# Verallgemeinerter Median zur robusten Parameterschätzung


W.-D. Schuh

Theoretische Geodäsie

Universität Bonn


Geodätische Woche, München 10.-12.10.2006

# Gliederung



## Motivation

## $L_1$-Norm Schätzer

## Beispiel: Höhennetz

## Beispiel: Lineare Regression

## Zusammenfassung und Ausblick

## Literatur

## Definition:

Lösung von überbestimmten, inkonsistenen Gleichungssystemen

$$\boxed{\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Sigma}\{\boldsymbol{\ell}\}^{-1}\sigma^2}$$

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^{n}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m}, \quad \boldsymbol{P} = diag(\boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\boxed{n > m}$$

## Aufgabenstellung:

Robuste Schätzer nach dem Vorbild des Medians
Diskussion über Ausreißer, Bruchpunkt, Hebelpunkte

## Vorgehensweise:

Analyse der Medianeigenschaften
Übertragung der Medianeigenschaften auf allgemeine Probleme

# Direkte Beobachtungen - Aufgabenstellung

**Beobachtungen:**

$$\begin{bmatrix} 16.0 \\ 16.4 \\ 16.5 \\ 16.9 \\ 17.1 \\ \mathbf{17.5} \\ 17.7 \\ 17.8 \\ 18.5 \\ 18.5 \\ \mathbf{81.6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{23.1_4}$$

Ziffernsturz

**Modell direkte Beobachtungen:**

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \mathbf{1}x, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$

**arith. Mittel:**

$$\sum \boldsymbol{v}^+ = \sum \boldsymbol{v}^-$$

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \ldots \text{Min}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 \ldots \text{Min}$$

$L_2$-Norm Schätzer

**Median:**

$$\#\boldsymbol{v}^+ = \#\boldsymbol{v}^-$$

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| \ldots \text{Min}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 \ldots \text{Min}$$

$L_1$-Norm Schätzer

**Robust gegenüber Ausreißern**

## Beobachtungen:

$$\begin{bmatrix} 16.0 \\ 16.4 \\ 16.5 \\ 16.9 \\ 17.1 \\ \mathbf{17.5} \\ 17.7 \\ 17.8 \\ 18.5 \\ 18.5 \\ \mathbf{186} \end{bmatrix} \quad \mathbf{32.6_3}$$

Kommaverschiebung

## Modell direkte Beobachtungen:

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \mathbf{1}x, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$

**arith. Mittel:**

$$\sum \boldsymbol{v}^+ = \sum \boldsymbol{v}^-$$

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \ldots \text{Min}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 \ldots \text{Min}$$

$L_2$-Norm Schätzer

**Median:**

$$\#\boldsymbol{v}^+ = \#\boldsymbol{v}^-$$

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| \ldots \text{Min}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 \ldots \text{Min}$$

$L_1$-Norm Schätzer

**Robust gegenüber Ausreißern**

**Robust gegenüber Hebelpunkten**

## Beobachtungen:

$$\begin{bmatrix} 16.0 \\ 16.4 \\ 16.5 \\ 16.9 \\ 17.1 \\ 17.5 \\ \mathbf{177} \\ \mathbf{178} \\ \mathbf{185} \\ \mathbf{185} \\ \mathbf{186} \end{bmatrix} \quad \mathbf{106.3}$$

mehreren Fehlern

## Modell direkte Beobachtungen:

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \mathbf{1}x, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$

**arith. Mittel:**

$$\sum \boldsymbol{v}^+ = \sum \boldsymbol{v}^-$$

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \ldots \text{Min}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 \ldots \text{Min}$$

$L_2$-Norm Schätzer

**Median:**

$$\#\boldsymbol{v}^+ = \#\boldsymbol{v}^-$$

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| \ldots \text{Min}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 \ldots \text{Min}$$

$L_1$-Norm Schätzer

**Robust gegenüber Ausreißern**
**Robust gegenüber Hebelpunkten**
**Bruchpunkt: fast 50%**

**Der Median ist ein robuster Schätzer für direkte Beobachtungen:**

- Robust gegenüber Ausreißern
- Robust gegenüber Hebelpunkten
- Hoher Bruchpunkt

**Können diese Eigenschaften verallgemeinert werden ?**

- Einführung von Gewichten

  $$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Sigma}\{\boldsymbol{\ell}\}^{-1}\sigma^2$$

- Übergang auf lineare Modelle

  $$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \mathbf{1}\, x \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}$$

| | $\boldsymbol{\ell}$ | $\boldsymbol{P}$ | $\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}$ |
|---|---|---|---|
| | 16.0 | 1 | 1 |
| | 16.4 | 1 | 1 |
| | 16.5 | 1 | 1 |
| | 16.9 | 1 | 1 |
| | 17.1 | 1 | 1 |
| | **17.5** | 1 | 1 |
| $\Rightarrow$ | 17.7 | 1 | 1 |
| | 17.8 | 1 | 1 |
| | 18.5 | 1 | 1 |
| | 18.5 | 1 | 1 |
| $\Rightarrow$ | 18.6 | **16** | **4** |

## Modell mit Gewichten:

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \mathbf{1}x, \qquad \boldsymbol{P} = diag([p_1 p_2 \ldots p_n])$$

## Minimierungsprinzip:

- **Gewichte als Wiederholungszahlen:**

$$\sum_{i=1}^{n} p_i |v_i| \ldots \text{Min} \qquad \|\boldsymbol{v}\|_1^{P} \ldots \text{Min}$$

- **Maximum Likelihood Schätzer:**

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i} |v_i| \ldots \text{Min} \qquad \|\boldsymbol{v}\|_1^{P^{\frac{1}{2}}} \ldots \text{Min}$$

**Robust gegenüber Gewichten ? abschätzbar**

$\|\boldsymbol{v}\|_1^{P^{\frac{1}{2}}} \ldots$ **reagiert etwas stabiler**

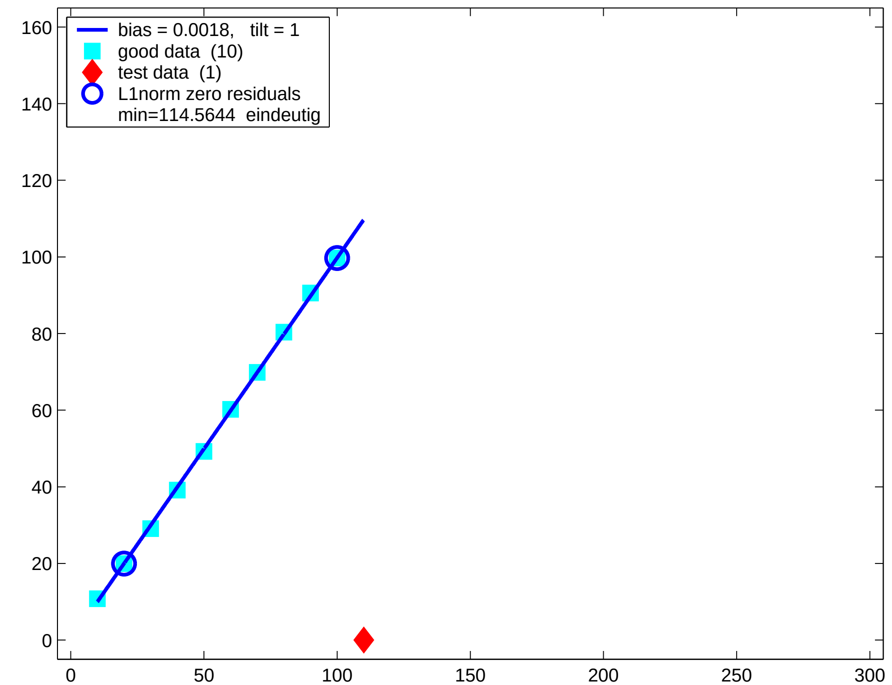
# $L_1$-Norm: Robustheit gegenüber Designmatrix



| $\ell$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 10.80 | 1 | 10 |
| 19.95 | 1 | 20 |
| 29.09 | 1 | 30 |
| 39.13 | 1 | 40 |
| 49.25 | 1 | 50 |
| 60.22 | 1 | 60 |
| 69.86 | 1 | 70 |
| 80.35 | 1 | 80 |
| 90.59 | 1 | 90 |
| 99.72 | 1 | 100 |
| 0 | 1 | 110 |

## Lineare Regression:

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \mathbf{1}\, a + \boldsymbol{x}\, b, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$

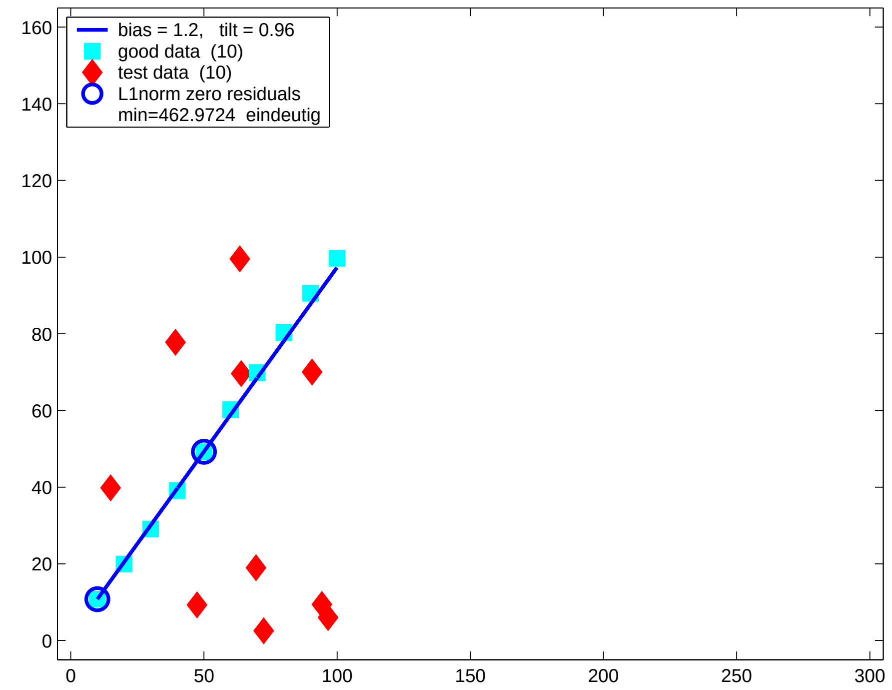



**Robust gegenüber Ausreißer ?** $\surd$

| $\boldsymbol{\ell}$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 10.80 | 1 | 10 |
| 19.95 | 1 | 20 |
| 29.09 | 1 | 30 |
| 39.13 | 1 | 40 |
| 49.25 | 1 | 50 |
| 60.22 | 1 | 60 |
| 69.86 | 1 | 70 |
| 80.35 | 1 | 80 |
| 90.59 | 1 | 90 |
| 99.72 | 1 | 100 |
| * * * | 1 | * * * |

## Lineare Regression:

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \mathbf{1}\, a + \boldsymbol{x}\, b, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$

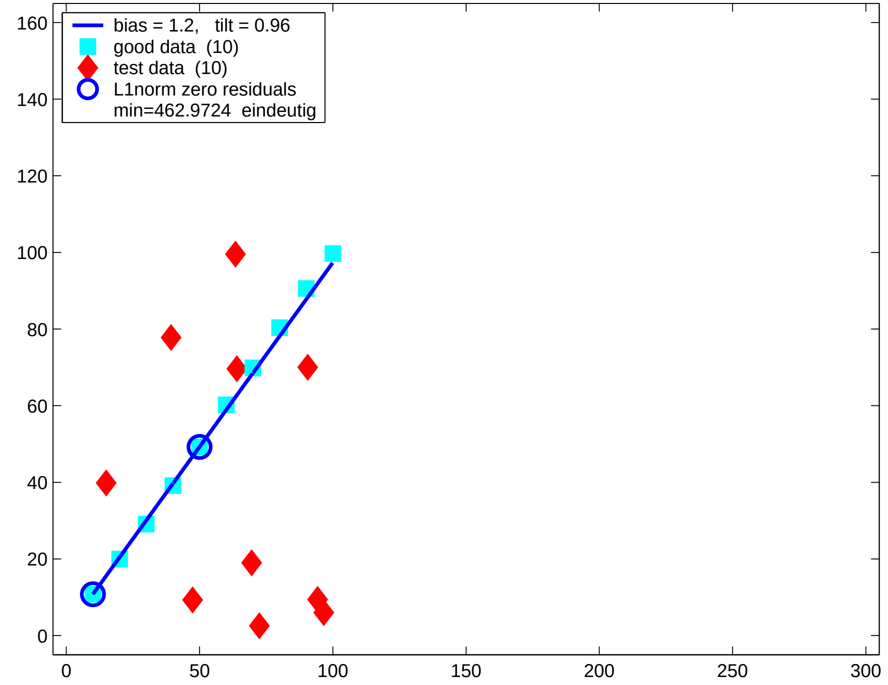



**Robust gegenüber Ausreißer ? √**
**Hoher Bruchpunkt ? √**

| $\ell$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 10.80 | 1 | 10 |
| 19.95 | 1 | 20 |
| 29.09 | 1 | 30 |
| 39.13 | 1 | 40 |
| 49.25 | 1 | 50 |
| 60.22 | 1 | 60 |
| 69.86 | 1 | 70 |
| 80.35 | 1 | 80 |
| 90.59 | 1 | 90 |
| 99.72 | 1 | 100 |
| $*\ *\ *$ | 1 | $***$ |

**Lineare Regression:**

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \mathbf{1}\ a + \boldsymbol{x}\ b, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$




**Robust gegenüber Ausreißer ?** $\surd$
**Hoher Bruchpunkt ?** $\surd$
**Robust gegenüber Designmatrix ?**

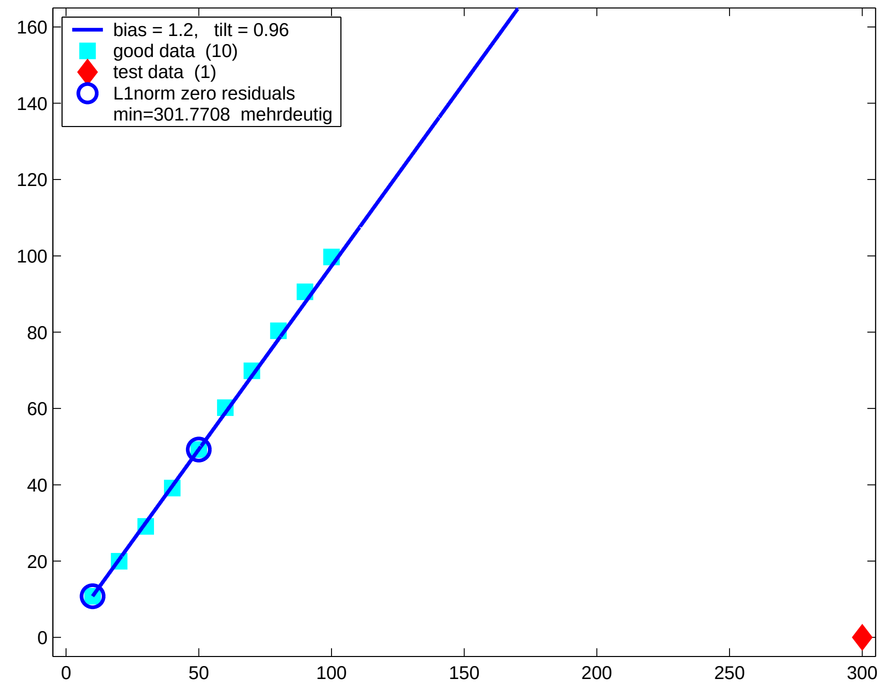
# $L_1$-Norm: Robustheit gegenüber Designmatrix



| $\ell$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 10.80 | 1 | 10 |
| 19.95 | 1 | 20 |
| 29.09 | 1 | 30 |
| 39.13 | 1 | 40 |
| 49.25 | 1 | 50 |
| 60.22 | 1 | 60 |
| 69.86 | 1 | 70 |
| 80.35 | 1 | 80 |
| 90.59 | 1 | 90 |
| 99.72 | 1 | 100 |
| **0** | 1 | **300** |

## Lineare Regression:

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \mathbf{1}\; a + \boldsymbol{x}\; b, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$

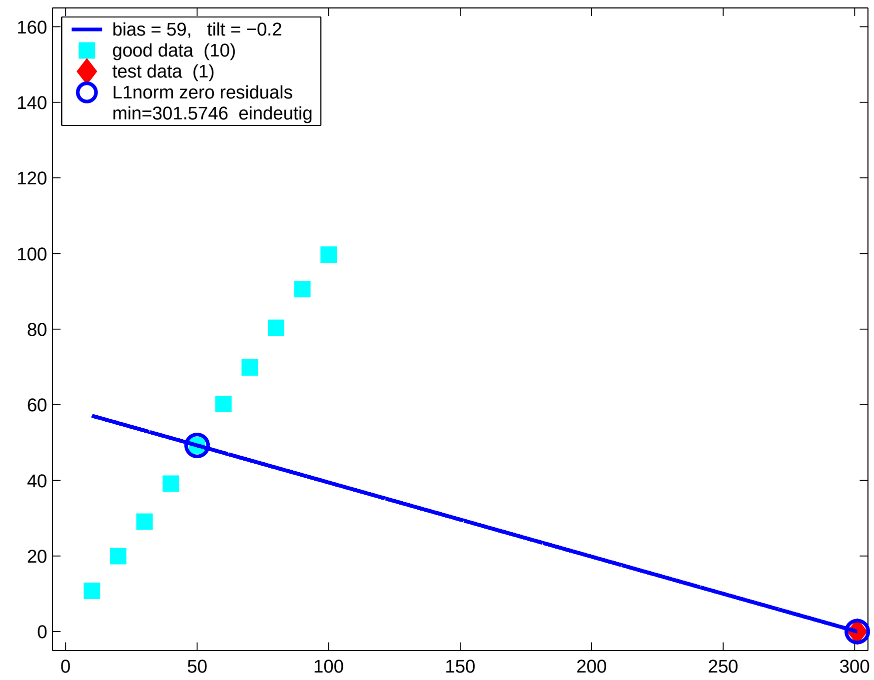



**Robust gegenüber Ausreißer ? √**
**Hoher Bruchpunkt ? √**
**Robust gegenüber Designmatrix ?**

| $\ell$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 10.80 | 1 | 10 |
| 19.95 | 1 | 20 |
| 29.09 | 1 | 30 |
| 39.13 | 1 | 40 |
| 49.25 | 1 | 50 |
| 60.22 | 1 | 60 |
| 69.86 | 1 | 70 |
| 80.35 | 1 | 80 |
| 90.59 | 1 | 90 |
| 99.72 | 1 | 100 |
| **0** | 1 | **301** |

**Lineare Regression:**

$$\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v} = \mathbf{1}\, a + \boldsymbol{x}\, b, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$




**Robust gegenüber Ausreißer ?** $\surd$
**Hoher Bruchpunkt ?** $\surd$
**Robust gegenüber Designmatrix** **abschätzbar**

# $L_1$-Norm Schätzer



$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} |v_i| \quad \dots \; MIN}$$

L1-Norm

Bošković-Schätzer

Generalised Median

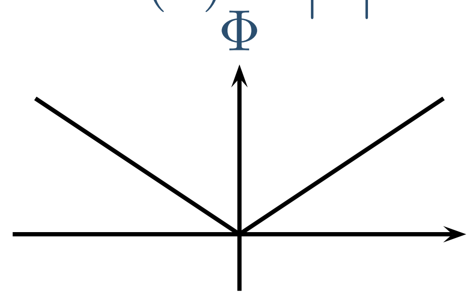
LeastAbsoluteDeviation

MinimalAbsoluteDeviation

Sign-Norm

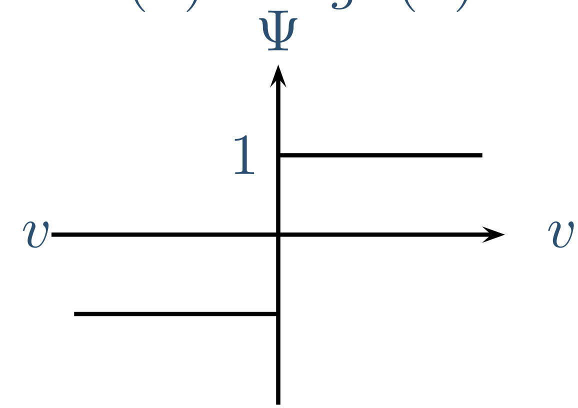
Verlustfunktion

$\Phi(\boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{v}|$



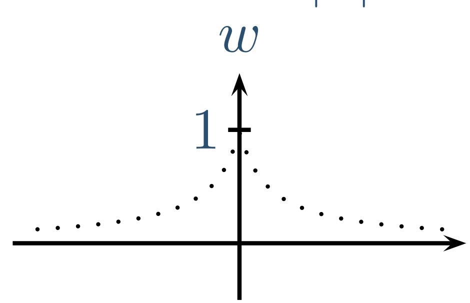

Einflussfunktion

$\Psi(\boldsymbol{v}) = sign(\boldsymbol{v})$



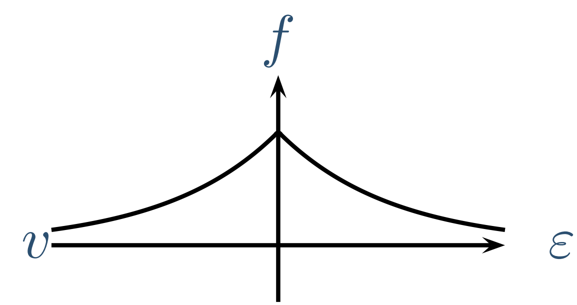

Gewichtsfunktion

$$w(\boldsymbol{v}) = \frac{\Psi(\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|}$$




Verteilungsfunktion

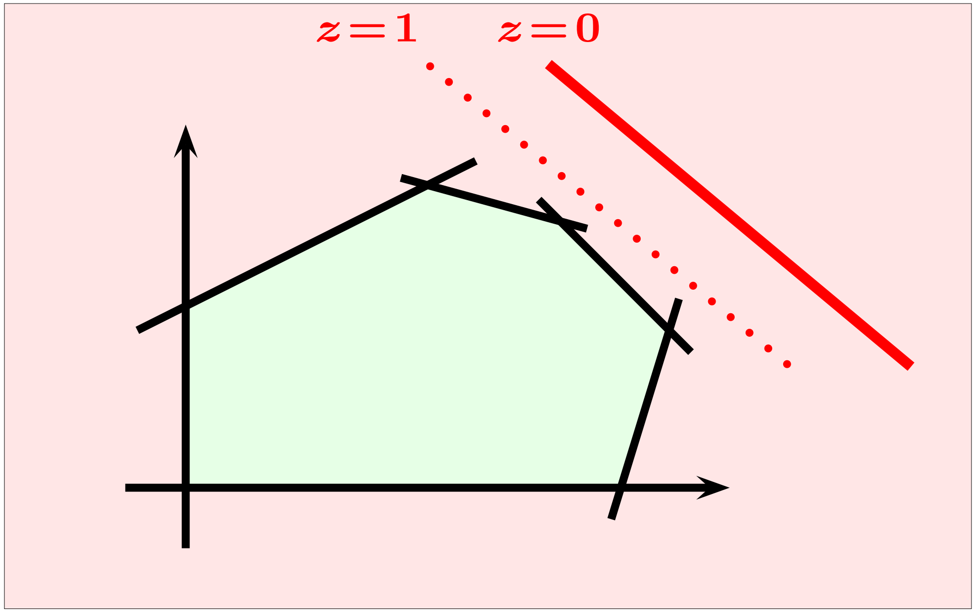
$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|\varepsilon|}{\sigma}}$$



$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} |v_i| \; \dots \; MIN}$$

- **Theorie: Konfidenzbereich**
  asymptotische Normalverteilung
  Rao/Toutenburg (1995),
  Dodge/Jurečková (2000),
  Junhuan (2005)

- **Numerische Durchführung:**
  - Newton Iteration
  - Gewichtsiteration, red. Gewichte
  - Lineares Programm
    - Simplex Verfahren Dantzig (1947)
      L1-Norm: Barrodale/Roberts (1973)
    - Interior Point Verfahren
      Portnoy/Koenker (1997)




Relationen:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Zielfunktion:

$z_0 + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ ... MIN

... gültiger Bereich

... ungültiger Bereich

| $L_1$-Norm Ausgleich | Normalform |
|---|---|
| lineares Modell: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v}$ | lineares Modell: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{x}^-) = \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-$ |
| Bedingungen: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ ,\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}$ | Bedingungen: $\boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{x}^- \geq \boldsymbol{0}\ ,\quad \boldsymbol{v}^+, \boldsymbol{v}^- \geq \boldsymbol{0}$ |
| Zielfunktion: $\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}\lvert\boldsymbol{v}\rvert$ ... MIN | Zielfunktion: $\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v}^+ + \boldsymbol{v}^-)$ ... MIN |

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-, \quad \boldsymbol{v}^+, \boldsymbol{v}^- \geq \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{x}^-, \quad \boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{x}^- \geq \boldsymbol{0}$$

# $L_1$-Norm: Primal-Dual

## P R I M A L

Relation:

$$\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{Iv}^+ + \boldsymbol{Iv}^- = \boldsymbol{\ell}$$

Variable:

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{v}^+ \geq \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{v}^- \geq \boldsymbol{0}$$

Zielfunktion:

$$\sum \sqrt{p_i} v_i^+ + \sum \sqrt{p_i} v_i^-$$

... MIN

## Tucker-Schema

| **P R I M A L** | **D U A L** |
|---|---|
| Matrix $\boldsymbol{A}$<br>Zielfunktion MIN<br>konst. Glieder | Matrix $\boldsymbol{A}^T$<br>konst. Glieder<br>Zielfunktion MAX |
| **Variable** $x_j$ | **Relation** |
| $x_j \geq 0$<br>$x_j \in \mathbb{R}$<br>$x_j \leq 0$ | $j$-te Relation $\leq$<br>$j$-te Relation $=$<br>$j$-te Relation $\geq$ |
| **Relation** | **Variable** $\pi_i$ |
| $i$-te Relation $\leq$<br>$i$-te Relation $=$<br>$i$-te Relation $\geq$ | $\pi_i \leq 0$<br>$\pi_i \in \mathbb{R}$<br>$\pi_i \geq 0$ |

## D U A L

Variable:

$$\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}$$

Relationen:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$$
$$-\pi_i \leq \sqrt{p_i}$$
$$\pi_i \leq \sqrt{p_i}$$

Zielfunktion:

$$\boldsymbol{\ell}^T \boldsymbol{\pi} \text{ ... MAX}$$

Optimalitätsbedingungen

*Komplementärer Schlupf*

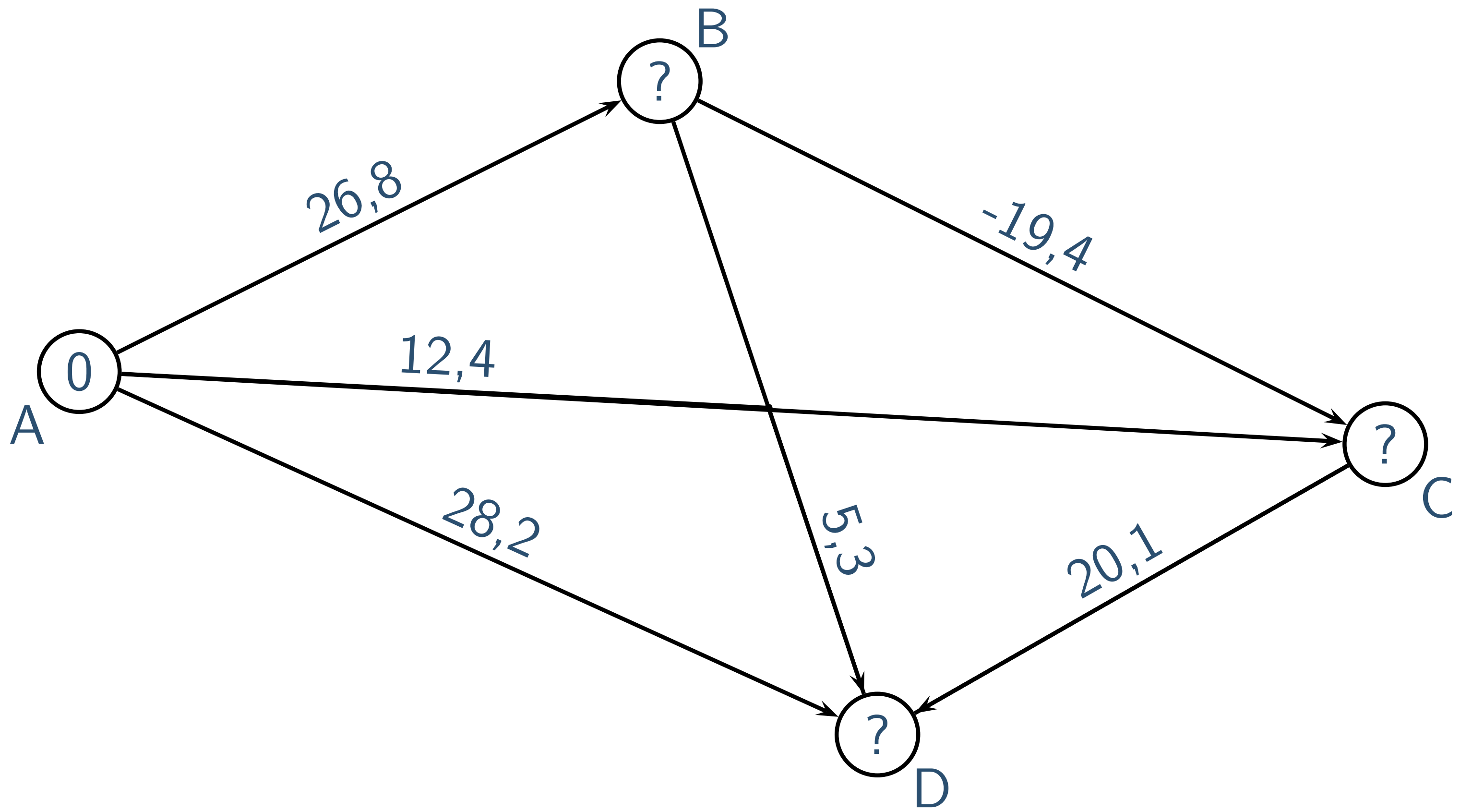
| Primal (Dual) | Dual (Primal) |
|---|---|
| k-te Variable $= 0$ | k-te Relation $\neq$ |
| k-te Variable $\neq 0$ | k-te Relation $=$ |

# Beispiel Höhennetz: Aufgabenstellung



Kantenbeschriftung:

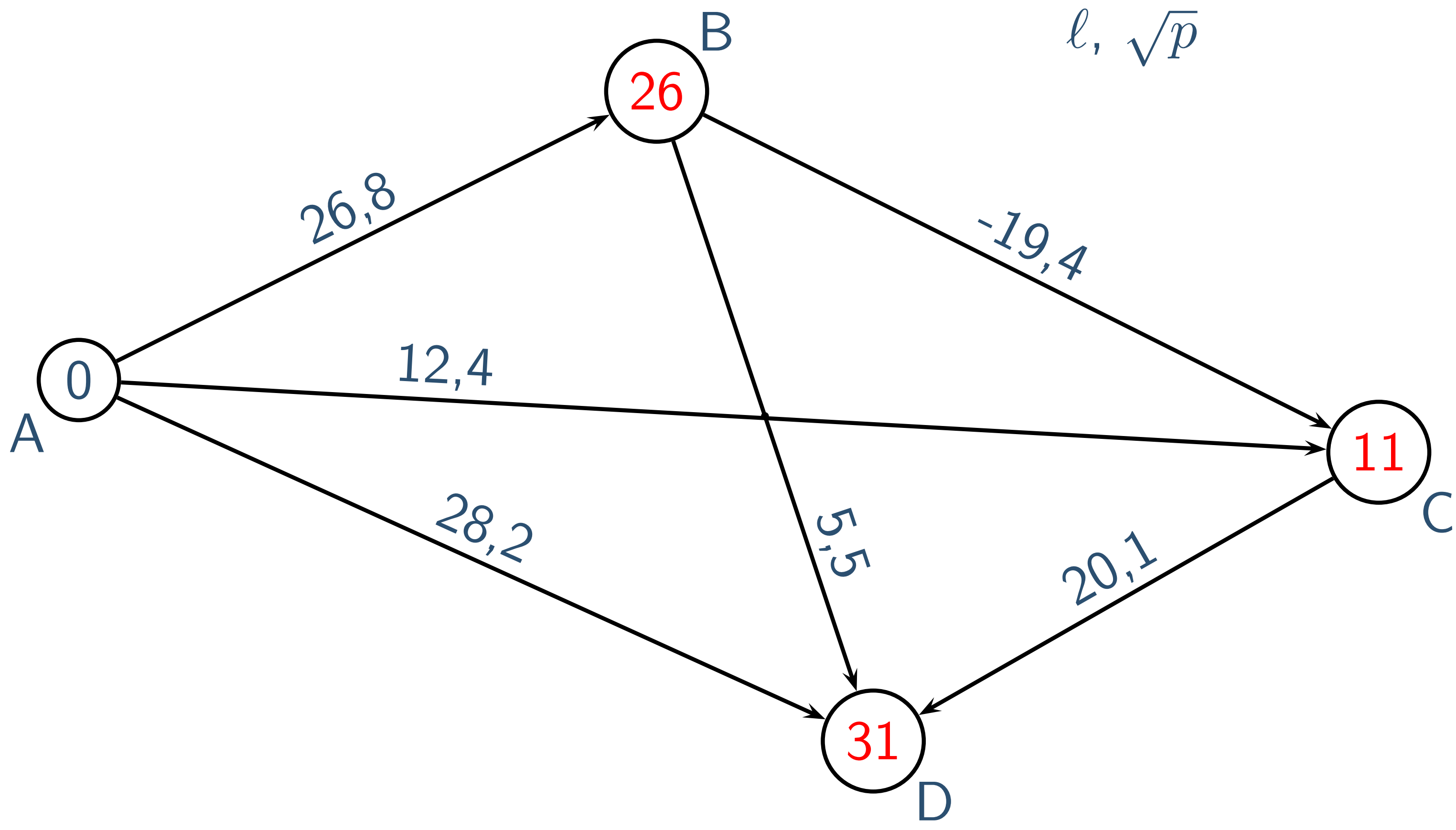
$\ell, \sqrt{p}$



# Beispiel Höhennetz: $L_1$-Norm Lösung

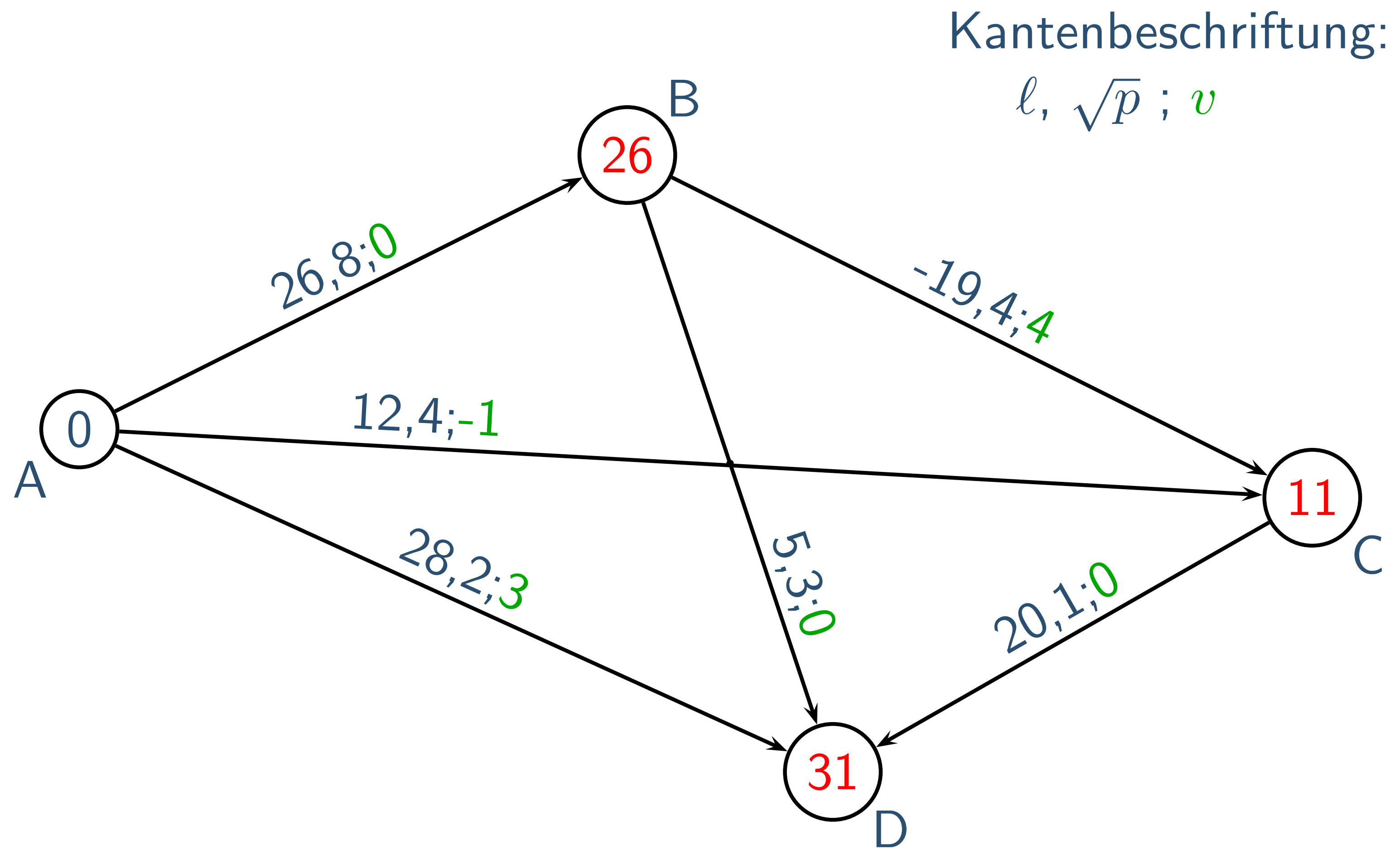


Kantenbeschriftung:
$\ell,\ \sqrt{p}$



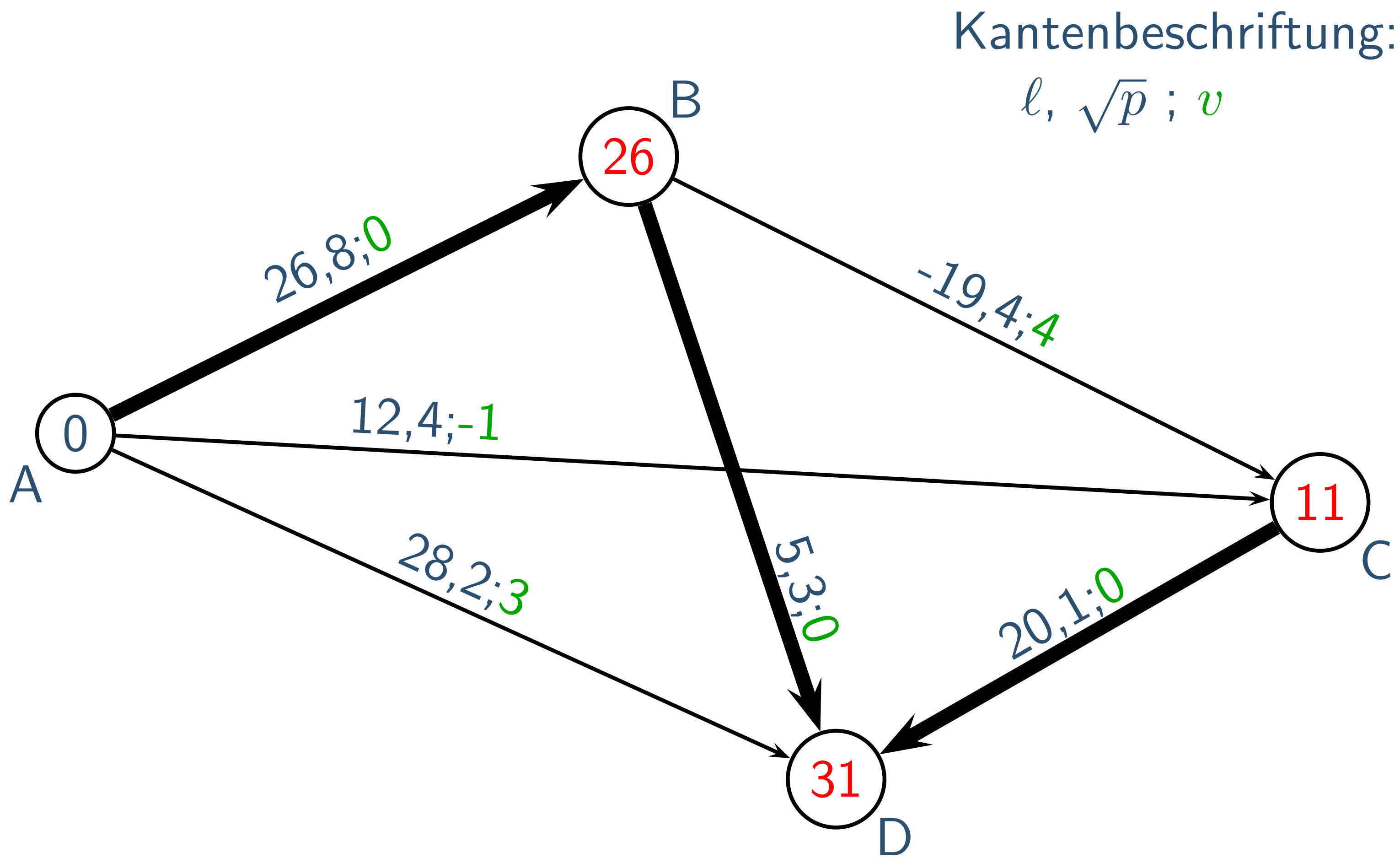
# Beispiel Höhennetz: $L_1$-Norm Lösung





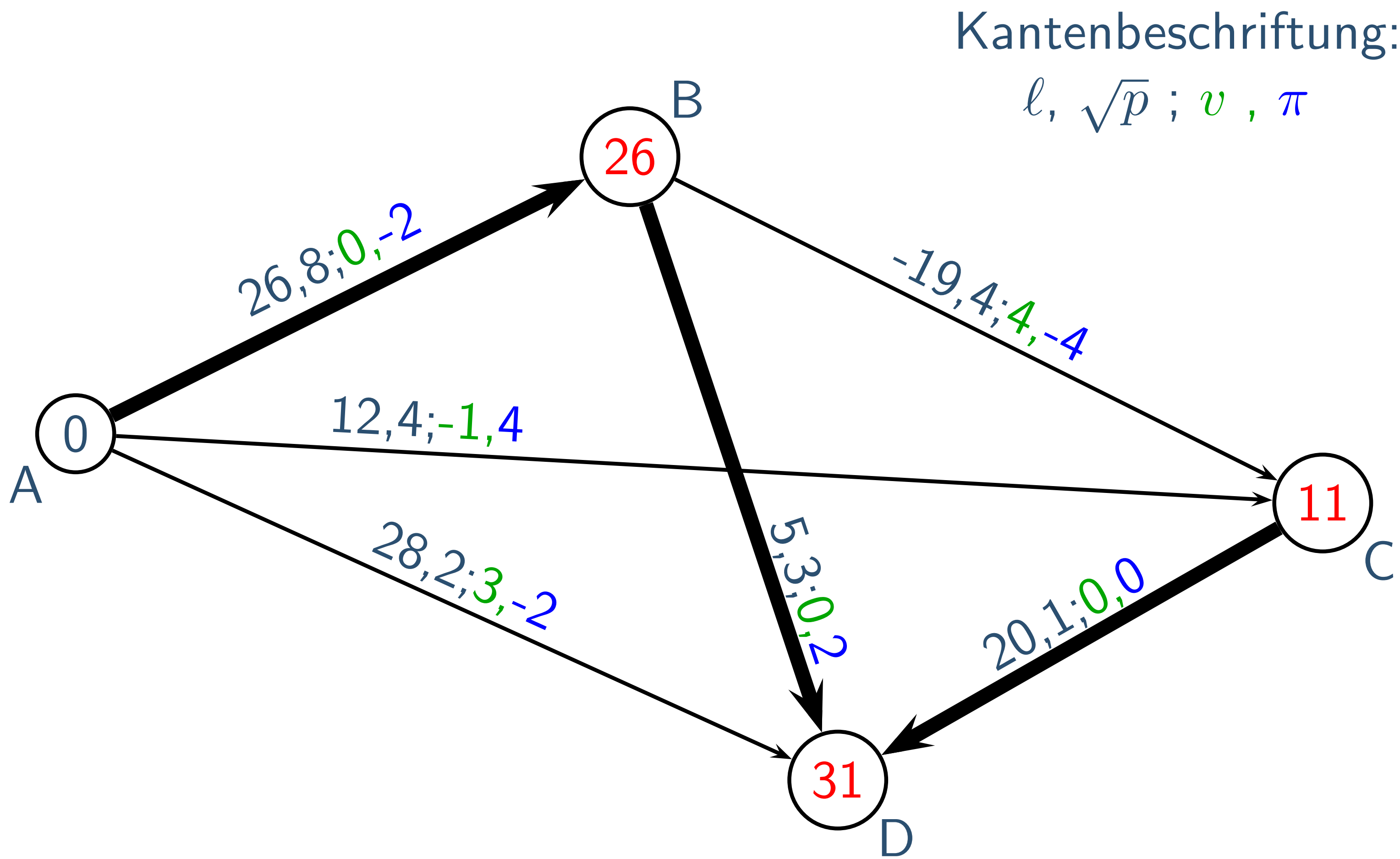
# Beispiel Höhennetz: $L_1$-Norm Lösung





# Beispiel Höhennetz: $L_1$-Norm Lösung





# Höhennetz: Primal-Dual



$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ -1 & & 1 & \\ -1 & & & 1 \\ & -1 & 1 & \\ & -1 & & 1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k \in I(i)} \pi_{ki} - \sum_{j \in O(i)} \pi_{ij} = 0 \quad \ldots \text{Flußerhaltung}$$

$$-\sqrt{p_{ij}} \le \pi_{ij} \le \sqrt{p_{ij}} \quad \ldots \text{kapazitive Schranke}$$

$$\sum_{i,j \in K} h_{ij}\pi_{ij} \quad \ldots \text{Maximierung}$$

„kapazitives Zirkulationsflußproblem“

Verwandte Aufgabenstellungen:
Schwerenetze, Kreuzungspunktausgleich, ...

## P R I M A L

Relation:
$\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{Iv}^+ + \boldsymbol{Iv}^- = \boldsymbol{\ell}$

Variable:
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{v}^- \ge \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{v}^+ \ge \boldsymbol{0}$

Zielfunktion:
$\sum \sqrt{p_i} v_i^+ + \sum \sqrt{p_i} v_i^-$ ... MIN

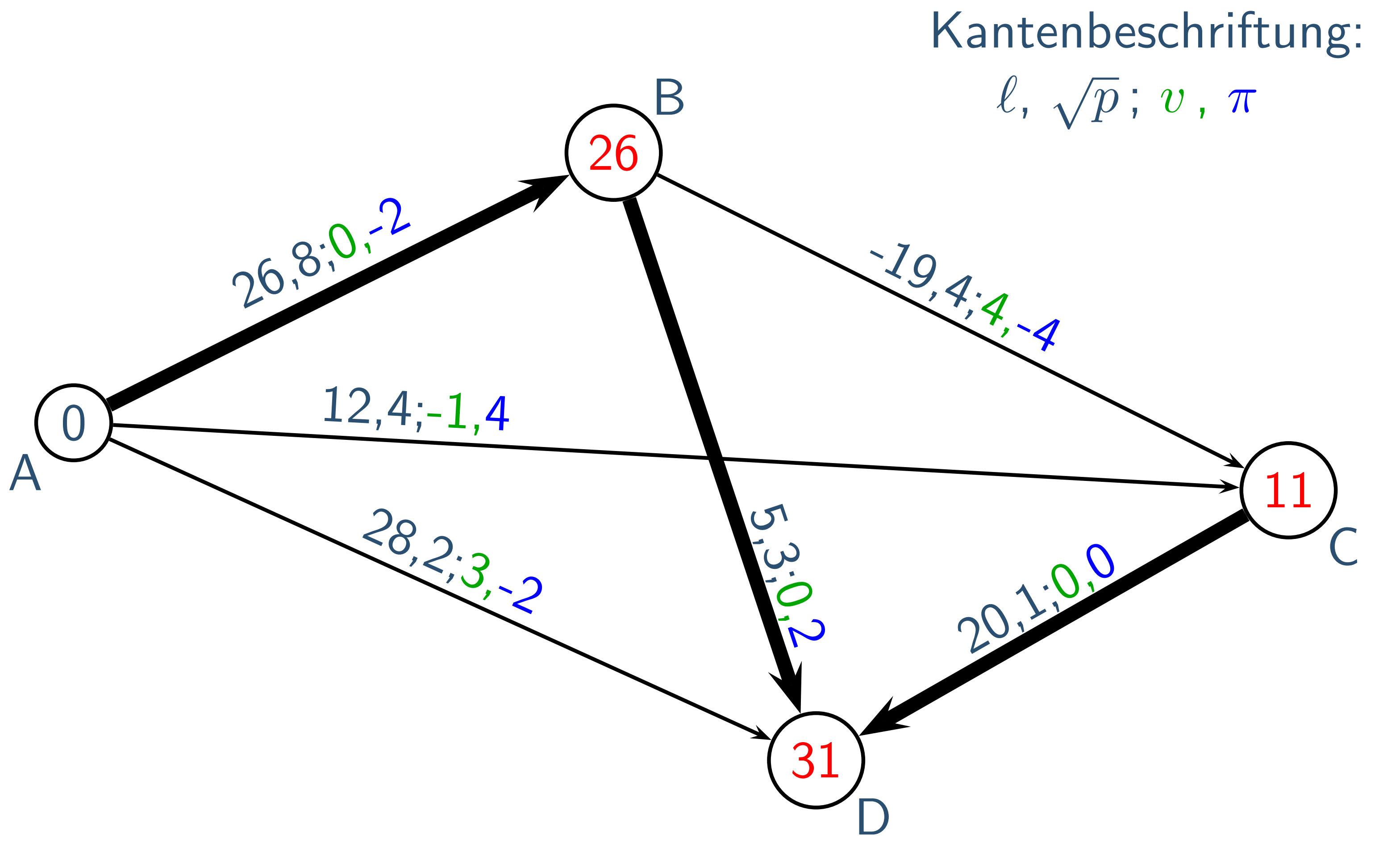
## D U A L

Relationen:
$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$

Variable:
$-\sqrt{p_i} \le \pi_i \le \sqrt{p_i}$

Zielfunktion:
$\boldsymbol{\ell}^T \boldsymbol{\pi}$ ... MAX

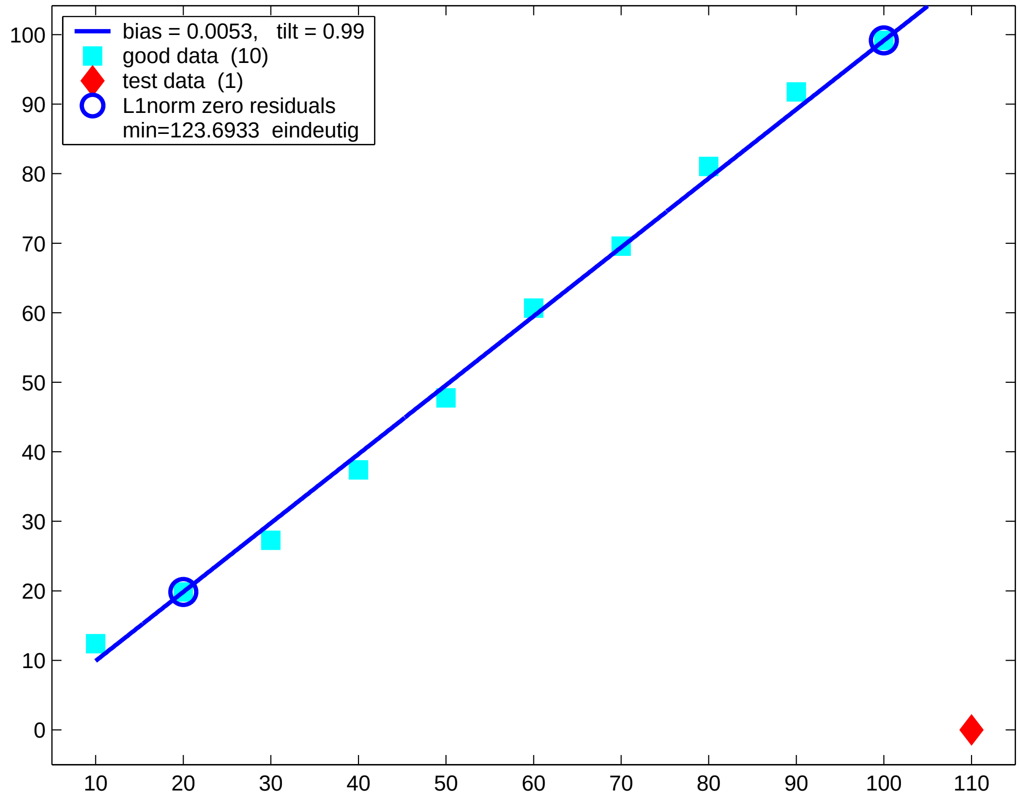
# Beispiel: Höhennetz - L$_1$-Norm Lösung




**Effiziente Algorithmen:** **Domschke (1995), Ahrens/Finke (1980)**

# Beispiel: Lineare Regression - $L_1$-Norm Lösung






| $\ell$ | $a$ | $b$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| 10.80 | 1 | 10 | 1 |
| **19.95** | **1** | **20** | $\mathbf{-.25}$ |
| 29.09 | 1 | 30 | $-1$ |
| 39.13 | 1 | 40 | $-1$ |
| 49.25 | 1 | 50 | $-1$ |
| 60.22 | 1 | 60 | 1 |
| 69.86 | 1 | 70 | 1 |
| 80.35 | 1 | 80 | 1 |
| 90.59 | 1 | 90 | 1 |
| **99.72** | **1** | **100** | $\mathbf{-.75}$ |
| 0 | 1 | 110 | $-1$ |

**Optimalität:** *Komplementärer Schlupf*

| | | |
|---|---|---|
| $a+x_ib \geq \ell_i$ | $v_i \geq 0$ | $\pi_i = -\sqrt{p_i}$ |
| $a+x_ib \leq \ell_i$ | $v_i \leq 0$ | $\pi_i = \sqrt{p_i}$ |
| $a+x_ib = \ell_i$ | $v_i = 0$ | $-\sqrt{p_i} \leq \pi_i \leq \sqrt{p_i}$ |

# Lineare Regression: Primal-Dual



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ \mathbf{1} & \mathbf{20} \\ 1 & 30 \\ 1 & 40 \\ 1 & 50 \\ 1 & 60 \\ 1 & 70 \\ 1 & 80 \\ 1 & 90 \\ \mathbf{1} & \mathbf{100} \\ 1 & 110 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.25 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -.75 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$$

1.) $\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$ ... Vorzeichenbedingung

2.) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$ ... Balance-Bedingung

Hebelpunkt: $x_{Hebel} > 300$

$(10+20+30+40+x_{Hebel} > 60+70+80+90+100)$

## P R I M A L

Relation:
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{v}^+ + \boldsymbol{I}\boldsymbol{v}^- = \boldsymbol{\ell}$

Variable:
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{v}^- \geq \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{v}^+ \geq \boldsymbol{0}$

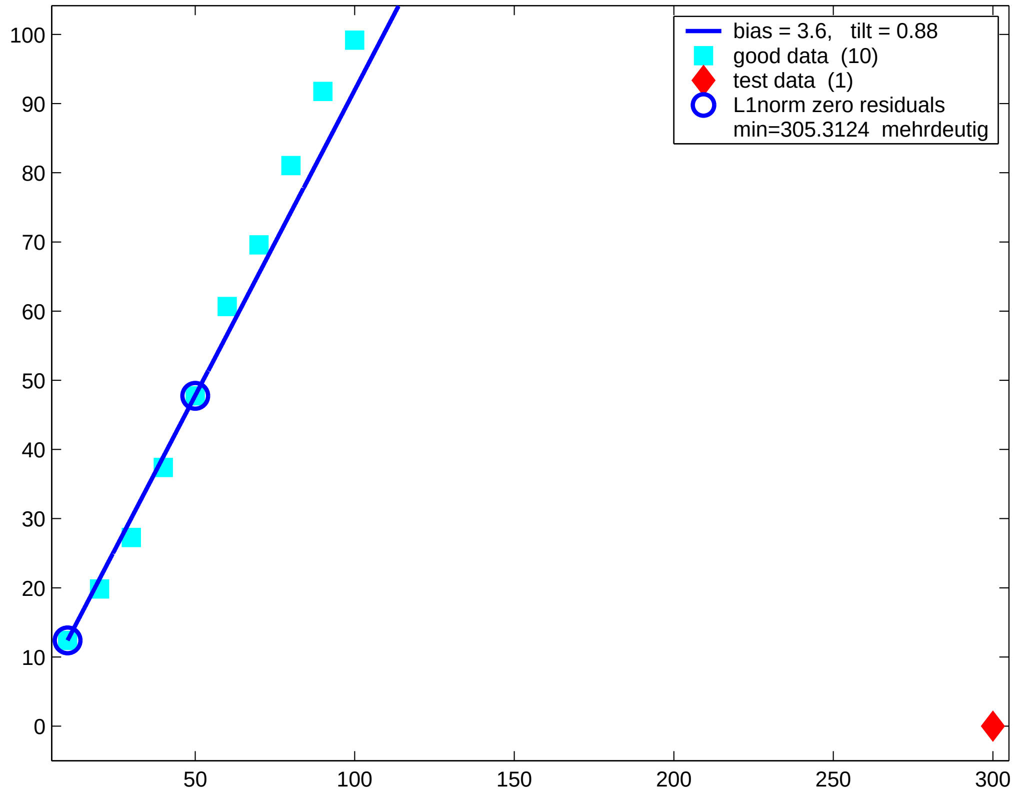
Zielfunktion:
$\sum \sqrt{p_i} v_i^+ + \sum \sqrt{p_i} v_i^-$ ... MIN

## D U A L

Relationen:
$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$

Variable:
$-\sqrt{p_i} \leq \pi_i \leq \sqrt{p_i}$

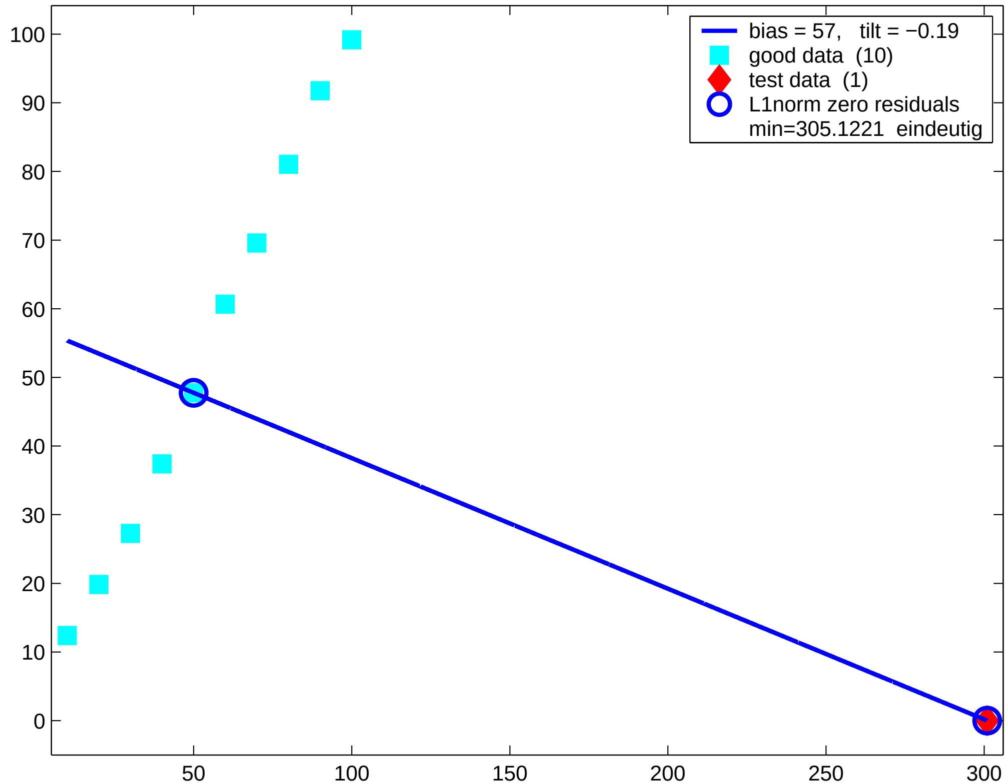
Zielfunktion:
$\boldsymbol{\ell}^T\boldsymbol{\pi}$ ... MAX




| $\ell$ | $a$ | $b$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| **10.80** | **1** | **10** | $-1$ |
| 19.95 | 1 | 20 | $-1$ |
| 29.09 | 1 | 30 | $-1$ |
| 39.13 | 1 | 40 | $-1$ |
| **49.25** | **1** | **50** | **0** |
| 60.22 | 1 | 60 | 1 |
| 69.86 | 1 | 70 | 1 |
| 80.35 | 1 | 80 | 1 |
| 90.59 | 1 | 90 | 1 |
| 99.72 | 1 | 100 | 1 |
| 0 | 1 | **300** | $-1$ |

**Optimalität:** *Komplementärer Schlupf*

| | | |
|---|---|---|
| $a+x_ib \geq \ell_i$ | $v_i \geq 0$ | $\pi_i = -\sqrt{p_i}$ |
| $a+x_ib \leq \ell_i$ | $v_i \leq 0$ | $\pi_i = \sqrt{p_i}$ |
| $a+x_ib = \ell_i$ | $v_i = 0$ | $-\sqrt{p_i} \leq \pi_i \leq \sqrt{p_i}$ |




| $\ell$ | $a$ | $b$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| 10.80 | 1 | 10 | $-1$ |
| 19.95 | 1 | 20 | $-1$ |
| 29.09 | 1 | 30 | $-1$ |
| 39.13 | 1 | 40 | $-1$ |
| **49.25** | **1** | **50** | **$-.004$** |
| 60.22 | 1 | 60 | 1 |
| 69.86 | 1 | 70 | 1 |
| 80.35 | 1 | 80 | 1 |
| 90.59 | 1 | 90 | 1 |
| 99.72 | 1 | 100 | 1 |
| **0** | **1** | **301** | **$-.996$** |

**Optimalität:** *Komplementärer Schlupf*

| | | |
|---|---|---|
| $a+x_ib\geq\ell_i$ | $v_i\geq 0$ | $\pi_i=-\sqrt{p_i}$ |
| $a+x_ib\leq\ell_i$ | $v_i\leq 0$ | $\pi_i=\sqrt{p_i}$ |
| $a+x_ib=\ell_i$ | $v_i=0$ | $-\sqrt{p_i}\leq\pi_i\leq\sqrt{p_i}$ |

# Zusammenfassung



- Studie zum Einfluß von Gewichten auf die Robustheit
- Erkenntnisse zur Robustheit bei linearen Modellen
- $L_1$-Norm Ausgleichung
- Primale und Duale Aufgabenstellung
- Methodischer Beitrag zur Neuberechnung der Haupthöhennetze
- Bruchpunkt und Hebelpunkt bei der linearen Regression
- Strenge Formulierung der *sign-constrained* Ausgleichung

# Ausblick



- Lösung großer Systeme
  - Konvergenz der *Interior Point* Methoden
  - Monte Carlo Verfahren zur Konfidenzschätzer
- Robuste Schätzer bei korrelierten Beobachtungen
  - robuste Filterschätzung (ARMA)
  - robuste Dekorrelation
  - $L_1$-Norm Kalman Filter
- kombinierte $L_2$ und $L_1$ Schätzer

$$f(z) = (1-\delta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} + \delta\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|z|}{\sigma}}$$

**Danke für Ihre Aufmerksamkeit**

# Literatur




**Historisches:**

[Bialas(1982)] Bialas, V. (1982). *Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung*. Band 9. Konrad Wittwer Stuttgart, Stuttgart.

[Čolić(1992)] Čolić, K. (1992). *Ruder Bošković (1711-1787) als Geodät imd Geophysiker*. Mitteilungen der Geodätischen Institute der TU, Graz. Folge 75.

[Farebrother(1999)] Farebrother, R. (1999). *Fitting Linear Relationships*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo.

**Allgemeines:**

[Dantzig(1966)] Dantzig, G. (1966). *Lineare Programmierung und Erweiterungen*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York.

[Dantzig and Thapa(2003)] Dantzig, G. and M. Thapa (2003). *Linear Programming*. Springer, New York - Berlin.

[Dodge and Jurečkovv́(2000)] Dodge, Y. and Jurečkovv́, J. (2000). *Adaptive Regession*. Springer, New York - Berlin.

[Domschke(1995)] Domschke, W. (1995). *Logistik: Transport*. Oldenbourg, Münschen - Wien.

[Rao Radhakrishna and Toutenburg(1995)] Rao Radhakrishna, C. and Toutenburg, H. (1995). *Linear Models*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo.

[Portnoy and Koenker(1997)] Portnoy, S. and Koenker, R. (1997). The gaussian hare and the laplacian tortoise: Computability of squared-error versus absolute-error estimators. *Statistical Science*, 12(4), 279–300.

[Xu (2005)] Xu, P. (2005). Sign-constrained robust least squares, subjective breakdown point and the effects of weights of observations on robustness. *J. Geodesy*, 79, 146-159.

## $L_1$-Norm

[Barrodale and Roberts(1973)] Barrodale, I. and Roberts, F. (1973). An improved algorithm for discrete l1 linear approximation. *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, 839–848.

[Bloomfield and Steiger (1983)] Bloomfield, P. and Steiger, W. (1983). *Least Absolute Deviations*. Birkhäuser, Bosten - Basel - Stuttgart.

[Fuchs(1980)] Fuchs, H. (1980). *Untersuchung zur Ausgleichung durch Minimierung der Alsolutsumme der Verbesserungen*. Ph.D. thesis, TU Graz.

[Fuchs(1982a)] Fuchs, H. (1982a). *Adjustment by minimizing the sum of absolute residuals*. Reihe B, 258. Deutsche Geodätische Kommission, München. Proceedings of the "6th International Symposium on Geodetic Network and Computations" (Aug.31 - Sept.5, 1981).

[Fuchs(1982b)] Fuchs, H. (1982b). Contributions to the adjustment by minimizing the sum of absolute residuals. *Manuscripta Geodaetica*, **7**, 151–207.

[Junhuan(2005)] Junhuan, P. (2005). The asymptotic variance-covariance matrix, baarda test and the reliability of $L_1$-norm estimates. *J. Geodesy*, **78**, 668–682.

[Kampmann(1986)] Kampmann, G. (1986). Robuster Ausreissertest mit Hilfe der L1-norm-methode. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, **93. Jg.**, 139–1471.

[Kampmann(1988)] Kampmann, G. (1988). *Zur kombinativen Norm-Schätzung mit Hilfe der L1-, der L2- und der Boskovic-Laplace-Methode mit den Mitteln der linearen Programmierung*. Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der RWTH, Aachen. Heft 43.

[Meissl(1980)] Meissl, P. (1980). Adjustment of levelling networks by minimizing the sum of absolute residuals. In G. Lachapelle, editor, *Proceedings of the "2nd International Symposium on Problems Related to the Redefinition of North American Vertical Geodetic Networks"*, pages 393–415. NAD-Symposium 1980. Ottawa, Canada (May 26-30, 1980).

[Schuh(1985)] Schuh, W.-D. (1985). Transforming the L1-norm adjustment of a levelling network into a flow problem. In *Proceedings of the "7th International Symposium on Geodetic Computations"*, pages 385–409. Cracow, Poland (June 18-21, 1985).