$\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} = u_{\xi}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 i c_{i,j} \xi^{i-1} \eta^j \quad (6.41)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} = u_{\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 j c_{i,j} \xi^i \eta^{j-1} \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial u_{\xi}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial u_{\eta}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ij c_{i,j} \xi^{i-1} \eta^{j-1} \quad (6.43)$$

Werden für diese Funktionen die speziellen Intervallgrenzen eingesetzt, so ergeben sich folgende Beziehungen.

$$\begin{aligned} u(0,0) &= c_{00} & u_{\eta}(0,0) &= c_{01} \\ u(1,0) &= \sum_{i=0}^3 c_{i0} & u_{\eta}(1,0) &= \sum_{i=0}^3 c_{i1} \\ u(0,1) &= \sum_{j=0}^3 c_{0j} & u_{\eta}(0,1) &= \sum_{j=0}^3 j c_{0j} \\ u(1,1) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 c_{ij} & u_{\eta}(1,1) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 j c_{ij} \\ \\ u_{\xi}(0,0) &= c_{10} & u_{\xi\eta}(0,0) &= c_{11} \\ u_{\xi}(1,0) &= \sum_{i=0}^3 i c_{i0} & u_{\xi\eta}(1,0) &= \sum_{i=0}^3 i c_{i1} \\ u_{\xi}(0,1) &= \sum_{j=0}^3 c_{1j} & u_{\xi\eta}(0,1) &= \sum_{j=0}^3 j c_{1j} \\ u_{\xi}(1,1) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 i c_{ij} & u_{\xi\eta}(1,1) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 j c_{ij} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann von den Unbekannten $c_{i,j}$ auf die neuen Unbekannten $u(0,0), u(1,0), u(0,1), \dots, u_{\xi\eta}(1,1)$ übergegangen werden. Ordnet man die

unbekannten Koeffizienten in der Reihenfolge $c_{00}, c_{01}, \dots, c_{33}$ und die neuen Unbekannten in der Reihenfolge $u(0,0), u(1,0) \dots u_{\xi\eta}(1,1)$ in jeweils einem Vektor c und u an, so kann der Übergang dargestellt werden durch

$$u = A c, \tag{6.45}$$

wobei sich die Matrix A aus den obigen Formeln ergibt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & -9 & 9 & 6 & 3 & -6 & -3 & 6 & -6 & 3 & -3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & -4 & -2 & 4 & 2 & -3 & 3 & -3 & 3 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & -3 & -3 & 3 & 3 & -4 & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -4 & 4 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Stellt man die Formel des bikubischen Flächenelements in Vektorform dar, so ergibt sich

$$u(\xi, \eta) = c^T \Xi = \Xi^T c, \quad (6.46)$$

wenn Ξ ein Vektor mit den Elementen $\xi^i \eta^j$, $i, j=0, 1, 2, 3$ ist. Der Übergang auf die neuen Unbekannten stelle sich dar als

$$u(\xi, \eta) = \Xi^T c = \Xi^T A^{-1} u = \psi^T u. \quad (6.47)$$

Zur vereinfachten Schreibweise werden zunächst folgende Funktionen eingeführt.

$$\chi(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 = (t-1)^2 (2t+1) \quad (6.48)$$

$$\omega(t) = t - 2t^2 + t^3 = t (t-1)^2 \quad (6.49)$$

$$\chi(1-t) = 3t^2 - 2t^3 = 1 - \chi(t) \quad (6.50)$$

$$\omega(1-t) = t^2 - t^3 \quad (6.51)$$

Die Koeffizienten p_1, p_2, \dots, p_{16} von ψ werden aus $\Xi^T A^{-1}$ errechnet.

$$\begin{array}{ll} p_1 = \chi(\xi) \chi(\eta) & p_9 = \chi(\xi) \omega(\eta) \\ p_2 = \chi(1-\xi) \chi(\eta) & p_{10} = \chi(1-\xi) \omega(\eta) \\ p_3 = \chi(\xi) \chi(1-\eta) & p_{11} = -\chi(\xi) \omega(1-\eta) \\ p_4 = \chi(1-\xi) \chi(1-\eta) & p_{12} = -\chi(1-\xi) \omega(1-\eta) \\ p_5 = \omega(\xi) \chi(\eta) & p_{13} = \omega(\xi) \omega(\eta) \\ p_6 = -\omega(1-\xi) \chi(\eta) & p_{14} = \omega(1-\xi) \omega(\eta) \\ p_7 = \omega(\xi) \chi(1-\eta) & p_{15} = -\omega(\xi) \omega(1-\eta) \\ p_8 = -\omega(1-\xi) \chi(1-\eta) & p_{16} = \omega(1-\xi) \omega(1-\eta) \end{array} \quad (6.52)$$

Ordnet man nun die vier Eckpunkte des quadratischen Elementes mit seinen vier Unbekannten in entsprechender Reihenfolge zu, so erhält man

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = & p_1 u(0,0) + p_5 u_\xi(0,0) + p_9 u_\eta(0,0) + p_{13} u_{\xi\eta}(0,0) + \\ & + p_2 u(1,0) + p_6 u_\xi(1,0) + p_{10} u_\eta(1,0) + p_{14} u_{\xi\eta}(1,0) + \\ & + p_3 u(0,1) + p_7 u_\xi(0,1) + p_{11} u_\eta(0,1) + p_{15} u_{\xi\eta}(0,1) + \\ & + p_4 u(1,1) + p_8 u_\xi(1,1) + p_{12} u_\eta(1,1) + p_{16} u_{\xi\eta}(1,1). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Die 16 Unbekannten dieses Elementes können nun sehr leicht in das Nachbarelement übertragen werden, um einen stetigen Verlauf der Approximationsfläche zu erhalten. Mit Hilfe der neuen Unbekannten, die jeweils vier Werte in den Eckpunkten darstellen, kann durch Identifikation mit dem entsprechenden Knoten des Nachbarelementes dieser Übergang hergestellt werden. Wenn man den Einfluß einer Unbekannten betrachtet, so wirkt sich dieser nur in vier Elementen aus. Im Bild 6.8 werden diese Auswirkungen als Flächen dargestellt, um den Einfluß der einzelnen Unbekannten aufzuzeigen.

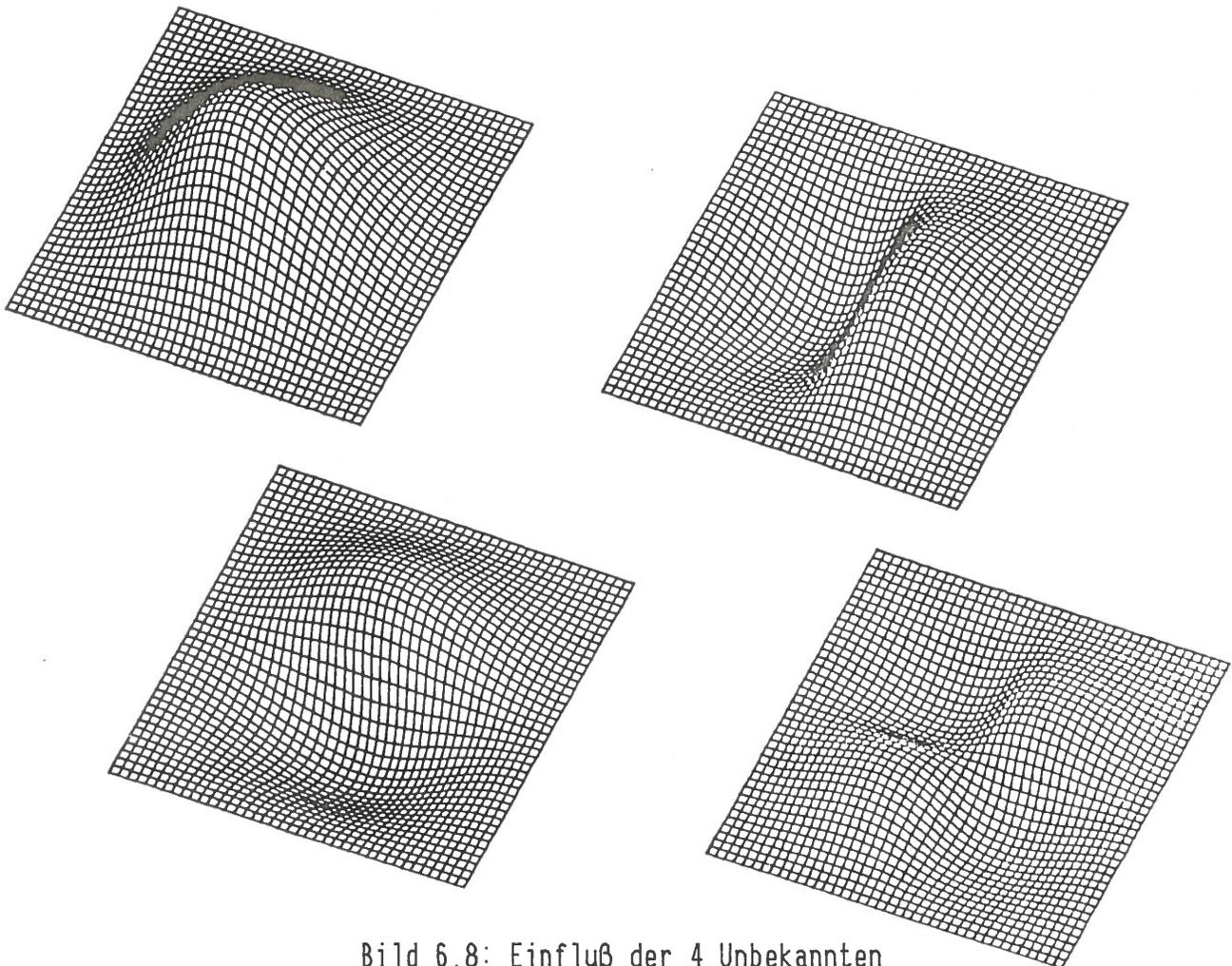


Bild 6.8: Einfluß der 4 Unbekannten

Führt man anstatt der Parameter ξ und η jeweils lokale Parameter ξ_i und η_j in bezug auf den entsprechenden Gitterpunkt ein ($\xi_i: i=0 \wedge \xi_i=\xi; i=1 \wedge \xi_i=1-\xi$
 $\eta_j: j=0 \wedge \eta_j=\eta; j=1 \wedge \eta_j=1-\eta$), so ergibt sich die Formel für die bikubische Funktion mit

$$u(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 \chi(\xi_i) \chi(\eta_j) u(i, j) + (-1)^i \omega(\xi_i) \chi(\eta_j) u_{\xi}(i, j) + (-1)^j \chi(\xi_i) \omega(\eta_j) u_{\eta}(i, j) + (-1)^{i+j} \omega(\xi_i) \omega(\eta_j) u_{\xi\eta}(i, j) \quad (6.54)$$

Die Ableitungen der Funktion in Richtung ξ und η ergeben sich mit

$$u_{\xi}(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-1)^i \chi'(\xi_i) \chi(\eta_j) u(i, j) + \omega'(\xi_i) \chi(\eta_j) u_{\xi}(i, j) + (-1)^{i+j} \chi'(\xi_i) \omega(\eta_j) u_{\eta}(i, j) + (-1)^j \omega'(\xi_i) \omega(\eta_j) u_{\xi\eta}(i, j) , \quad (6.55)$$

$$u_{\eta}(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-1)^j \chi(\xi_i) \chi'(\eta_j) u(i, j) + (-1)^{i+j} \omega(\xi_i) \chi'(\eta_j) u_{\xi}(i, j) + \chi(\xi_i) \omega'(\eta_j) u_{\eta}(i, j) + (-1)^i \omega(\xi_i) \omega'(\eta_j) u_{\xi\eta}(i, j) . \quad (6.56)$$

Geht man auf globale Koordinaten x, y über und kennzeichnet die entsprechenden Knoten durch hochgestellte Indizes, so ergibt sich

$$u(x, y) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 \chi(\xi_i) \chi(\eta_j) u^k + (-1)^i \omega(\xi_i) \chi(\eta_j) a u_{\xi}^k + (-1)^j \chi(\xi_i) \omega(\eta_j) b u_{\eta}^k + (-1)^{i+j} \omega(\xi_i) \omega(\eta_j) ab u_{\xi\eta}^k \quad (6.57)$$

mit

$k = ii+i, jj+j \dots$ Knotenbezeichnung

$ii = \text{INT}((x-x_0)/a) \quad \xi_i = (x-a(ii+i)-x_0) / a$

$jj = \text{INT}((y-y_0)/b) \quad \eta_j = (y-b(jj+j)-y_0) / b .$

Die Ableitungen der Funktion in x und y Richtung ergeben sich mit

$$u_x(x,y) = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-1)^i \chi'(\xi_i) \chi(\eta_j) u^k + \omega'(\xi_i) \chi(\eta_j) a u_{\xi}^k +$$

$$+ (-1)^{i+j} \chi'(\xi_i) \omega(\eta_j) b u_{\eta}^k + (-1)^{j \omega'(\xi_i) \omega(\eta_j) ab u_{\xi \eta}^k \quad (6.58)$$

$$u_y(x,y) = \frac{1}{b} \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 (-1)^j \chi(\xi_i) \chi'(\eta_j) u^k + (-1)^{i+j} \omega(\xi_i) \chi'(\eta_j) a u_{\xi}^k +$$

$$+ \chi(\xi_i) \omega'(\eta_j) b u_{\eta}^k + (-1)^i \omega(\xi_i) \omega'(\eta_j) ab u_{\xi \eta}^k , \quad (6.59)$$

wobei

$$\chi(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \quad (6.60)$$

$$\omega(t) = t - 2t^2 + t^3 \quad (6.61)$$

$$\chi'(t) = \frac{d\chi(t)}{dt} = 6t^2 - 6t \quad (6.62)$$

$$\omega'(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = 1 - 4t + 3t^2 \quad (6.63)$$

sind.

6.6 Abschätzung der Rechenoperationen

Bezeichnet man mit m die Anzahl der Unbekannten und mit n die Anzahl der Beobachtungsgleichungen, so ergeben sich bei einem Relaxationsschritt mit den konjugierten Gradienten $2n(g+1)+2m$ Additionen oder Subtraktionen und $2n(g+1)+2m+2$ Multiplikationen beziehungsweise Divisionen, wobei g die Anzahl der Elemente ungleich Null pro Beobachtungszeile darstellt (Auswertung der Formeln 2.46). Bei der Berechnung der finiten Elemente und deren Aufsummierung bei den Normalgleichungen treten bei bilinearen Elementen $n(8v^2+6v+13)$ beziehungsweise $n(8v^2+10v+12)$ Rechenoperationen auf (Auswertung der Formeln 6.36-6.38). Der Wert von v ist durch die Anzahl der Arten von Unbekannten festgelegt. Bei einem Höhennetz wird nur eine Art von Unbekannten (Höhen), bei einem Lagenetz werden zwei Arten von Unbekannten (x,y -Koordinaten) auftreten. Zusätzliche Unbekannte wie zum Beispiel ein gebietsweiser Refraktionskoeffizient oder Maßstäbe können als alleinstehende Unbekannte oder auch als eigene Unbekanntentart Berücksichtigung finden. Bei solchen gemischten Modellen ist die

Rechenoperationsabschätzung etwas aufwendiger. Am einfachsten ist es, die Formeln für die normale Aufstellung der Normalgleichungen zu verwenden und die zusätzlichen Operationen, die durch die Berechnung der Formfunktionen der finiten Elemente entstehen, zu vernachlässigen. Es treten bei der Aufstellung $\frac{1}{2}ng(g+3)$ Additionen und gleich viele Multiplikationen auf. Für bikubische Elemente ergeben sich $n(128v^2+24v+10)$ beziehungsweise $n(128v^2+40v+102)$ Operationen (Auswertung der Formeln 6.57-6.63). Da ab der zweiten finiten Elemente Approximation nur mehr die rechte Seite neu ermittelt werden muß, sind hier nur mehr $4ng$ Additionen und Multiplikationen bei bilinearen Elementen und je $16ng$ Operationen bei bikubischen Elementen durchzuführen.

Für die Gleichungsauflösung wird auf eine Rechenoperationabschätzung nach R. Hanson (1978) zurückgegriffen:

Cholesky bei einer vollen Matrix	Sub.	Mult.+Add.	
Zerlegung	$\frac{1}{2} m(m-1)$	$\frac{1}{6} m(m+4)(m-1)$	
rechte Seite	m	$\frac{1}{2} m(m+1)$	
Auflösung	m	$\frac{1}{2} m(m+1)$	
Cholesky bei gebänderter Matrix	Sub.	Mult.+Add.	
Zerlegung	$\frac{1}{2} (b-1)(2m-b)$	$\frac{1}{6} b(b+1)(3m-2b+2)$	
rechte Seite	m	$\frac{1}{2} b(2m-b+1)$	
Auflösung	m	$\frac{1}{2} b(2m-b+1)$	(6.64)

Zusätzlich müssen noch m Wurzeln berechnet werden. In den Formeln (6.64) bedeutet b die Bandbreite. Das ist die größte Entfernung eines Nichtnull-elementes von der Diagonale, wobei auch das Diagonalelement mitgezählt wird. Bei profilorientierter Verarbeitung muß eine mittlere Bandbreite eingesetzt werden.

6.7 Anwendung auf Höhennetze

Die Umsetzung dieser Formeln auf die Approximationsaufgabe bei dem Verfahren der kombinierten Berechnung mit den konjugierten Gradienten erfolgt auf ähnliche Art wie beim eindimensionalen Ansatz (siehe Kap.6.3). Höheninformation bei Beobachtungen zu oder von einem Festpunkt geht direkt in die entsprechende Formel (6.37) bzw. (6.57) für $u(x,y)$ ein, wobei x und y die Lageparameter des Höhennetzes und $u(x,y)$ die entsprechende Höheninformation darstellen. Aus den beobachteten Höhenunterschieden wird wieder eine Information über die Steigung der Approximationsfläche gewonnen, wobei die Formeln 6.38 und 6.39 bzw. 6.58 bis 6.63 angewendet werden. Wie man aus den Zeichnungen für die Formfunktionen (Bilder 6.5 und 6.8) entnehmen kann, ist die Ableitung der χ -Funktion bis auf das Vorzeichen unabhängig vom Bezugspunkt. Wenn also nur Höhenunterschiede beobachtet werden, muß die absolute Höhe durch Festlegung einer der Formfunktionen frei gewählt werden. Wenn zu einem Knoten überhaupt keine oder zu wenig Information (absolute oder relative Höheninformation) vorhanden ist, führt dies ebenfalls auf ein singuläres Problem. All diese Schwierigkeiten können durch Einführung von Biegebedingungen vermieden werden. Zwischen den unbekanntem Funktionswerten werden dabei zusätzliche Beobachtungen eingeführt, die die Krümmung der Approximationsfläche bestimmen. Durch Variation der entsprechenden Gewichte kann die Stärke der Krümmung der Approximationsfläche beeinflußt werden. Durch diese zusätzlichen Beobachtungen werden alle Rangdefekte behoben. Diese Methode der Biegebedingungen wurde von H. Ebner [1979] zur Berechnung von digitalen Höhenmodellen mit Hilfe linearer finiter Elemente angewendet.

Das in Kapitel 3 dargestellte Höhennetz wird mit diesem kombinierten Verfahren berechnet. Beim Höhennetz Fall 1 und 2 (Festpunkte in regelmäßig verteilter Randlage bzw. ein Festpunkt am Rand) wird nach 10 Relaxationsschritten (KG-Iterationen) eine Flächenapproximation

(FE-Approximation) durchgeführt, wobei zwei kubisch Elemente zugelassen werden (6 Gitterpunkte mit je 4 Unbekannten, Übergang von 197 bzw. 199 auf 24 Unbekannte). Im Falle 1 können damit im ersten Schritt die maximalen Abweichungen von 41 Einheiten (ca. 10% des Anfangsfehlers) auf 12 Einheiten (ca. 3% des Anfangsfehlers) gesenkt werden (siehe Bilder 6.9 und 6.10).

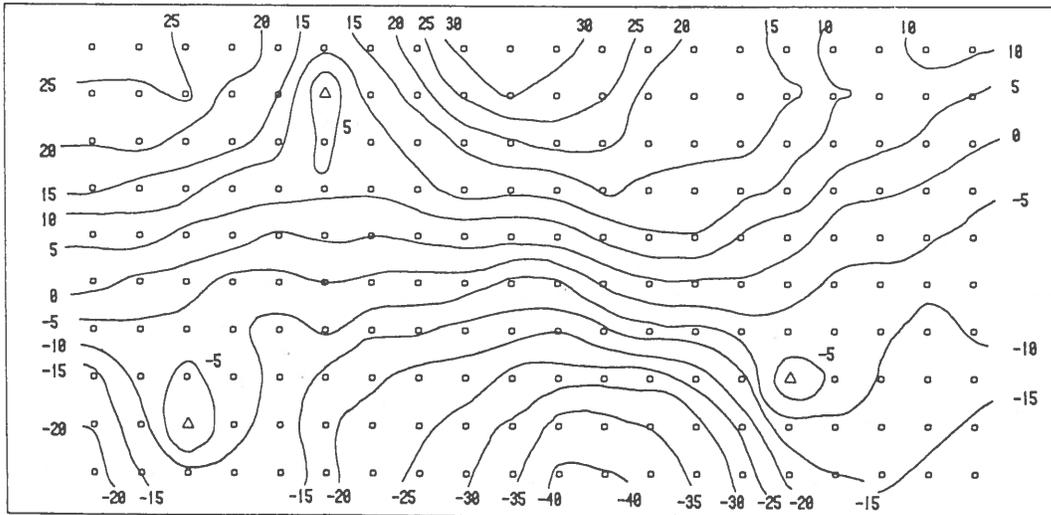


Bild 6.9: Höhennetz, Fall 1;

Restfehler nach 10 Relaxationsschritten

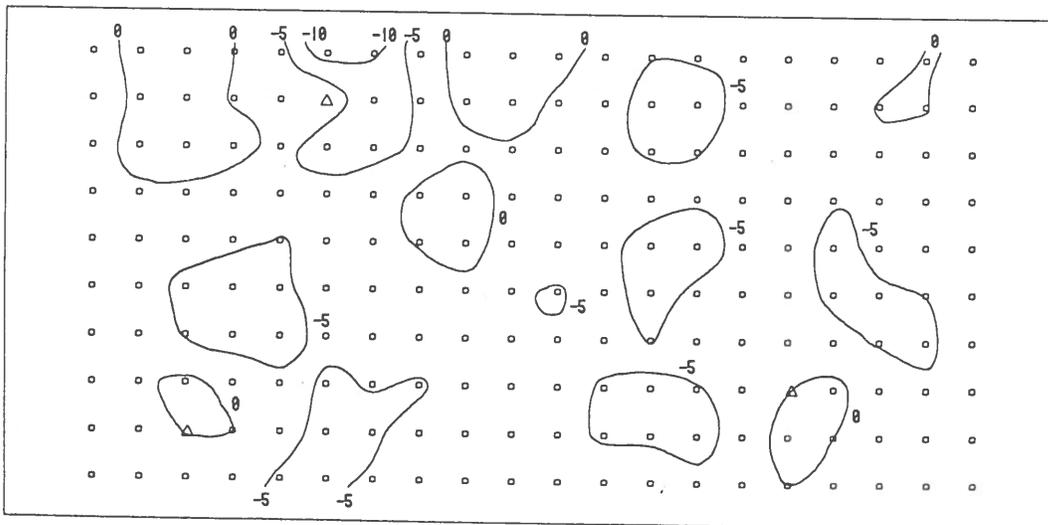


Bild 6.10: Höhennetz, Fall 1;

Restfehler nach 10 Relaxationsschritten und einer
FE-Approximation

Da bei diesem Beispiel die konjugierten Gradienten eine sehr gute Konvergenz aufweisen, ist der Vorteil durch die Approximation sehr gering. Wenn man das Höhennetz, Fall 2 betrachtet, das durch seine schlechte Lagerung keine gute Konvergenz aufweist, so kann man die Stärke des kombinierten Verfahrens schon besser erkennen. Die maximale Abweichung sinkt durch die FE-Approximation von 64 Einheiten auf 9 Einheiten ab, womit die Fehler bis auf ungefähr 2% der Ausgangswerte abnehmen (siehe Bild 6.11 und 6.12).

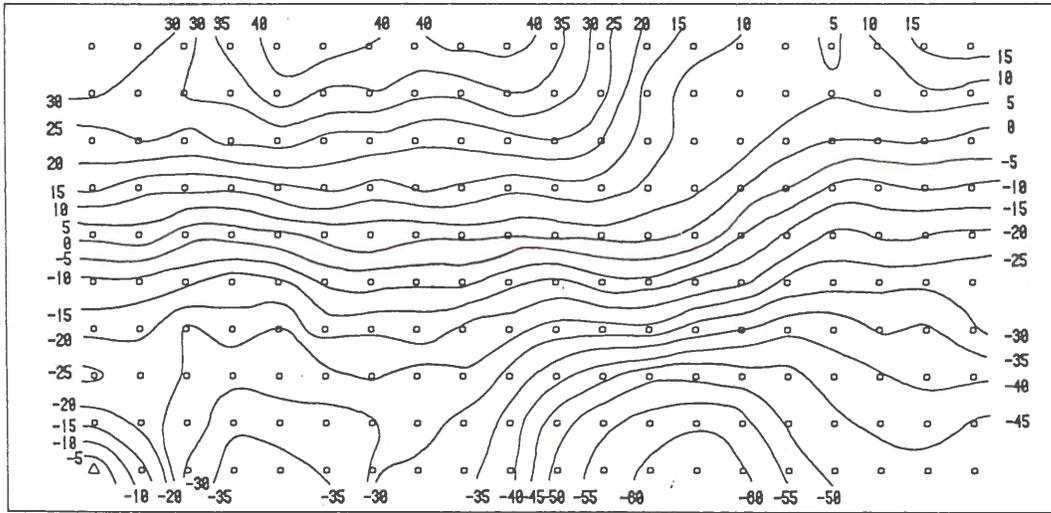


Bild 6.11: Höhennetz, Fall 2;

Restfehler nach 10 Relaxationsschritten

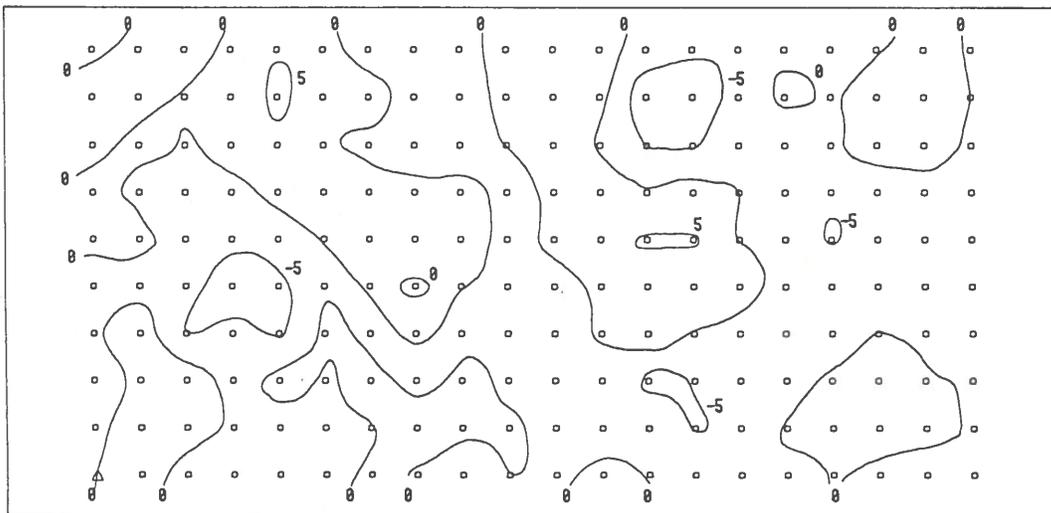


Bild 6.12: Höhennetz, Fall 2;

Restfehler nach 10 Relaxationsschritten und einer
FE-Approximation

Nach weiteren 10 Relaxationsschritten ist der Restfehler bereits auf 0.2% gesunken. Hier kann man sehr schön die wirkungsvolle Ergänzung der beiden Verfahren erkennen. Es wird nach gleicher Rechenzeit wie im Fall 1 auch hier die gleiche Rechengenauigkeit erreicht.

Wenn man die regelmäßige Verteilung der Lagekoordinaten durch zufällige Verteilung stört, sodaß anstatt der regelmäßigen Quadrate nun ein unregelmäßiger Punkthaufen entsteht (siehe Bild 6.13), so gelangt man zu folgendem Ergebnis:

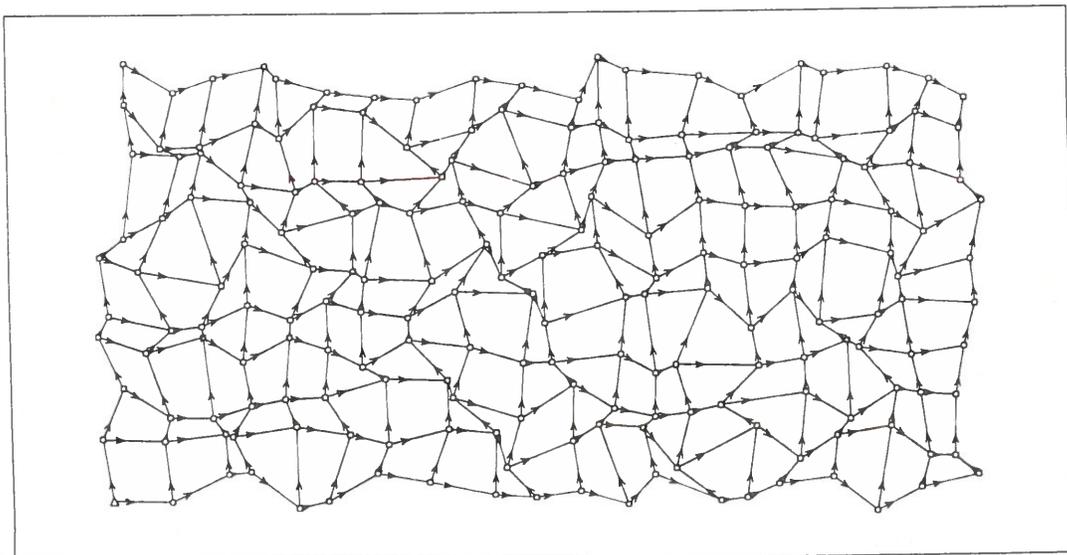


Bild 6.13: Höhenetz mit unregelmäßiger Punktverteilung

konj. Gradienten	10 KG	30 KG	50 KG	60 KG
$ \Delta x $	407	132	92	8
Δx_{\max}	-64	-15	-8	-1
komb. Verfahren	10 KG	FE	10 KG	FE
$ \Delta x $	407	91	62	8
Δx_{\max}	-64	-16	-7	-1

Wie man erkennt, ist in diesem Fall das kombinierte Verfahren nach zwei Iterationen mit jeweils 10 Relaxationsschritten (KG) und einer Approximation (FE) gleich gut wie die konjugierte Gradientenmethode mit 60 Relaxationsschritten. Wenn man die Anzahl der Operationen pro Relaxationsschritt berechnet, wobei nur die arithmetischen Rechenoperationen und nicht die

Adressrechenoperationen berücksichtigt werden, so gelangt man auf ungefähr 2600 Grundoperationen (Mult.+Add.). Diese Anzahl ist eine lineare Funktion der Anzahl der Beobachtungen und der Anzahl der Unbekannten. Bei 60 Relaxationsschritten ergeben sich damit ungefähr 157 000 Operationen.

Bei der Approximationsmethode mit bikubischen Elementen ergeben sich für die Aufstellung und Berechnung der Unbekannten rund 100 000 Grundoperationen, wobei diese Anzahl wieder eine lineare Funktion der Beobachtungsanzahl ist. Der Großteil der Rechenoperationen entsteht bei der Aufstellung der Normalgleichungen, da in jeder Beobachtungsgleichung 16 bzw. mit der rechten Seite 17 Koeffizienten ungleich Null sind. Diese Normalgleichungen müssen jedoch nur einmal aufgestellt und reduziert werden und können dann öfters verwendet werden (siehe Beispiel in Kap. 6.3). Für jede weitere Approximation ist also nur mehr die rechte Seite neu zu berechnen und zu reduzieren, wobei ungefähr 6 500 Operationen anfallen. Der Einfluß der Anzahl der finiten Elemente ist bei dieser Größenordnung des Beispiels verschwindend klein. In der Summe ergeben sich bei dem kombinierten Verfahren (2 x 10 Relaxationsschritte und 2 bikubische FE-Approximationen) wieder ungefähr 157 000 arithmetische Rechenoperationen.

Bei der Verwendung von bilinearen Elementen reduziert sich die sehr aufwendige Normalgleichungsaufstellung auf 11 000 Operationen, da in den Beobachtungsgleichungen nur 4 beziehungsweise mit der rechten Seite 5 Elemente ungleich Null sind. Wenn man wieder 20 Relaxationsschritte und 2 bilineare FE-Approximationen mit 24 Knoten durchführt, so ergeben sich 66 000 Operationen. Der dabei auftretende Genauigkeitsverlust wird in Kapitel 6.8 näher untersucht.

Neben der Verringerung der Rechenzeit erhöht diese kombinierte Methode auch noch die Rechenstabilität bei instabilen oder nur am Rande gelagerten Netzen (siehe Endbemerkungen des Kap. 5.4).

Werden diese Gleichungen mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens ohne Berücksichtigung der Nullelemente aufgelöst, so hat man etwa die zwanzigfache Anzahl von Operationen (ca. $1.35 \cdot 10^6$) durchzuführen. Wenn ein Verfahren mit Berücksichtigung der Nullelemente verwendet wird, so ist ohne die Umnumerierungsphase mit ungefähr 20 000 bis 102 000 Operationen zu rechnen, wobei eine minimale Bandbreite von 11 und eine maximale Bandbreite von 31 angenommen wird. Bei einer mittleren Bandbreite von 21 ergeben sich 53 000 Operationen. Bei diesem Verfahren müssen eine aufwendigere Datenorganisation und mehr Arbeitsspeicher oder Plattenzugriffe mit direkter Adressierung in Kauf genommen werden.

6.8 Anwendung auf Lagenetze

Bei der Anwendung dieser kombinierten Berechnungsmethode auf Lagenetze muß für jede Gruppe von Koordinatenunbekannten eine Approximationsfläche angesetzt werden. Die Orientierungsunbekannten werden mit Hilfe von Summenzeilen bei der Aufstellung der finiten Elemente eliminiert. Der Maßstabsfaktor wird bei der Approximation als isolierte Unbekannte zusätzlich zu den Knotenunbekannten angesetzt.

Da der Aufwand bei der Berechnung mit bikubischen und bilinearen Elementen sehr unterschiedlich ist, wird nun versucht, den erhöhten Rechenaufwand bei der Verwendung bikubischer Elemente zu rechtfertigen. Zu diesem Zwecke werden die Abweichungen mehrerer Netze mit beiden Verfahren verglichen.

Anhand eines Streckennetzes mit 200 Punkten, davon 4 Festpunkten und 675 widerspruchsfreien Beobachtungen, soll die Wirkung der beiden Approximationsverfahren (bikubische und bilineare Elemente) aufgezeigt werden. Die durch einen Zufallsgenerator verfälschten Näherungskordinaten werden durch

25 Relaxationsschritte nach der Methode der konjugierten Gradienten verbessert.
Die Restfehler, die im Bild 6.14 dargestellt sind, dienen als Ausgangssituation
für die Approximationen.

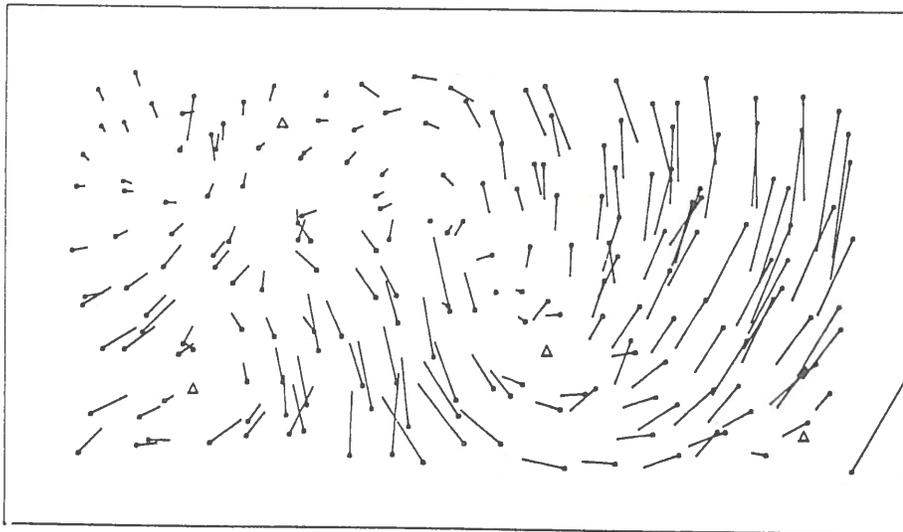


Bild 6.14: Streckennetz zum Approximationsvergleich;
Ausgangslage nach 25 Relaxationsschritten

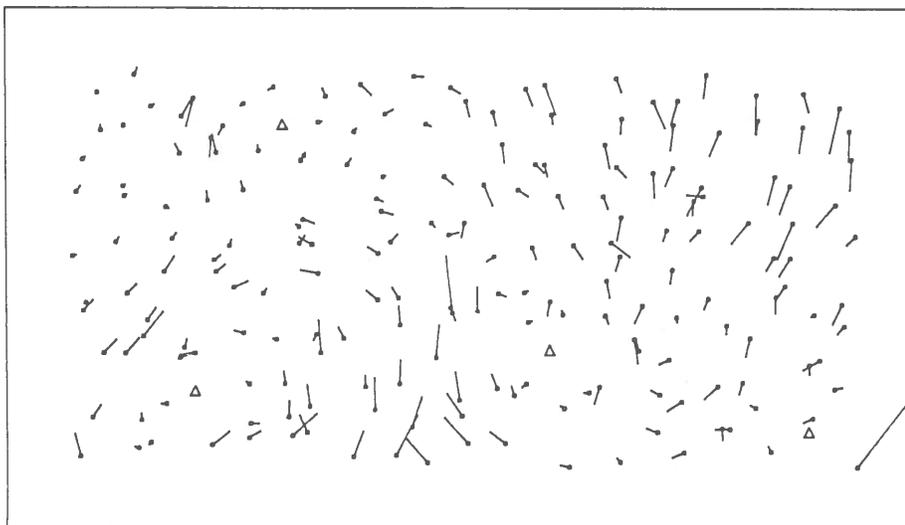


Bild 6.15: Streckennetz zum Approximationsvergleich;
Ergebnis mit 2 bikubischen Elementen

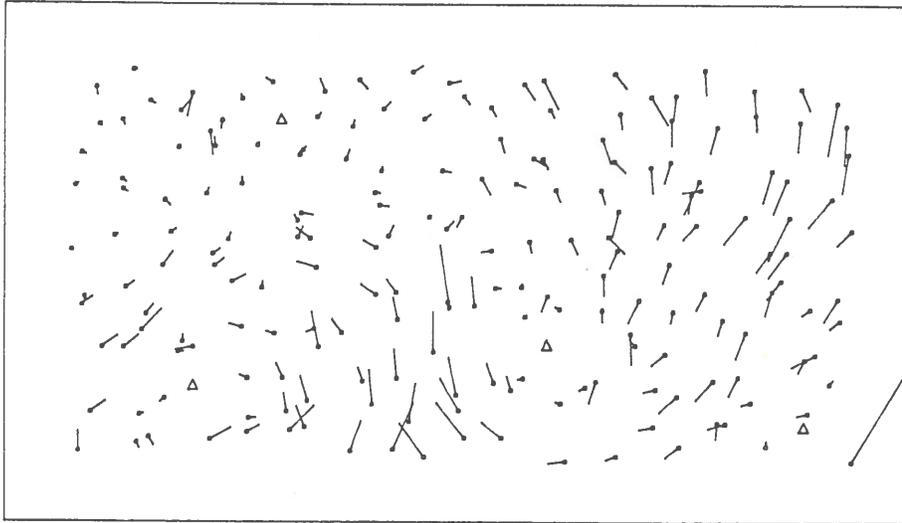


Bild 6.16: Streckennetz zum Approximationsvergleich;
Ergebnis mit 15 bilinearen Elementen

Für das im Bild 6.15 aufgezeigte Ergebnis der Approximation werden zwei bikubische Elemente verwendet. Aufgrund der auftretenden sechs Gitterpunkte gibt es 48 Unbekannte (je 4 Unbekannte pro Gitterpunkt und pro Unbekanntentyp). Das Ergebnis beim bilinearen Fall (Bild 6.16) berechnet sich durch eine Approximation mit 15 Elementen, wobei 24 Gitterpunkte mit je 2 Unbekannten auftreten. Wie aus den Bildern 6.15 und 6.16 ersichtlich ist, ist der höhere Rechenaufwand nicht zu rechtfertigen. Das Ergebnis ist bei beiden Approximationsmethoden, wo jeweils von 392 Unbekannten auf 48 Unbekannte übergegangen (generalisiert) wird, fast gleich. Für die Aufstellung der bikubischen Elemente werden 457 000 Grundrechenoperationen (Multiplikationen plus Additionen), für die der bilinearen Elementen dagegen lediglich 42 000 Operationen benötigt.

Das im Kapitel 3.2 dargestellte Streckennetz Fall 1 bis 4 wird mit dieser kombinierten Methode erneut berechnet. Der Rechengang wird bei allen Netzen beibehalten. Es werden jeweils zwei äußere Iterationen (Verbesserung der Näherungskordinaten, Neuberechnung der Koeffizienten der linearisierten

Beobachtungsgleichung) durchgeführt, wobei jede Iteration aus zehn Relaxationsschritten mit der Methode der konjugierten Gradienten und einer Flächenapproximation mit 16 bilinearen Elementen besteht. Für die Berechnung sind damit ungefähr 240 000 Grundoperationen erforderlich. Da pro Relaxationsschritt 9 000 Operationen notwendig sind, entspricht der Aufwand der Approximationen ungefähr 8 Relaxationsschritten. Bei den regelmäßigen Netzen liegt der maximale Fehler unter 0.5% der Ausgangsverfälschung, wobei zu bemerken ist, daß das Netz mit zwei Festpunkten in benachbarter Randlage (Fall 3) das beste Ergebnis liefert. Beim Streckennetz Fall 4 liegt der Großteil der Restfehler unter 1%. Die drei nordöstlichen Randpunkte weisen allerdings Fehler von ungefähr 3% der Ausgangsverfälschung auf. Bei diesem unregelmäßigen Streckennetz kommt es in den Randgebieten zu einigen schleifenden Schnitten. Durch die wenigen Relaxationsschritte mit den konjugierten Gradienten ist die lokale Genauigkeit nicht extrem hoch, sodaß kleine Streckenfehler noch spürbare Auswirkungen zeigen. Bei einer schlechten Punktbestimmung wirken sich diese lokalen Restfehler stark auf die Punktlage aus.

An dem Streckennetz Fall 4 werden die verschiedenen Berechnungsarten demonstriert. Als erste Variante wird die normale konjugierte Gradientenmethode gewählt. Bei dieser Methode wird in vier äußeren Iterationsschritten (Verbesserung der Näherungskordinaten, Neuberechnung der Koeffizienten der linearisierten Beobachtungsgleichungen) vorgegangen, wobei als Abbruchkriterium der Relaxationsmethode die Verringerung des Betrages des Residuenvektors gewählt wird $(100, 10, \sqrt{10}, \sqrt{10})$. Die zweite Variante und schnellste kombinierte Methode wird folgendermaßen berechnet: Der Betrag des Residuenvektors wird im ersten Schritt mit Hilfe der konjugierten Gradientenmethode um den Faktor 100 verringert. Dann erfolgt eine Flächenapproximation mit 16 bilinearen Elementen. Nach der Berechnung verbesserter Näherungskordinaten wechseln nun beide Rechenverfahren einander ab, wobei als Abbruchkriterium bei der Gradientenmethode ein Absinken des Betrages des Residuenvektors um den Faktor $\sqrt{10}$ verwendet wird.

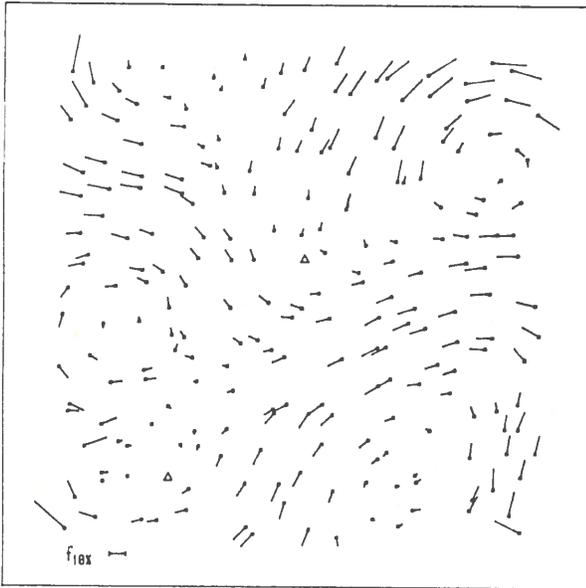


Bild 6.17: Variante 1 (1. Iteration);
10 Relaxationsschritte
90 000 Rechenoperationen

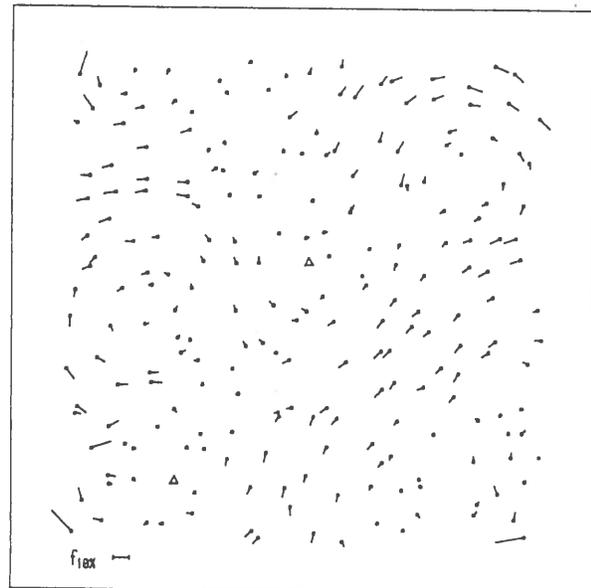


Bild 6.18: Variante 2 (1. Iteration);
10 Relaxationsschritte
1 FE-Approximation
146 000 Rechenoperationen

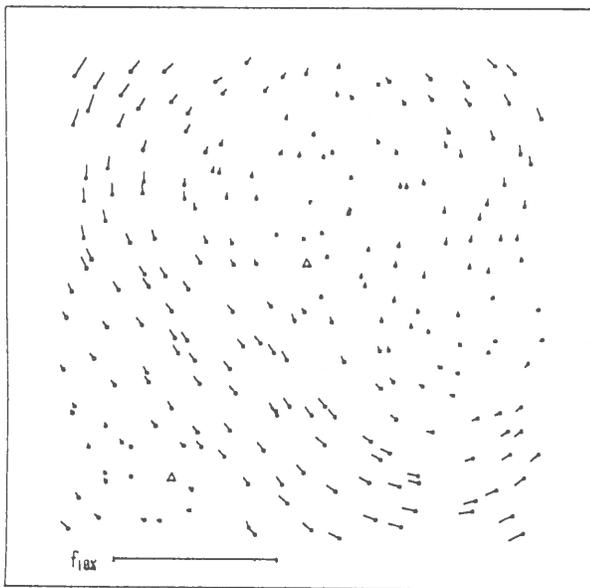


Bild 6.19: Variante 1 (2.+3. Iter.);
18+21 Relaxationsschritte
442 000 Rechenoperationen

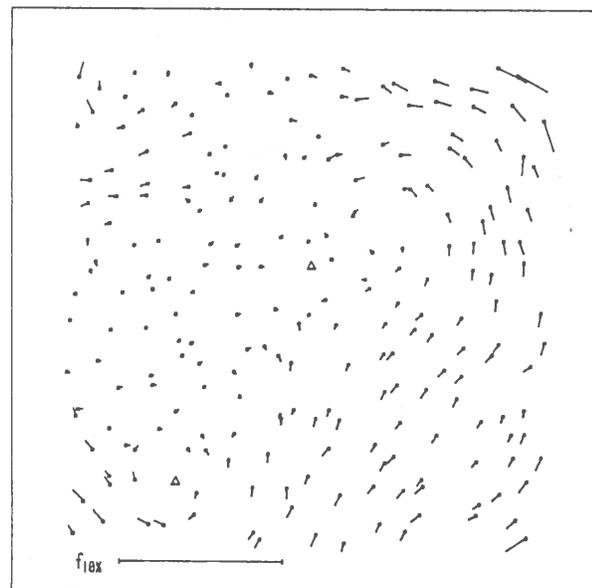


Bild 6.20: Variante 2 (2.+3. Iter.);
11 Relaxationsschritte
2 FE-Approximationen
261 000 Rechenoperationen

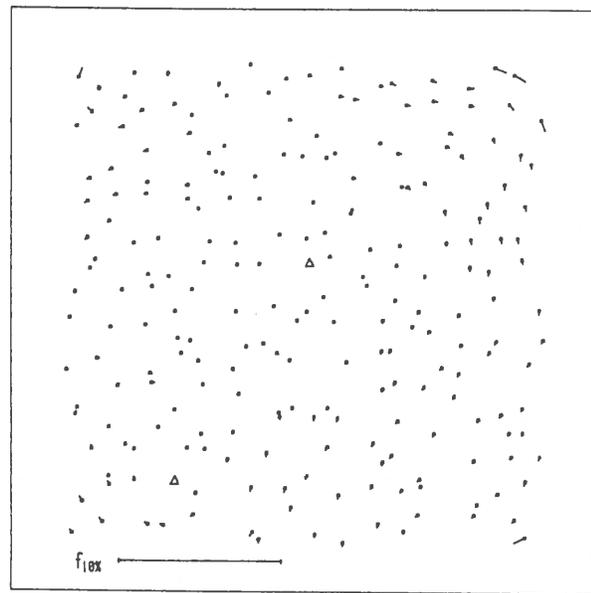
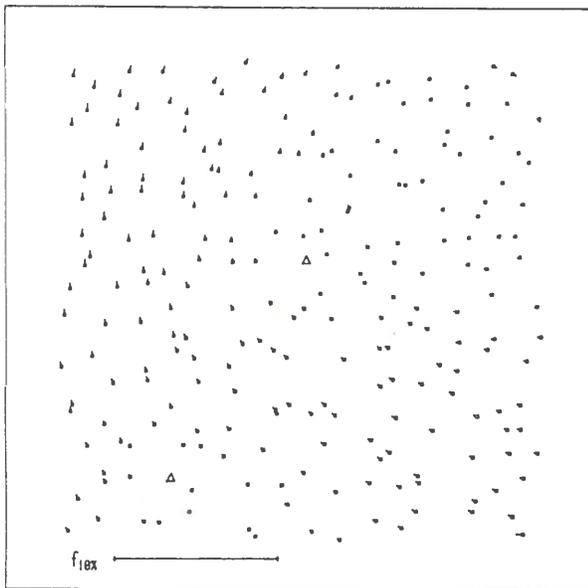


Bild 6.21: Variante 1 (4. Iteration);
15 Relaxationsschritte
577 000 Rechenoperationen

Bild 6.22: Variante 2 (4. Iteration);
4 Relaxationsschritte
1 FE-Approximationen
304 000 Rechenoperationen

Die verbleibenden durchschnittlichen Restfehler liegen bei etwa 0.3%. Die Maximalfehler am Rand des Gebietes sinken auf 0.5% beziehungsweise 0.8% ab. Da die lokale Genauigkeit bei der kombinierten Methode auf Grund der wenigen Relaxationsschritte mit den konjugierten Gradienten nicht sehr gut ist, kommt es bei schlechter Punktbestimmung (schleifender Schnitt) zu einem schlechteren Ergebnis (siehe auch Schlußbemerkung Kap.5). Würde man dieses Netz mit Hilfe eines Profilalgorithmus umnummerieren und dann berechnen, so käme man bei einer Bandbreite von 34 Elementen auf ungefähr 293 000 Grundoperationen plus 396 Wurzelberechnungen. Verwendet man anstatt dieser optimalen Bandbreite eine Breite von 40 Elementen, so sind 390 000 Grundoperationen zur Aufstellung und Berechnung notwendig. (Die Operationen für die Umnummerierung sind nicht mitgerechnet.)

Anschließend wird das Ergebnis der Berechnung des im Kapitel 3 dargestellten Richtungsnetzes (Bild 3.17) aufgezeigt. Die zwei Berechnungsarten sind einander gegenübergestellt.

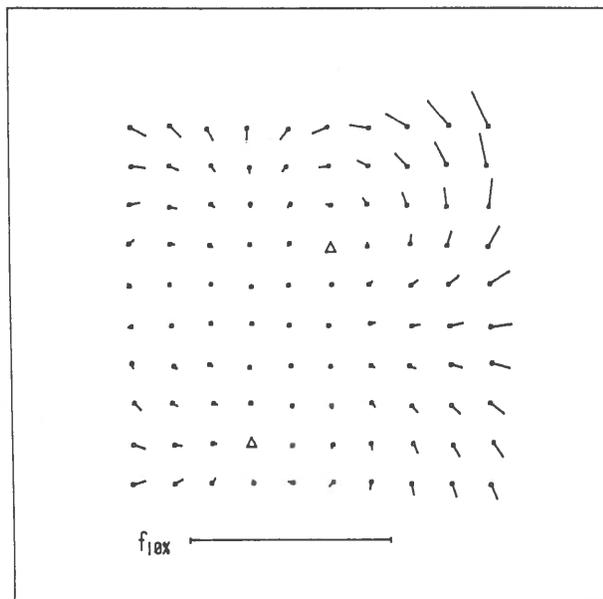
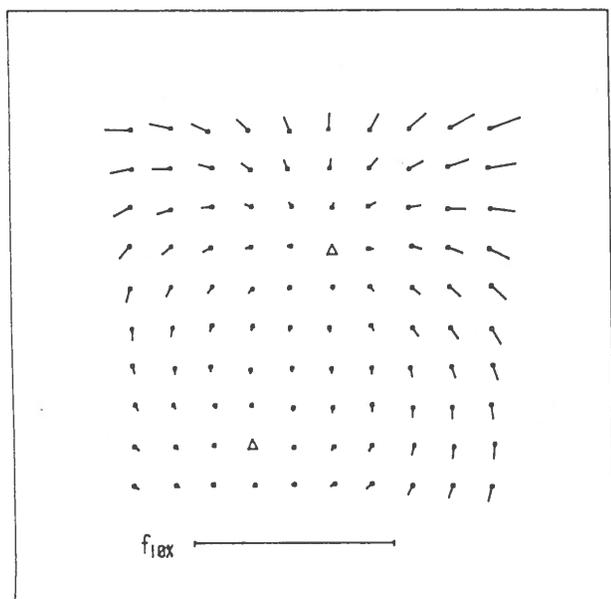


Bild 6.23: Variante 1;

14+33+49 Relaxationsschritte

864 000 Grundoperationen

Bild 6.24: Variante 2;

33 Relaxationsschritte

5 FE-Approximationen

366 400 Grundoperationen

Bei der ersten Variante wird das Absinken des Residuenvektors um 100,10 und 10 als Abbruchskriterium verwendet. In der zweiten Variante wird ein Absinken von 100 beziehungsweise eine Senkung um $\sqrt{10}$ als Abbruchskriterium eingeführt. Es ergab sich damit folgender Berechnungsablauf (14 KG - FE - 6 KG - FE - 4 KG - FE - 5 KG - FE - 4 KG - FE). Die verwendeten Rechenoperationen entsprechen ungefähr einer Berechnung mit Profilalgorithmen mit der Bandbreite von 40. Die durchgeführten äußeren Iterationen (Verbesserung der Näherungskordinaten, Neuberechnung der Koeffizienten der linearisierten Beobachtungsgleichungen) erwiesen sich bei der Gradientenmethode als sehr stark konvergenzfördernd. Bei der kombinierten Berechnung werden mit dem Absinken des Residuenvektors um den Faktor 100 mit Hilfe der konjugierten Gradienten und der abwechselnden Flächenapproximation mit gleichbleibenden Elementen und den konjugierten

Gradienten (5 Relaxationsschritte oder Senkung des Betrages des Residuenvektors um $\sqrt{10}$) die besten Ergebnisse erzielt.

7. Schlußfolgerungen

Die Lösungsgenauigkeit und die Konvergenzgeschwindigkeit bei der Methode der konjugierten Gradienten ist stark abhängig von den Eigenschaften des Gleichungssystems. Bei der Anwendung dieses iterativen Rechenprozesses auf geodätische (finite) Netze haben sich folgende Eigenheiten gezeigt:

Die Konvergenzgeschwindigkeit ist sehr stark abhängig von der Lagerung des Netzes. Wie bei F.Steidler [1980] gezeigt wird, können gut gelagerte Netze oder Netze mit mehreren weitverteilten Zwangspunkten mit sehr großer Geschwindigkeit berechnet werden. Die Anzahl der Rechenoperationen liegt unter jenen, die bei der Anwendung von Profilalgorithmen benötigt werden. Weit ausgedehnte Netze mit wenigen, ungünstig verteilten Zwangspunkten erfordern sehr viele Rechenoperationen oder können bisweilen überhaupt nicht berechnet werden.

Die im Kapitel 3 aufgezeigten Höhen-, Strecken- und Richtungsnetze untermauern diese Erkenntnisse und zeigen ferner, welche Arten von Restfehlern durch diese Berechnungsmethode erhalten bleiben. Es zeigt sich, daß Fehler in den Näherungskordinaten zwischen Punkten, die durch Beobachtungen direkt verbunden sind, sehr rasch und sehr exakt beseitigt werden. Für nur über viele andere Punkte verbundene Knoten ist hingegen eine schlechte relative Genauigkeit zu erwarten. Die dadurch auftretenden systematischen globalen Verfälschungen sind mit Hilfe der konjugierten Gradienten nur sehr schwer zu beseitigen.

Mit der schnell zu errechnenden guten Nachbarschaftsgenauigkeit kann bei mehreren Anwendungen oft schon das Auslangen gefunden werden. Eine Anwendung, die gerade diese spezielle Eigenschaft benötigt, ist die Fehlersuche mit Hilfe von Gewichtsveränderungen, wie sie von T.Krarup [1980] vorgeschlagen wurde. Diese Methode beruht auf einer kontinuierlichen Veränderung des Gewichtsansatzes

auf Grund der Größe der Verbesserungen. Die Anwendung der Kombination der konjugierten Gradienten und dieser Methode zur Suche von groben Fehlern bei Höhen- und Lagenetzen wird in einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit des Verfassers aufgezeigt werden. Andere Anwendungsmöglichkeiten sind vor allem dort gegeben, wo die Beobachtungsmatrix mehrmals geringfügig verändert wird oder nur geringe Genauigkeiten verlangt sind. Solche Berechnungen wären zum Beispiel bei der interaktiven automatischen Grobtrassierung oder bei Netzoptimierungen gegeben.

Bei allen diesen Arbeiten ist die Eigenschaft der Auftransformation der Gradientenmethode, wie sie im Kapitel 4 aufgezeigt wird, oft vorteilhaft. Wenn die Normalgleichungen einen Rangdefekt aufweisen, so wird automatisch die Lösung optimiert, das heißt, der Betrag des Lösungsvektors wird minimiert.

Durch die Analyse der Eigenwerte und Eigenvektoren der Normalgleichungen bei geodätischen (finiten) Netzen kann auf Grund der dominanten Erscheinung der kleinsten Eigenwerte ein unmittelbarer Zusammenhang zu den mittleren Fehlern hergestellt werden. Da die Konvergenz der konjugierten Gradienten sehr wesentlich von dem Größenunterschied der Eigenwerte beeinflusst wird, kann damit eine direkte Verbindung zwischen Restfehlern und mittleren Fehlern abgeleitet werden. Wo in einem Bereich große gleichartige mittlere Fehler auftreten, wird die Methode der konjugierten Gradienten nach wenigen Iterationen nur ungenaue Lösungen liefern.

Um auch große Netze mit der Methode der konjugierten Gradienten mit wenig Rechenaufwand berechnen zu können, wird im Kapitel 6 eine Kombination von mehreren Methoden vorgeschlagen. Mit Hilfe der konjugierten Gradienten werden die lokalen Beziehungen und durch eine Approximation durch finite Elemente die globale Lagerung ermittelt. Diese beiden Methoden ergänzen sich sehr gut, da bei gut bestimmten Netzen die konjugierten Gradienten und bei schlecht bestimmten

Netzen die Approximationsmethode mit finiten Elementen sehr gute Erfolge erzielt. Damit wird vor allem bei großen Netzen eine Steigerung der Konvergenzgeschwindigkeit und der Rechenstabilität erreicht. Wie sich bei praktischen Tests gezeigt hat, ist ein linearer finite Elementansatz dem kubischen Ansatz aus Gründen des Rechenaufwandes vorzuziehen. Die Anzahl der Rechenoperationen bei der kombinierten Methode ist größtenteils unabhängig von der Netzgüte und liegt auch bei schlecht gelagerten Netzen im gleichen Bereich wie bei Band- oder Profilalgorithmen. Bei sehr großen Netzen müßte jedoch eine Verringerung der Rechenzeit möglich sein.

Die Methode der konjugierten Gradienten und auch die kombinierte Methode zeichnen sich vor allem durch ihre einfache Programmierungsmöglichkeit auch bei großen Datenmengen aus. Es ist kein großer Aufwand an Datenstruktur notwendig. Bei dieser Methode kann direkt mit den Beobachtungsgleichungen gearbeitet werden, wodurch das Aufstellen der Normalgleichungen nicht erforderlich ist. Da nur wenige Daten im direkten Zugriff gleichzeitig benötigt werden, können relativ große Netze mit wenig Arbeitsspeicher berechnet werden. Netze bis ungefähr 400 Unbekannten können mit einem 30KByte Arbeitsspeicher ausgeglichen werden. Der Platzbedarf bei größeren Netzen steigt lediglich linear mit der Anzahl der Unbekannten und der Beobachtungen.

8. Literaturverzeichnis

BENCIOLINI, Battista, Luigi MUSSIO and Fernando SANSÓ (1981): The Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method in Network Adjustment. Proceedings of the 6th Int. Symp. on Geodetic Network and Computation, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft 258.

BORRE, Kai (1979): Covariance Matrices / Functions for Various 1-D Levelling Problems. Unpublished paper.

EBNER, Heinrich (1979): Zwei neue Interpolationsverfahren und Beispiele für ihre Anwendung. Bildmessung und Luftbildmessung 47, S.15-27.

GRUNDIG, Lothar (1980): Feasibility Study of the Conjugate Gradient Method for Solving Large Sparse Equation Sets. NOAA Technical Report NOS 82 NGS 13.

HANSON, Robert (1978): A Posteriori Error Propagation. Proceedings - Second International Symposium on Problems Related to the Redefinition of North American Networks, pp.427-445.

HESTENES, Magnus and Eduard STIEFEL (1952): Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol.49, No.6, pp.409-436.

KRARUP, Torben, Jens JUHL and Kurt KUBIK (1980): Götterdämmerung over least squares adjustment. ISP Congress Hamburg, Comm III, pp.369-378.

LÄUCHLI, Peter (1959): Iterative Lösung und Fehlerabschätzung in der Ausgleichsrechnung. Z. f. angew. Math. u. Phys., Nr.10, S.245-280.

- MEISSL, Peter (?): Eigenwertmethode. Unveröffentlicht.
- MEISSL, Peter (1981): The Use of Finite Elements in Physical Geodesy. OSU Report 313.
- PESCHL, Ernst (1970): Analytische Geometrie und Lineare Algebra. BI-Hochschultaschenbücher, Band 15, Bibliographisches Institut Mannheim.
- SCHUH, Wolf-Dieter (?): Rasche und einfache automatische Fehlererkennung bei großen Datenmengen. In Vorbereitung.
- SCHWARZ, Hans Rudolf (1968): Numerik symmetrischer Matrizen. Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Band 11, Teubner Stuttgart.
- SCHWARZ, Hans Rudolf (1970): Die Methode der konjugierten Gradienten in der Ausgleichsrechnung. Z. f. Verm., Nr.4, S.130-140.
- SCHWARZ, Hans Rudolf (1980): Methode der finiten Elemente, 1. Teil. Teubner Studienbücher Mathematik.
- SCHWARZ, Hans Rudolf (1982): FORTRAN - Programme zur Methode der finiten Elemente, 2. Teil. Teubner Studienbücher Mathematik.
- STEIDLER, Franz (1980): Darstellung und Vergleiche von Lösungsstrategien für große schwach besetzte Normalgleichungssysteme in der Geodäsie und in der Photogrammetrie. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr.261.
- STIEFEL, Eduard (1952): Über einige Methoden der Relaxationsrechnung. Zeitschrift f. angew. Math. u. Phys. 3, S.1-33.

STIEFEL, Eduard (1976): Einführung in die numerische Mathematik. Teubner
Studienbücher Mathematik.

ZURMÜHL, Rudolf (1964): Matrizen und ihre technische Anwendung. Springer Verlag.

MITTEILUNGEN DER GEODÄTISCHEN INSTITUTE
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT GRAZ

(früher: Institutsmitteilungen des I. Geodätischen Institutes der Technischen Hochschule in Graz)

Bisher erschienene Folgen:

Nr., Autor/Herausgeber, Titel, Seiten, Preis

- 1 HUBENY K. (1959): Formeln und Tafeln zur Berechnung der 2. Hauptaufgabe auf dem Bessel'schen Ellipsoid für Strecken bis 300 km im Bereich zwischen den geographischen Breiten 45° und $57^\circ 30'$. 33 Seiten, öS 45.-
- 2 HUBENY K. (1959): Formeln und Tafeln zur Berechnung der geodätischen Hauptaufgaben über Normalsschnitte für beliebige Ellipsoide und beliebige Entfernungen. 29 Seiten, öS 45.-
- 3 MORITZ H. (1959): Untersuchungen über eine direkte Lösung der 2. Hauptaufgabe auf dem Rotationsellipsoid für beliebige Entfernungen. 16 Seiten, öS 35.-
- 4 HUBENY K. (1960): Die Lösung der geodätischen Hauptaufgaben nach Bessel-Jordan. Erweiterte und neue Formeln sowie Tafeln für die Ellipsoide von Bessel und Hayford im Bereich zwischen den geographischen Breiten 45° und 58° . 65 Seiten, öS 50.-
- 5 HUBENY K. (1960): Formeln und Tafeln zur Berechnung der geodätischen Hauptaufgaben über beliebige Entfernungen (Internationales Ellipsoid). 44 Seiten, öS 50.-

- 6 HUBENY K., K. RINNER (1966): Vorlesungen am II. Fortbildungskurs für Praktiker an der Technischen Hochschule in Graz vom 5. bis 7. Oktober 1964. 156 Seiten, öS 50.-
- 7 RINNER K. (1967): Geodätische Programme im Rechenzentrum Graz (Stand 9. Oktober 1967). 191 Seiten, öS 50.-
- 8 RINNER K. (1968): Vorlesungen am III. Fortbildungskurs für Praktiker an der Technischen Hochschule in Graz vom 9. bis 12. Oktober 1967. 282 Seiten, öS 50.-
- 9 RINNER K., G. BRANDSTÄTTER (1971): Forschungsberichte über Erdzeiten und Satellitengeodäsie. 121 Seiten, öS 50.-
- 10 FELDBACHER F., K. HUBENY, K. RINNER (1971): Beiträge zur ellipsoidischen Geometrie und zu Mikrowellen- und Lasermessungen für große Entfernungen. 78 Seiten, öS 50.-
- 11 RINNER K. (1972): Proceedings of the International Symposium "Satellite and Terrestrial Triangulation", 2 volumes: 1) Sessions of the West European Sub-Commission of the International Commission for Artificial Satellites, I.A.G.; 2) Sessions of the Special Study Group 1.26 of the IAG. 612 Seiten, öS 300.-
- 12 BITTMANN O., G. KRAJICEK, P. MEISSL (1973): Microcomputer Computercorp 320 6 und 322 6, die Benutzung und Anwendungsbeispiele für die Vermessungstechnik. 53 Seiten, öS 30.-
- 13 RINNER K. (1973): Berichte über Forschungsarbeiten. 57 Seiten, öS 50.-

- 14 FRIEDL J., G. KRAJICEK, P. MEISSL (1974): Taschenrechner Hewlett-Packard HP45, die Benützung und Anwendungsbeispiele für die Vermessungstechnik. 60 Seiten, ÖS 50.-
- 15 BARTELME N., P. MEISSL (1974): Strength Analysis of Distance Networks. 57 Seiten, ÖS 50.-
- 16 CHESI G., K. RINNER (1974): Tabellen zur meteorologischen Reduktion von Entfernungs-messungen mit dem Geodimeter 8. 100 Seiten, ÖS 100.-
- 17 BITTMANN O., P. MEISSL (1974): Empfohlene Algorithmen zur Programmierung geodätischer Rechenaufgaben. I. Einfache Koordinatenrechnungen in der Ebene. 35 Seiten, ÖS 50.-
- 18 MEISSL P., K. RINNER (1975): Vorträge am IV. Fortbildungskurs für Praktiker des Vermessungswesens an der Technischen Universität in Graz vom 25. bis 27. Nov. 1974. 290 Seiten, ÖS 130.-
- 19 LACHAPELLE G. (1975): Determination of the Geoid using Heterogeneous Data. 121 Seiten, ÖS 150.-
- 20 MEISSL P., H. MORITZ, K. RINNER (1975): Contributions of the Graz Group to the XVI. General Assembly of IUGG/IAG in Grenoble. 308 Seiten, ÖS 150.-
- 21 BENZ F., K. RINNER (1976): Verfahren zur Verminderung des Einflusses der Bodenreflexion bei der Entfernungs-messung mit Mikrowellen. 97 Seiten, ÖS 100.-
- 22 RINNER K. (1976): Bericht über Laser- und Mikrowellenmessungen im Testnetz Steiermark. 109 Seiten, ÖS 100.-
- 23 RINNER K. (1976): Bericht zur Meeresgeodäsie und Satellitengeodäsie. 111 Seiten, ÖS 100.-
- 24 MEISSL P. (1976): Empfohlene Algorithmen zur Programmierung geodätischer Rechenaufgaben. II. Punktverwaltung mittels Massenspeicher. 69 Seiten, ÖS 50.-
- 25 MEISSL P., K. STUBENVOLL (1977): Ein Computer-Programm-System zur Verdichtung trigonometrischer Netze. 129 Seiten, ÖS 100.-
- 26 KRYNSKI J., H. NOE, K.P. SCHWARZ, H. SÖNKEL (1977): Numerical Studies and Programs for Interpolation and Collocation. 67 Seiten, ÖS 50.-
- 27 HUBENY K., A. REITHOFER (1977): Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoides mit Tafeln und Programmen zur konformen Abbildung für die Ellipsoide von Bessel, Hayford, Krasowsky und für das Referenzellipsoid 1967. 222 Seiten ÖS 200.-
- 28 SÖNKEL H. (1977): Die Darstellung geodätischer Integralformeln durch bikubische Spline-Funktionen. 161 Seiten ÖS 150.-
- 29 LEBERL F. (1977): Proceedings of the International Symposium on Image Processing - Interactions with Photogrammetry and Remote Sensing, 3-5 October, 1977, Graz. 250 Seiten, ÖS 160.-
- 30 ALLMER F. (1977): Dr. Ing. H.c. Eduard Ritter von Orel, dem Erfinder des Stereo-Autographen zum 100. Geburtstag. 41 Seiten, ÖS 50.-

- 31 KRYNSKY J. (1978): Possibilities of low-low satellite tracking for local geoid improvement. 67 Seiten, öS 70.-
- 32 GERONTOPOULOS P. (1978): Molodensky's problem in the plane. 160 Seiten, öS 200.-
- 33 LEBERL F. (1980): Beiträge zur Radargrammetrie und digitalen Bildverarbeitung. 230 Seiten, öS 200.-
- 34 HUBENY K. (1980): Die Klothoide (Formeln, Tafeln, Beispiele). 122 Seiten, öS 120.-
- 35 RINNER K. et al. (1980): Festschrift zur Emeritierung von Prof. Dr. K. Hubeny. 200 Seiten, öS 200.-
- 36 NOE H. (1980): Numerical investigations on the problem of Molodensky. 80 Seiten, öS 90.-
- 37 BARTELME N., B. HOFMANN-WELLENHOF, P. MEISSL (1980): Empfohlene Algorithmen zur Programmierung geodätischer Rechenaufgaben, III. Zugriff auf Meßdatei. 200 Seiten, öS 180.-
- 38 LICHTENEGGER H., K. RINNER (1982): Verzeichnis der Habilitationen, Dissertationen, Diplomarbeiten sowie von Seminar- und Proseminararbeiten 1960-1981. 81 Seiten, öS 100.-
- 39 CHEN C.-Y. (1982): Geodetic Datum and Doppler Positioning (Dissertation). 255 Seiten, öS 200.-
- 40 MORITZ H. et al. (1982): Geodaesia Universalis. Festschrift Karl Rinner 70. Geburtstag. 382 Seiten, öS 250.-
- 41 MORITZ H., H. SONKEL (1982): Geodesy and Global Geodynamics. 689 Seiten, öS 400.-
- 42 RINNER K., H. LICHTENEGGER (1982): Proceedings of the International Symposium "Education in Geodesy", Sept. 27-29, 1982, Graz. 556 Seiten, öS 300.-
- 43 MEISSL P. (1982): Least Squares Adjustment. A Modern Approach. 440 Seiten, öS 300.-
- 44 ALLMER F. (1983): In Memoriam Peter Meissl. 80 Seiten, öS 100.-
- 45 LICHTENEGGER H. (1983): Theoretische Untersuchungen und praktische Ergebnisse von Erdzeitenregistrierungen im Grazer Raum. 260 Seiten, öS 200.-
- 46 REICHTHALER K. (1983): Dreidimensionale Netzgleichung im Testnetz Steiermark unter Berücksichtigung von Dopplermessungen. 152 Seiten, öS 150.-
- 47 HOFMANN-WELLENHOF B. (1983): Representation of the Gravitational Potential: by Multipoles. 208 Seiten, öS 200.-
- 48 ALLMER F. (1984): Das Studium des Vermessungswesens in Graz 1811-1983. 282 Seiten, öS 250.-
- 49 SCHUH W.-D. (1984): Analyse und Konvergenzbeschleunigung der Methode der konjugierten Gradienten bei geodätischen Netzen. 104 Seiten, öS 150.-