Über die Ausgleichung bei „Überschüssigen Messungen und zufälligen Beobachtungen“
—
auf den Spuren von Friedrich Robert Helmert

Wolf-Dieter Schuh

Institut Für Geodäsie und Geoinformation
Professur für Theoretische Geodäsie
Universität Bonn

Dortmund, 13. Feb. 2017

Nach Helmert benannte Verfahren

Gauß-Helmert Modell
(Helmert, 187…

Helmertsche Blockzerlegung
(Helmert, 1907, Kap. 8,§6)

äquivalente Beobachtungen
nach Helmert
(Helmert, 1872)

…arianzkomponentenschätzung
…ch Helmert
(Helmert, 1877a,b)

Helmert-Verteilung
(Helmert, 1875a, …

Zeitreihenanalyse
nach Helmert
(Helmert, 1…

Helmertscher Punklagefehler
(Helmert, 1907, Kap. 8,§3)

Helmertsche Fehlerellipse
(Helmert, 1907, Kap…

latente Parameter
nach Helmert
(Helmert, 1911)

657

SITZUNGSBERICHTE 1900.

XXXII.

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

28. Juni. Öffentliche Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages.

Antrittsrede des Hrn. Helmert.

Ein ungewöhnliches Ereigniss ist es, dass in der Königlichen Akademie der Wissenschaften ein Vertreter der Geodäsie seinen Eintritt als ordentliches Mitglied öffentlich bekunden kann. Ich bin sogar der Erste, dem diese Ehre zu Theil wird. Es haben allerdings wiederholt mit der Akademie Männer, deren Thaten und wissenschaftliche Arbeiten von grundlegender Bedeutung für die Geodäsie gewesen sind, in den engsten Beziehungen gestanden: Maupertuis als ihr Präsident, Gauss und Bessel

Helmert (1900)

Zitate aus der Antrittsrede:

„Jeder, der nur ein wenig den Inhalt der Geodäsie kennt, wird die vielfältige Anwendung der Ausgleichungsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler gerade in diesem Gebiet des Wissens und Könnens auffallen.

[. . .]

Dabei zeigt sich, dass selbst rein mathematisch recht einfache Aufgaben der Geodäsie durch die Genauigkeitsfragen, die bei der Anwendung auf Messungsergebnisse hinzutreten, an theoretischem Interesse gewinnen.“

Helmert (1900, S.699)

Zitate aus der Antrittsrede:

„Die grosse Aufgabe der rechnerischen Behandlung [. . .] *ist mit einem ganz strengen Verfahren, das jede einzelne Messung voll ausnutzen will, nicht durchzukommen; ebenso müssen kleine theoretische Ungenauigkeiten zugelassen werden, falls nachgewiesen wird, dass sie das Ergebniss nicht entstellen.*

[. . .]

Wenn nun die rechnerischen Vereinfachungen vielleicht den Nutzeffect der Beobachtungen nicht unerheblich herabdrückt, so steht diesem Nachtheil der Vortheil gegenüber, in absehbarer Zeit umfassende Ergebnisse für die Figur der Erde erzielen zu können."

Helmert (1900, S.700)

Analytische Geodäsie

—

Geodätische Analyse

Helmerts Dissertationsschrift

III.

Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höhern Geodäsie.

Von

FRIEDRICH ROBERT HELMERT,

Geodät zu Dresden.

Einleitung.

Gegenwärtig giebt es wohl kaum einen modernen Culturstaat, in welchem nicht geodätische Triangulationen zum Zwecke einer genauen Landesvermessung oder als Theil einer Gradmessung ausgeführt werden oder schon beendet sind. Trotzdem ist, soviel ich weiss, nur Weniges über solche Grundsätze bekannt worden, durch deren Befolgung man in den Stand gesetzt ist, die Vermessung möglichst rationell auszuführen, d. h. einen nothwendigen Genauigkeitsgrad derselben mit möglichst wenig Zeit und Geld zu erreichen. Nun erheischt freilich das Terrain in jedem

Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol: 13, p. 73–120 bzw. 163–186. (Helmert, 1868a,b)

Helmerts Buch: Ausgleichungsrechnung

DIE AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

40914

NACH DER

METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE

MIT

ANWENDUNGEN

AUF DIE GEODÄSIE UND DIE THEORIE DER MESSINSTRUMENTE.

VON

F. R. HELMERT.
Friedrich Robert

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1872.

Helmert (1872)

Dazu führt Louis Krüger aus:

„dieses [...] erste größere Werk **Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate** [...] *ist durch seinen strengen Aufbau und die Vielseitigkeit seiner Anwendungen den früheren Schriften über diesen Gegenstand überlegen“*

[...]

„Die Veröffentlichung dieses Buches gab wohl den Anstoß zu der am 21. Dezember 1872 erfolgte Ernennung Helmerts zum Professor“

Krüger (1917)

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate mit Anwendungen

Helmert (1872)
weitere Auflagen: 1907, 1924

Schwerpunkt zunächst auf folgende Abschnitte:

- §5 *Uebersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben*
- §21 *Gleichwerthige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen*
- §3 *Maasse für die Genauigkeit von Beobachtungsreihen*

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate mit Anwendungen

Helmert (1872)
weitere Auflagen: 1907, 1924

Schwerpunkt zunächst auf folgende Abschnitte:

- **§5 Uebersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben**
- §21 *Gleichwerthige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen*
- §3 *Maasse für die Genauigkeit von Beobachtungsreihen*

§5 *Uebersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben*

- I Direkte Beobachtungen
- II Vermittelnde Beobachtungen
- III Bedingte Beobachtungen
- IV Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen
- V Allgemeine Aufgabe

§5 *Uebersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben*

I Direkte Beobachtungen

II Vermittelnde Beobachtungen

III Bedingte Beobachtungen

IV Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen

V Allgemeine Aufgabe

- Bedingte Beobachtungen mit Unbekannten (Helmert, 1907)
- Allgemeinfall der Ausgleichungsrechnung (Meissl, 1976)
- Gauß-Helmert Modell (Wolf, 1978)
- Gemischtes Modell (Koch, 1997)
- Error-in-Variables (Kendall, 1951)

Gauß-Helmert Modell

$$\boxed{\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}}$$

$\boldsymbol{B}$	...	Bedingungengleichungen	$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{p\times n}$
$\boldsymbol{A}$	...	Designmatrix	$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{p\times m}$
$\boldsymbol{\ell}$	...	Beobachtungen	$\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^{n}$
$\boldsymbol{v}$	...	Verbesserungen	$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n}$
$\boldsymbol{x}$	...	Parameter	$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{m}$
$\boldsymbol{b}$	...	Konstantenvektor	$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{p}$
p	...	Anzahl der Bedingungen	
n	...	Anzahl der Beobachtungen	
m	...	Anzahl der Parameter	

Helmerts Forderung: $\boxed{n > p - m > 0}$ (Helmert, 1872, S. 41)

Gauß-Helmert Modell

$$\boxed{\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}}$$

Helmerts Forderung: $\boxed{n > p - m > 0}$ (Helmert, 1872, S. 41)

Heute ist es üblich die Forderung Rang$(\boldsymbol{B}) \stackrel{!}{=} p$ vorauszusetzen.

Dies ist somit ein Spezialfall vom ursprünglichen Gauß-Helmert Modells, welches weniger Allgemein ist!

(Wolf, 1968, S. 105) bezeichnet diese Form als

„Quasivermittelnde Ausgleichung"

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate mit Anwendungen

Helmert (1872)
weitere Auflagen: 1907, 1924

Schwerpunkt zunächst auf folgende Abschnitte:

- §5 *Uebersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben*
- **§21 Gleichwerthige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen**
- §3 *Maasse für die Genauigkeit von Beobachtungsreihen*

§21 *Gleichwerthige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen*

Die Einführung der *äquivalenten Beobachtungen* wird von Helmert in der Einleitung zu seinem Buch (Helmert, 1872) besonders hervorgehoben.

„Durch die Einführung des Begriffes äquivalenter Beobachtungen glaube ich die Ausgleichung [...] durchsichtiger gemacht zu habe.“

(Helmert, 1872, S. IV)

§21 *Gleichwerthige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen*

äquivalente Beobachtungen:
Dekorrelation der ausgeglichenen Parameter durch Anwendung des Gaußsches Eliminationsverfahren auf die Normalgleichungen

auf Stufenform gebrachten Normalgleichungen:

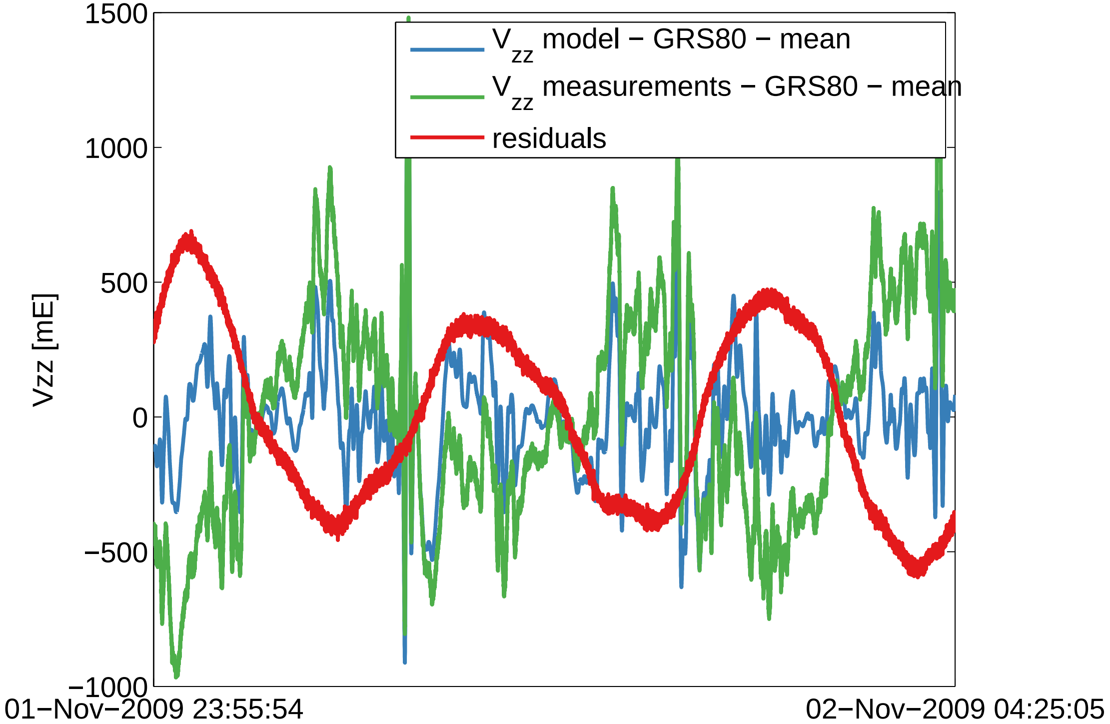
$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{12} & n_{22} & n_{23} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gaußsches Eliminations-verfahren}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{n_{12}}{n_{11}} & \frac{n_{13}}{n_{11}} \\ & 1 & \frac{\bar{n}_{23}}{\bar{n}_{22}} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{n_{11}} \\ \frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_{22}} \\ \frac{\bar{\bar{n}}_3}{\bar{\bar{n}}_{33}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

äquivalente Beobachtungen: $\overline{\boldsymbol{x}}$ bzw. Zufallsvariable $\overline{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$

$$\text{Kovarianzmatrix: } \boldsymbol{\Sigma}\{\overline{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{n}_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\bar{n}}_{33}} \end{bmatrix}$$

Messungen von Zeitreihen mit Sensoren

Gradiometer Messungen im Sekundenintervall (GOCE)



Fazit: Signale gehen fast im Rauschen unter
Residuen weisen extrem starke Korrelationen auf

Anwendung der Dekorrelation heute

Messungen von Zeitreihen mit Sensoren

Dekorrelation:

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\text{Gaußsches Eliminations-verfahren}} \overline{\mathcal{X}}$$

Helmert-Zugang

$$\Sigma\{\overline{\mathcal{X}}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{n}_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\bar{n}}_{33}} \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

Homogenisierung:

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\text{Cholekys Reduktions-verfahren}} \overline{\mathcal{L}}$$

Cholesky-Zugang

$$\Sigma\{\overline{\mathcal{L}}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Einheitsmatrix

André-Louis Cholesky

(1875 - 1918)

Commandant Benoit (1924):

NOTE SUR UNE MÉTHODE DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NORMALES PROVENANT DE L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS A UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES EN NOMBRE INFÉRIEUR A CELUI DES INCONNUES. — APPLICATION DE LA MÉTHODE A LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DEFINI D'EQUATIONS LINÉAIRES.

Bulletin géodésique, 1924, 2, 67-77

I. — NOTICES SCIENTIFIQUES

Commandant BENOIT[1].

NOTE SUR UNE MÉTHODE DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NORMALES PROVENANT DE L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS A UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES EN NOMBRE INFÉRIEUR A CELUI DES INCONNUES. — APPLICATION DE LA MÉTHODE A LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DEFINI D'ÉQUATIONS LINÉAIRES.

(Procédé du Commandant CHOLESKY[2].)

Le Commandant d'Artillerie Cholesky, du Service géographique de l'Armée, tué pendant la grande guerre, a imaginé, au cours de recherches sur la compensation des réseaux géodésiques, un procédé très ingénieux de résolution des équations dites *normales*, obtenues par application de la méthode des moindres carrés à des équations linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues. Il en a conclu une méthode générale de résolution des équations linéaires.

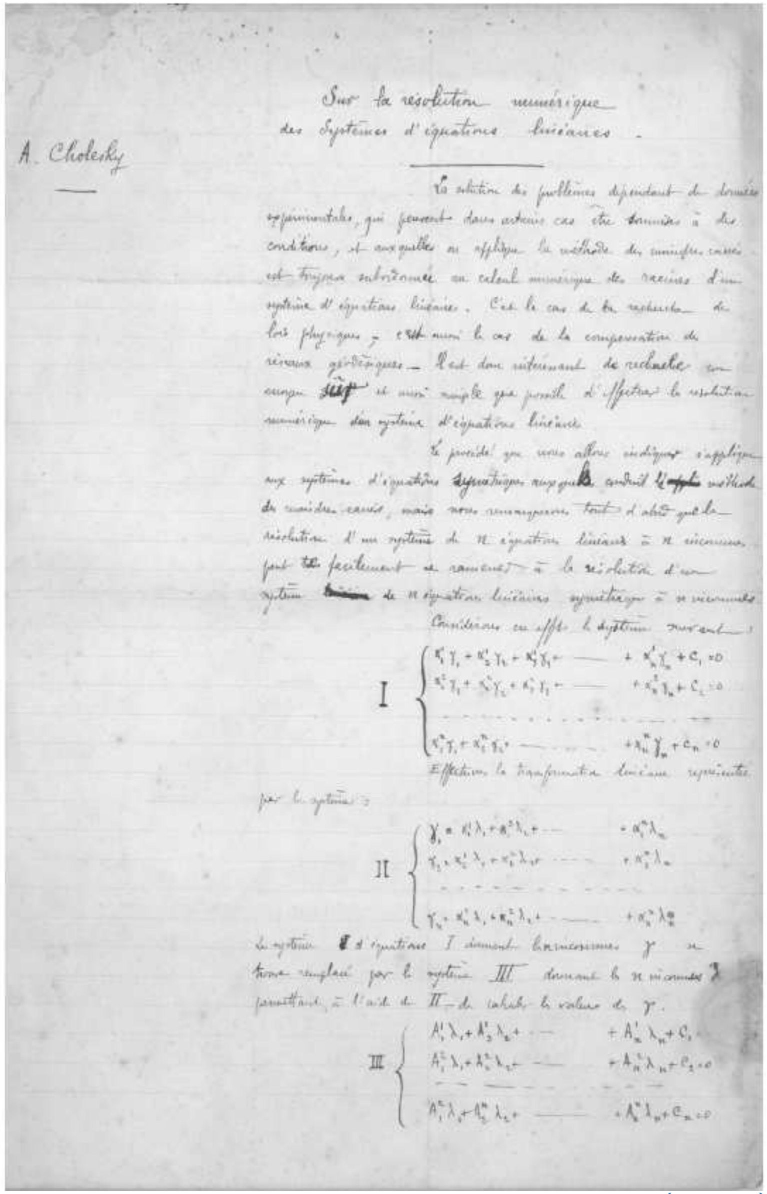
Nous suivrons, pour la démonstration de cette méthode, la progression même qui a servi au Commandant Cholesky pour l'imaginer.

1. De l'Artillerie coloniale, ancien officier géodésien au Service géographique de l'Armée et au Service géographique de l'Indo-Chine, Membre du Comité national français de Géodésie et Géophysique.

2. Sur le Commandant Cholesky, tué à l'ennemi le 31 août 1918, voir la notice biographique insérée dans le volume du *Bulletin géodésique* de 1922 intitulé : *Union géodésique et géophysique internationale, Première Assemblée générale, Rome, mai 1922, Section de Géodésie*, Toulouse, Privat, 1922, in-8°, 241 p., pp. 159 à 161.

5

André-Louis Cholesky


Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires.

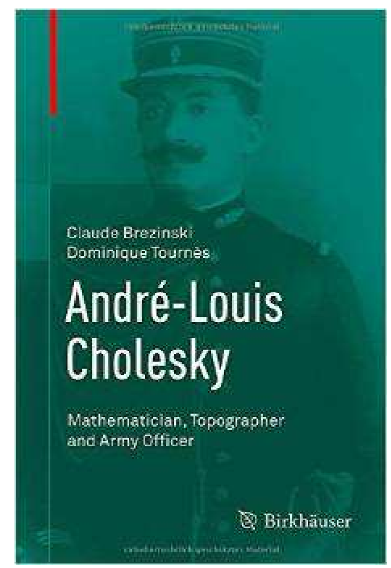
A. Cholesky

La solution des problèmes dépendant de données expérimentales, qui peuvent dans certains cas être soumises à des conditions, et auxquelles on applique la méthode des moindres carrés, est toujours subordonnée au calcul numérique des racines d'un système d'équations linéaires. C'est le cas de la recherche des lois physiques; c'est aussi le cas de la compensation des réseaux géodésiques. Il est donc intéressant de rechercher un moyen aussi simple que possible d'effectuer la résolution numérique d'un système d'équations linéaires.

Brezinski (2006?)

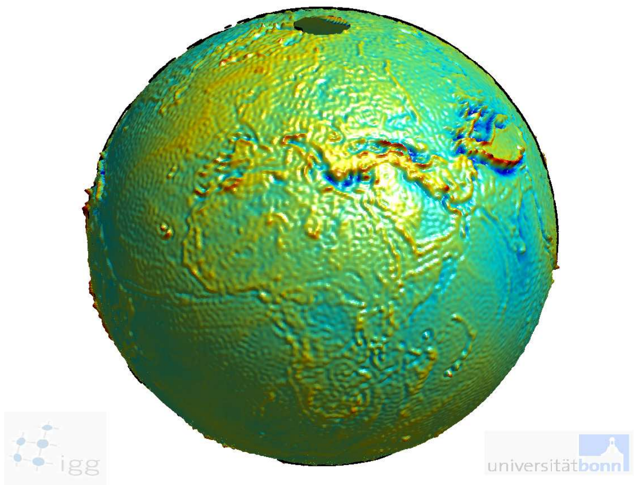
unveröffentlichtes Manuskript:

Cholesky, A. (2. Dec. 1910): *Sur la résolution numérique des systèmes d' équations linéaires* (On the numerical solution of sy-stems of linear equations)



(Sept. 2014)

GOCE-TIM05 Ergebnisse & Produkte

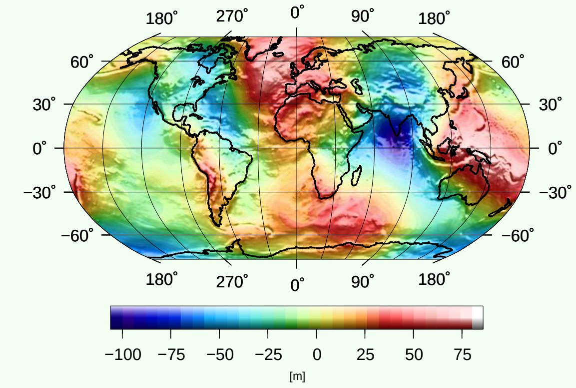


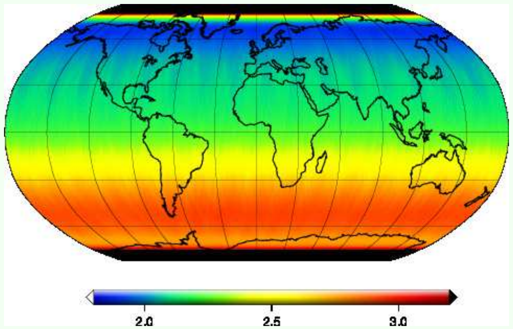
G O C E Schwerefeld

Geoidhöhen:	± 100 m
Genauigkeit:	± 2.8 cm
	± 0.8 mgal
Auflösung:	100 km
	d/o 200

homogene globale Genauigkeit

Schwerefeldmodell
(78.400 Paramter)

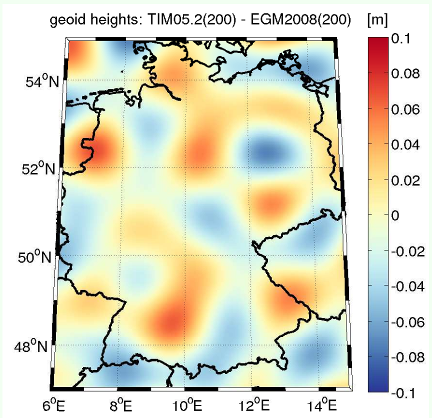




formale Genauigkeit
($\pm$2.0-3.0 cm)

externe Validierung

TIM05-EG2008: Deutschland
(mittlere Fehler: $\pm$2.7 cm)



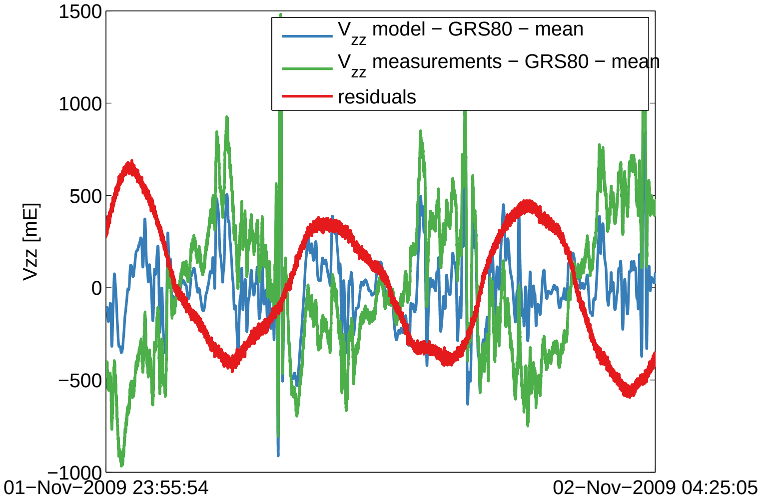
- **konsistente Modellierung des Genauigkeitsbudgets**
- **Varianz/Kovarianzmatrix frei verfügbar**

Brockmann et.al. (2014): EGMTIMRL05: An Independent Geoid with Centimeter Accuracy Purely Based on the GOCE Mission. *Geophysical Research Letters* 41(22), 8089-8099

GOCE - Daten Charakteristik

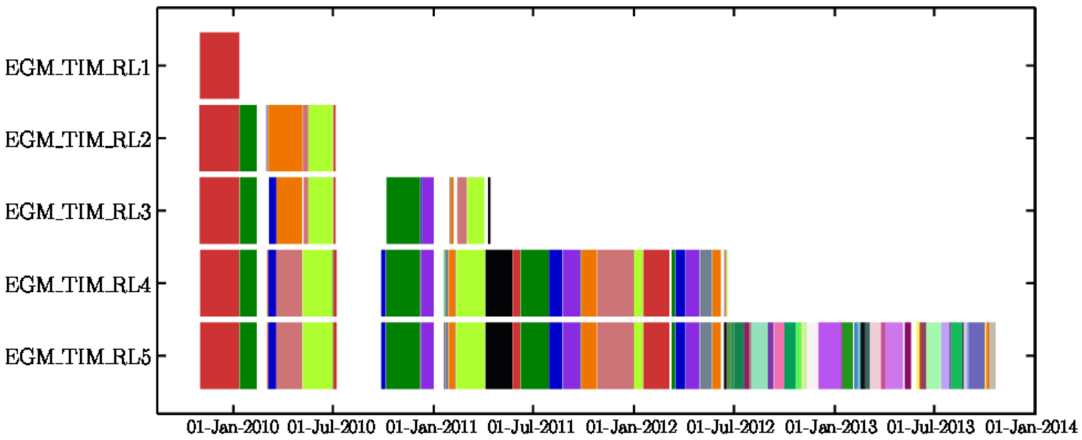
- sehr viele Beobachtungen
- zeitveränderliches Verhalten
- stark korrelierter Messfehler
- ungewöhnliche Daten speziell nach der Orbitabsenkungen auf 230km

Signal vs. Rauschen

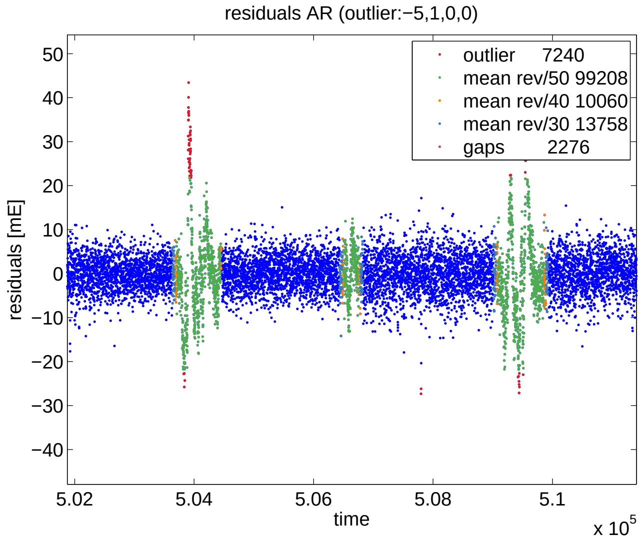


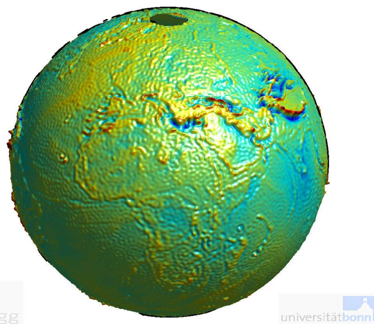
GOCE-TIM Daten Segmente

440 Mill. Beobachtungen, 1273 Tage, 88 Segmente



ungewöhliche Daten





ESA-GOCE-TIM Modelle

(Universität Bonn/TU Graz)

TIM5.0: # Parameter: 78.400
vollbesetzte Normalgleichungen

Beobachtungen: 400.000.000
vollbesetzte Kovarianzmatrizen

Zitat aus Helmerts Antrittsrede:

„Die grosse Aufgabe der rechnerischen Behandlung [. . .] ist mit einem ganz strengen Verfahren, das jede einzelne Messung voll ausnutzen will, nicht durchzukommen; ebenso müssen kleine theoretische Ungenauigkeiten zugelassen werden, falls nachgewiesen wird, dass sie das Ergebniss nicht entstellen.“

Helmert (1900, S.700)

Zitat von H. Bruns über wissenschaftliches Rechnen:

„Einige von den Wissenschaften, die mit einem starken Ziffernverbrauch belastet sind, [. . .] stehen [. . .] vor der Notwendigkeit, über kurz oder lang zu einem zentralisierten Großbetrieb überzugehen, bei dem bestimmte zusammengesetzte Rechenoperationen hunderttausend- und millionenfach auszuführen sind.

Daß hierbei die Maschine, und zwar die jedesmal für eine einzige bestimmte Aufgabe möglichst vollkommen durchgebildete Maschine, der unentbehrliche Helfer sein wird, steht meiner Überzeugung nach außer Frage.“

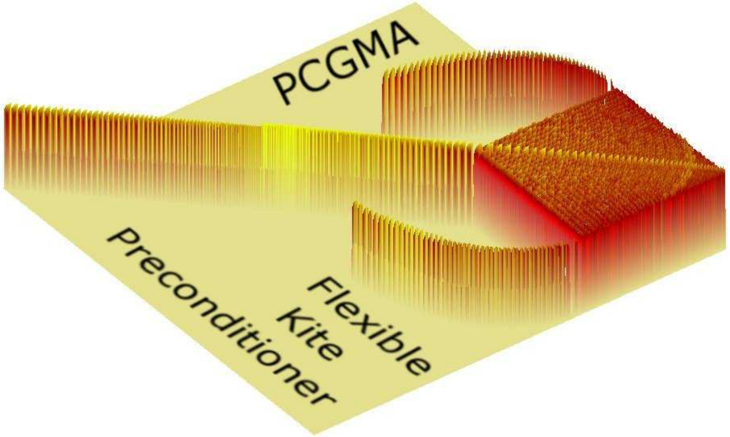
Bruns, H. (1903): Grundlinien des Wissenschaftlichen Rechnens. Teubner, Leipzig, Seite 7.

NIC Jülich - JUROPA
(2208×2×4 Kerne, 52 TB Speicher, 207 TFlops)

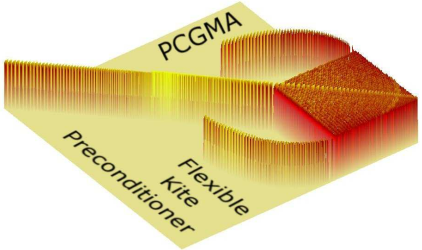
Höchstleistungsrechnen

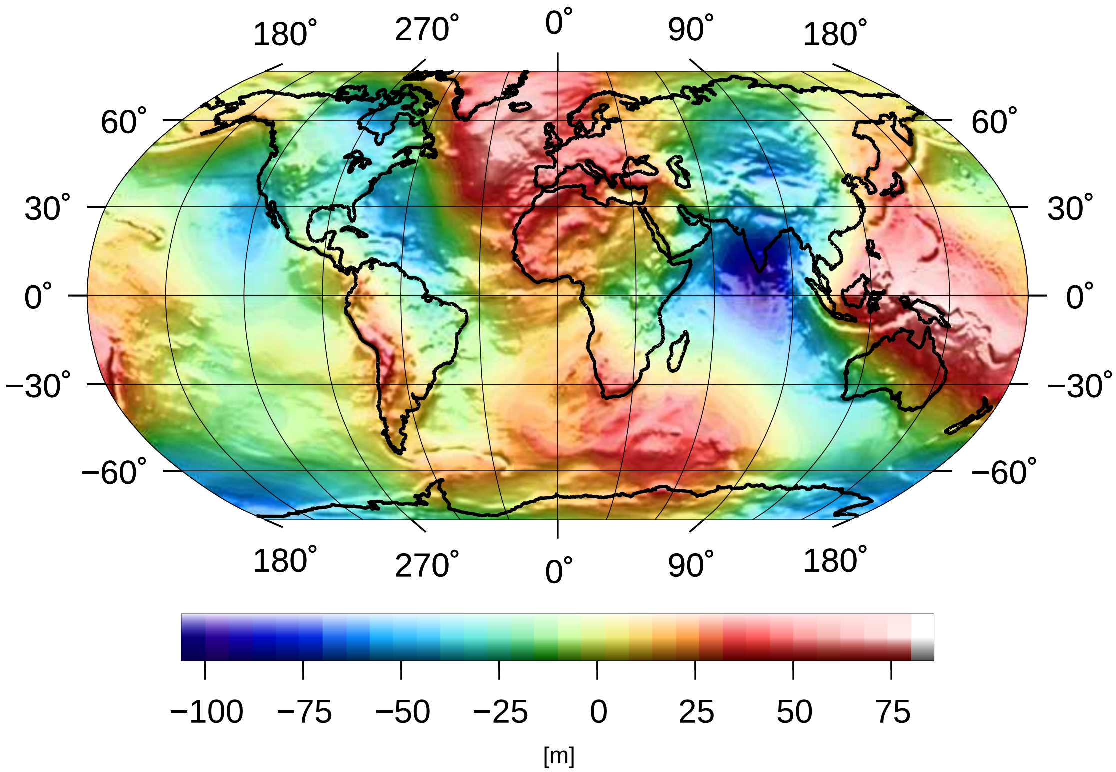
NIC Jülich - JUROPA
(2208×2×4 Kerne, 52 TB Speicher, 207 TFlops)

Höchstleistungsrechnen



maßgeschneiderte Algorithmen


PCGMA
Preconditioner
Flexible
Kite


180°
270°
0°
90°
180°
60°
30°
0°
−30°
−60°
−100
−75
−50
−25
0
25
50
75
[m]

GOCE
Geoid

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate mit Anwendungen

Helmert (1872)
weitere Auflagen: 1907, 1924

Schwerpunkt zunächst auf folgende Abschnitte:

- §5 *5 Uebersicht der verschiedenen Formen der Ausgleichungsaufgaben*
- §21 *Gleichwerthige und vollständig äquivalente Beobachtungsreihen*
- **§3 Maasse für die Genauigkeit von Beobachtungsreihen**

Zitate aus der Antrittsrede:

„Jeder, der nur ein wenig den Inhalt der Geodäsie kennt, wird die vielfältige Anwendung der Ausgleichungsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler gerade in diesem Gebiet des Wissens und Könnens auffallen.

[. . .]

Dabei zeigt sich, dass selbst rein mathematisch recht einfache Aufgaben der Geodäsie durch die Genauigkeitsfragen, die bei der Anwendung auf Messungsergebnisse hinzutreten, an theoretischem Interesse gewinnen.“

Helmert (1900, S.699)

§3 *Maasse für die Genauigkeit von Beobachtungsreihen*

Helmert (1872)

Auf den Spuren von Helmert:

- Definition über Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Helmert, 1872, §3)
- Berechnung aus einer endlichen Anzahl wahrer Beobachtungsfehler
  - Schätzer (Helmert, 1872)
  - Genauigkeit der Schätzer (Helmert, 1872, 1876b)
  - Verteilung der Quadratsumme (Helmert, 1875a, 1876a)

§3 *Maasse für die Genauigkeit von Beobachtungsreihen*

Helmert (1872, §3)

Definitionen über Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\mathcal{E}}(x)$:

$$\boxed{\vartheta_{\mathcal{E}} := \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\mathcal{E}}(x) dx} \quad \boxed{\sigma_{\mathcal{E}}^2 := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\mathcal{E}}(x) dx} \quad \boxed{\varrho_{\mathcal{E}} : \int_{-\rho}^{\rho} f_{\mathcal{E}}(x) dx = \frac{1}{2}}$$

Durchschnittsfehler — mittlerer Fehler — wahrscheinlicher Fehler

$\mathcal{E}$ . . . wahren Beobachtungsfehler
$f_{\mathcal{E}}(x)$ . . . Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der wahren Fehler $\mathcal{E}$

Bei normalverteilten wahren Beobachtungsfehlern: $\boldsymbol{\mathcal{E}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{1}\sigma^2)$

$$\boxed{1.25331\, \vartheta_{\varepsilon} \quad = \quad \sigma_{\mathcal{E}} \quad = \quad 1.48260\, \varrho_{\mathcal{E}}}$$

Definitionen über Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_\mathcal{E}(x)$:

$$\boxed{\vartheta_\mathcal{E} := \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\mathcal{E}(x) dx} \quad \boxed{\sigma_\mathcal{E}^2 := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\mathcal{E}(x) dx} \quad \boxed{\varrho_\mathcal{E} : \int_{-\rho}^{\rho} f_\mathcal{E}(x) dx = \frac{1}{2}}$$

Durchschnittsfehler — mittlerer Fehler — wahrscheinlicher Fehler

Schätzung aus n Beobachtungsfehlern $\mathcal{E}_i$, $i=1,\ldots,n$

$$\boxed{\widehat{\mathcal{D}}_\mathcal{E} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mathcal{E}_i|} \quad \boxed{\widehat{\mathcal{S}}_\mathcal{E}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i^2} \quad \boxed{\widehat{\mathcal{R}}_\mathcal{E} = \text{median}|\mathcal{E}_i|}$$

Definitionen über Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_\mathcal{E}(x)$:

$$\boxed{\vartheta_\mathcal{E} := \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\mathcal{E}(x)dx} \quad \boxed{\sigma_\mathcal{E}^2 := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\mathcal{E}(x)dx} \quad \boxed{\varrho_\mathcal{E} : \int_{-\rho}^{\rho} f_\mathcal{E}(x)dx = \frac{1}{2}}$$

Durchschnittsfehler — mittlerer Fehler — wahrscheinlicher Fehler

Schätzung aus n Beobachtungsfehlern $\mathcal{E}_i$, $i=1,\ldots,n$

$$\boxed{\widehat{\mathcal{D}}_\mathcal{E} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mathcal{E}_i|} \quad \boxed{\widehat{\mathcal{S}}_\mathcal{E}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i^2} \quad \boxed{\widehat{\mathcal{R}}_\mathcal{E} = \text{median}|\mathcal{E}_i|}$$

Berechnung der mittleren Fehler der Schätzung:

$$\boxed{\sigma_{\widehat{\mathcal{D}}_\mathcal{E}} = ?} \quad \boxed{\sigma_{\widehat{\mathcal{S}}_\mathcal{E}} = ?} \quad \boxed{\sigma_{\widehat{\mathcal{R}}_\mathcal{E}} = ?}$$

Definitionen über Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\mathcal{E}}(x)$:

$$\boxed{\vartheta_{\mathcal{E}} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\mathcal{E}}(x) dx} \qquad \boxed{\sigma_{\mathcal{E}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\mathcal{E}}(x) dx} \qquad \boxed{\varrho_{\mathcal{E}} : \int_{-\rho}^{\rho} f_{\mathcal{E}}(x) dx = \frac{1}{2}}$$

Durchschnittsfehler — mittlerer Fehler — wahrscheinlicher Fehler

Schätzung aus n Beobachtungsfehlern $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, n$

$$\boxed{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{E}_i|} \qquad \boxed{\widehat{\mathcal{S}}_{\mathcal{E}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i^2} \qquad \boxed{\widehat{\mathcal{R}}_{\mathcal{E}} = \text{median}|\mathcal{E}_i|}$$

Berechnung der mittleren Fehler der Schätzung (Normalverteilung):

$$\boxed{\sigma_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}}} = 0.75551 \frac{\vartheta_{\mathcal{E}}}{\sqrt{n}}} \qquad \boxed{\sigma_{\widehat{\mathcal{S}}_{\mathcal{E}}} = 0.70711 \frac{\sigma_{\mathcal{E}}}{\sqrt{n}}} \qquad \boxed{\sigma_{\widehat{\mathcal{R}}_{\mathcal{E}}} = 1.11636 \frac{\varrho_{\mathcal{E}}}{\sqrt{n}}}$$

Folgerung: *mittlerer Fehler ist* **„genauer“**

Aussage: *mittlerer Fehler ist* **„genauer"**

Kommentar von Helmert zu dieser Aussage:

„Wir können hier nicht unerwähnt lassen, dass eine strengere Untersuchung erst feststellen müsste, ob man die Genauigkeit der Berechnung von ϑ und μ nach den mittlern Fehlern [. . .] beurtheilen darf.
Denn die Fehler in S_m befolgen [. . .] offenbar ein Gesetz, welches von der [. . .] angenommenen Form des Fehlergesetzes abweicht, [. . .]. Eine genauere Untersuchung, die nicht sehr einfach ausfällt, würde uns zu weit führen"

(Helmert, 1872, p. 26, Fußnote)

Mees (1875)[1] kritisiert im März 1875 die Aussage von Helmert über den „genaueren" Schätzer.

[1] R.A. Mees (1844.1886) Prof. für Physik an der Universität Groningen

Antwort von Helmert im Juni 1875: *Kleinere Mittheilungen*

Helmert, F. R. (1875): Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl wahrer Beobachtungsfehler. Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch), Vol: XX, p. 300-303. (Helmert, 1875a)

erste Aussage über die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Quadratsumme von Beobachtungsfehlern

„Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Fehlern die Summe $[\varepsilon^2]$ zwischen den Grenzen $n(\sigma_2 - \frac{\delta}{2})$ und $n(\sigma_2 + \frac{\delta}{2})$ falle, wobei δ sehr klein ist, wird (unter Annahme des Gauss'schen Gesetzes)

$$w = \frac{h^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}(n\delta)(n\sigma_2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-h^2 n\sigma_2} \qquad \ldots\text{“}$$

(Helmert, 1875a, Seite 302-303)

Anmerkung: üblicher Literaturhinweis: Helmert (1876b, Seite 203, Formel (25))
erste Erwähnung aber: Helmert (1875a, Seite 302-303)

- Helmert kündigt einen *grösseren Aufsatz* an
- Mees (März 1976): „Mit Verlangen sehe ich dem angekündigten *grösseren Aufsatz* entgegen“

Helmert, F. R. (1876): Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit in Zusammenhange stehend Fragen. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol: XXI, p. 192-218.

(Helmert, 1876b)

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für $[\ \varepsilon^2\ ]$:

$$\boxed{\varphi(\sigma_2)_n\delta_2 = \frac{h^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}(n\sigma_2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-h^2 n\sigma_2}\delta_2}$$

Helmert (1876b, Seite 203, Formel (25))

Beachte: σ_2 bezeichnet die Integrationsgröße und nicht die Varianz
Umformung: Homogenisierung der Beobachtungsfehler: $x := 2h^2 n\sigma_2$

$$\boxed{f^{\chi^2}(x;n) := \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}$$

χ^2-Verteilung (Chi-Quadrat-Verteilung)

Helmert, F. R. (1876): Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit in Zusammenhange stehend Fragen. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol: XXI, p. 192-218.

(Helmert, 1876b)

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für $[\ \varepsilon^2\ ]$:

$$\boxed{\varphi(\sigma_2)_n\delta_2 = \frac{h^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}(n\sigma_2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-h^2n\sigma_2}\delta_2}$$

Helmert (1876b, Seite 203, Formel (25))

Beachte: σ_2 bezeichnet die Integrationsgröße und nicht die Varianz

Umformung: Homogenisierung der Beobachtungsfehler: $x := 2h^2n\sigma_2$

$$\boxed{f^{\chi^2}(x;n) := \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}$$

χ^2-Verteilung (Chi-Quadrat-Verteilung)

Die χ^2-Verteilung stellt eine spezielle Γ-Verteilung dar.

Verteilung der Quadratsumme der Beobachtungsfehler

Die Bezeichnung *Chi-Quadrat-Verteilung* geht auf eine Arbeit von K. Pearson aus dem Jahr 1900 zurück, der den griechischen Buchstaben χ in seinen Ausführungen benutzt hat. (Pearson, 1900).

Diskussion:	Chi-Quadrat-Verteilung	Pearson (1900)
	Helmert-Verteilung	Helmert (1875a)

Dies wurde eingehend Mitte des letzten Jahrhunderts diskutiert: siehe z.B. (Kruskal, 1946; Lancaster, 1966; Johnson und Kotz, 1970)

„We may follow Kruskal (1946) in recommending that "the joint distribution of sample mean and standard deviation for samples of independent random observations, drawn from a normal population, may be called HELMERT'S DISTRIBUTION*" “.*

(Lancaster, 1966)

Eine ausführliche Darstellung dieser Diskussion ist auch bei (Johnson und Kotz, 1970, Kap. 17.3) zu finden.

Zurück zur Auseinandersetzung zwischen Helmert und Mees:

„Herr Mees hat [. . .] auf meine Aeusserung [. . .] über seinen früheren Aufsatz geantwortet.

Dieser Antwort gegenüber genügt es, wiederum auf meine ebenerwähnte Aeusserung hinzuweisen und Herrn Mees daran zu erinnern, dass ich selbst in meinem Buche auf eine gewisse Unvollständigkeit eines Beweises aufmerksam mache, mir also die Priorität einer „Warnung“ verbleibt.

Zu den Mängeln meines Buches rechne ich selbstverständlich die betreffende Stelle nicht — indem ich nämlich aus praktischen Gründen der jüngern Gauss'Darstellung [. . .] folgte, musste ich nothwendig auch deren Lücken in Kauf nehmen, die selbst durch lange Untersuchungen nicht vollständig ausfüllbar sind, aber doch Erwähnung verdienen, und zwar auch in einem Lehrbuche.“

(Helmert, 1876b, p. 218)

Helmerts Antrittsrede 28. Juni 1900

SITZUNGSBERICHTE 1900.

DER XXXII.

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

28. Juni. Öffentliche Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages.

Antrittsrede des Hrn. Helmert.

Ein ungewöhnliches Ereigniss ist es, dass in der Königlichen Akademie der Wissenschaften ein Vertreter der Geodäsie seinen Eintritt als ordentliches Mitglied öffentlich bekunden kann. Ich bin sogar der Erste, dem diese Ehre zu Theil wird. Es haben allerdings wiederholt mit der Akademie Männer, deren Thaten und wissenschaftliche Arbeiten von grundlegender Bedeutung für die Geodäsie gewesen sind, in den engsten Beziehungen gestanden: Maupertuis als ihr Präsident, Gauss und Bessel

Helmert (1900)

Analytische Geodäsie

—

Geodätische Analyse

Felix Klein (25.4.1849 - 20.6.1925)

„Die GEODÄSIE *ist derjenige Teil der Geometrie, in welchem die Idee der Approximationsmathematik ihre klarste und konsequenteste Durchbildung gefunden hat. Man untersucht bei ihr unausgesetzt einerseits die Genauigkeit der Beobachtungen und andererseits die Genauigkeit der Resultate, die aus den Beobachtungen folgen."*

Felix Klein (1928, p.158):
Elementarmathematik vom Höheren Standpunkt aus III, Springer, Berlin

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

Helmert, F. R. (1868a): Studien über rationelle Vermessung im Gebiete der höheren Geodäsie. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 13(2):73–120. URL *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415665_0013|LOG_0009*.

Helmert, F. R. (1868b): Studien über rationelle Vermessung im Gebiete der höheren Geodäsie - 2. Teil. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 13(3):163–186. URL *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415665_0013|LOG_0012*.

Helmert, F. R. (1872): *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente*. B. G. Teubner. URL *https://books.google.de/books?id=DzBLAAAAMAAJ&printsec=frontcover*.

Helmert, F. R. (1875a): Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl wahrer Beobachtungsfehler. *Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch)*, XX:300–303.

Helmert, F. R. (1875b): Ueber die Formeln für den Durchschnittsfehler. *Astronomische Nachrichten*, 85(22-23):353–366. ISSN 1521-3994. doi:10.1002/asna.18750852203.

Helmert, F. R. (1876a): Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. *Astronomische Nachrichten*, 88(8-9):113–131. ISSN 1521-3994. doi:10.1002/asna.18760880802.

Helmert, F. R. (1876b): Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit in Zusammenhange stehend Fragen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XXI:192–218. URL *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415665_0021|LOG_0024*.

Helmert, F. R. (1877a): Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt. *Astronomische Nachrichten*, 89(2127):241–246. URL *http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1877AN.....89..225H&defaultprint=YES&filetype=.pdf*.

Helmert, F. R. (1877b): Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt (Schluss). *Astronomische Nachrichten*, 89(2128):241–246. URL *http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1877AN.....89..241H&defaultprint=YES&filetype=.pdf*.

Literatur

Helmert, F. R. (1900): Antrittsrede des Hrn. Helmert. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, XXXII, S. 698–704. URL *https://ia601401.us.archive.org/7/items/sitzungsberichte1900deut/sitzungsberichte1900deut.pdf*. Öffentliche Sitzung zur Feier des LEIBNIZischen Jahrestages, 28. Juni 1900.

Helmert, F. R. (1904): Zur Ableitung der Formel von C.F.GAUSS für den mittleren Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe vom 9. Juni 1904*, XXX, S. 950–964. URL *https://ia802704.us.archive.org/31/items/sitzungsberichte1904deutsch/sitzungsberichte1904deutsch.pdf*.

Helmert, F. R. (1905): Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe vom 25. Mai 1905*, XXVIII, S. 594–612. URL *https://ia800306.us.archive.org/18/items/sitzungsberichte1905deutsch/sitzungsberichte1905deutsch.pdf*.

Helmert, F. R. (1907): *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geoäsie und die Theorie der Messinstrumente*. B. G. Teubner. URL *http://books.google.de/books?id=ibsJAAAAMAAJ*. Zweite Auflage.

Helmert, F. R. (1911): Über die Genauigkeit der Dimensionen des HAYFORDschen Erdellipsoids. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe vom 12. Januar 1911*, II, S. 950–964. URL *https://ia802608.us.archive.org/25/items/sitzungsberichte1911deut/sitzungsberichte1911deut.pdf*.

Johnson, N., S. Kotz (1970): *Distrubutions in Statistics: Continuous Univariate Distributions-1*, Band 1. Houghton Mifflin Company, Boston.

Kendall, M. G. (1951): Regression, Structure and Functional Relationship. Part I. *Biometrika*, 38(1/2):11–25. ISSN 0006-3444. doi:10.2307/2332313.

Klein, F. (1928): *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkt aus III*. Springer, Berlin.

Koch, K. (1997): *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. Ferd. Dm̈mlers Verlag, Bonn. URL *http://www.igg.uni-bonn.de/tg/fileadmin/publication/media/buch97_format_neu.pdf*.

Krüger, L. (1917): Anzeige des Todes von Friedrich Robert Helmert. *Astronomische Nachrichten*, 7:397–398. doi:10.1002/asna.19172042104.

Kruskal, W. (1946): Helmert's Distribution. *The American Mathematical Monthly*, 53(8):435–438. ISSN 00029890, 19300972. URL *http://www.jstor.org/stable/2306241*.

Lancaster, H. O. (1966): Forrunners of the Pearson χ^2. *Australian Journal of Statistics*, 8(3):117–126. ISSN 1467-842X. doi:10.1111/j.1467-842X.1966.tb00262.x.

Mees, R. (1875): Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XX(2):145–152. URL *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN599415665_0020|LOG_0019*.

Meissl, P. (1976): Skriptum aus Ausgleichungsrechnung II. Technischer Report, Institut für Mathematische und Numerische Geodäsie, Technische Universität Graz.

Pearson, K. F. (1900): On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Philosophical Magazine Series 5*, 50(302):157–175. doi:10.1080/14786440009463897.

Wolf, H. (1968): *Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Ferd. Dümmlers Verlag der Technischen Universität Graz.

Wolf, H. (1978): Das geodätische Gauß-Helmert Modell und seine Eigenschaften. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 103(10):41–43.

Definitionen über Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_\mathcal{E}(x)$:

$$\vartheta_\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\mathcal{E}(x) dx$$

Durchschnittsfehler

$$\sigma_\mathcal{E}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\mathcal{E}(x) dx$$

mittlerer Fehler

$$\varrho_\mathcal{E} : \int_{-\rho}^{\rho} f_\mathcal{E}(x) dx = \frac{1}{2}$$

wahrscheinlicher Fehler

Direkte Beobachtungen: Schätzung aus Verbesserungen $\widetilde{\mathcal{V}}_i$

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{E} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{\mathcal{V}}_i|}{\sqrt{n(n-1)}}}$$

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{S}}_\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mathcal{V}}_i^2}{n-1}}}$$

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{R}}_\mathcal{E} = \text{median}|\widetilde{\mathcal{V}}_i|}$$

Berechnung der mittleren Fehler der Schätzung (Normalverteilung):

$$\boxed{\sigma_{\widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{\pi-2}{2(n-1)}}\, \widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{E}}$$

$$\boxed{\sigma_{\widetilde{\mathcal{S}}_\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\, \widetilde{\mathcal{S}}_\mathcal{E}}$$

$$\boxed{\sigma_{\widetilde{\mathcal{R}}_\mathcal{E}} = \text{?}}$$

Definitionen über Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_\mathcal{E}(x)$:

$$\vartheta_\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\mathcal{E}(x)dx$$

$$\sigma_\mathcal{E}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\mathcal{E}(x)dx$$

$$\varrho_\mathcal{E} : \int_{-\rho}^{\rho} f_\mathcal{E}(x)dx = \frac{1}{2}$$

Durchschnittsfehler — mittlerer Fehler — wahrscheinlicher Fehler

Direkte Beobachtungen: Schätzung aus Verbesserungen $\widetilde{\mathcal{V}}_i$

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{E} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\widetilde{\mathcal{V}}_i|}{\sqrt{n(n-1)}}$$

$$\widetilde{\mathcal{S}}_\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{\mathcal{V}}_i^2}{n-1}}$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\mathcal{E} = \text{median}|\widetilde{\mathcal{V}}_i|$$

Berechnung der mittleren Fehler der Schätzung (Normalverteilung):

$$\sigma_{\widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{\pi-2}{2(n-1)}}\, \widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{E}$$

$$\sigma_{\widetilde{\mathcal{S}}_\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\, \widetilde{\mathcal{S}}_\mathcal{E}$$

$$\sigma_{\widetilde{\mathcal{R}}_\mathcal{E}} = \textbf{?}$$

Folgerung: mittlerer Fehler hat die kleinere Streuung

Definitionen über Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_\mathcal{E}(x)$:

$$\boxed{\vartheta_\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\mathcal{E}(x)dx}$$

$$\boxed{\sigma_\mathcal{E}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\mathcal{E}(x)dx}$$

$$\boxed{\varrho_\mathcal{E} : \int_{-\rho}^{\rho} f_\mathcal{E}(x)dx = \frac{1}{2}}$$

Durchschnittsfehler | mittlerer Fehler | wahrscheinlicher Fehler

Vermittelnder Ausgleichung: Schätzung aus Verbesserungen $\widetilde{v}_i$

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{E} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{\mathcal{V}}_i|}{\sqrt{n(n-m)}}}$$

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{S}}_\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mathcal{V}}_i^2}{n-m}}}$$

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{R}}_\mathcal{E} = \text{median}|\widetilde{\mathcal{V}}_i|}$$

Definitionen über Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_\mathcal{E}(x)$:

$$\vartheta_\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\mathcal{E}(x)dx$$

$$\sigma_\mathcal{E}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\mathcal{E}(x)dx$$

$$\varrho_\mathcal{E} : \int_{-\rho}^{\rho} f_\mathcal{E}(x)dx = \frac{1}{2}$$

Durchschnittsfehler — mittlerer Fehler — wahrscheinlicher Fehler

Vermittelnder Ausgleichung: Schätzung aus Verbesserungen $\widetilde{v}_i$

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\mathcal{E} > \frac{\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{\mathcal{V}}_i|}{\sqrt{n(n-m)}}$$

$$\widetilde{\mathcal{S}}_\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mathcal{V}}_i^2}{n-m}}$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\mathcal{E} = \text{median}|\widetilde{\mathcal{V}}_i|$$

Die Aussage zur Schätzung des durchschnittlichen Fehlers aus Helmert (1872, S. 101,(19)) wurden dann in Helmert (1875b, S. 354) allerdings revidiert und gezeigt, dass das Gleichheitszeichen nur für die Ausgleichung direkter Beobachtungen $(m=1)$ gilt.

Näherungsformel für die Berechnung des duchschnittlichen Fehlers:

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{1-\frac{m}{12n}-\frac{m^2}{24n^2}-\ldots} \; \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\widetilde{\mathcal{V}}_i|}{\sqrt{n(n-m)}}$$

(Helmert, 1875b, (32))