

Institut für Geodäsie und Geoinformation

---

Professur für Theoretische Geodäsie

Raum-zeitliche Signaltrennung  
in einem Bildstapel

Bachelorarbeit

im Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

an der Landwirtschaftlichen Fakultät

der Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität

Bonn

vorgelegt am 13. Juni 2016 von

Karen Lucienne Backs

aus Soest

Bonn 2016



Erster Prüfer: Prof. Dr. techn. W.-D. Schuh

Zweiter Prüfer: J. Köhler, M.Sc.

19. April 2016

**Bachelorarbeit Karen Lucienne Backs**

**Thema: Raum-zeitliche Signaltrennung in einem Bildstapel**

Mit der differentiellen Auswertung von interferometrischen Satelliten-Radardaten (D-InSAR) ist es möglich kleinräumige bis großräumige Deformationen der Erdoberfläche zu detektieren. Da die Deformation ein langzeitliches Phänomen ist, ändert sich das Signal in einer Zeitreihe von D-InSAR-Aufnahmen nur langsam. Um diesen zeitlichen Zusammenhang zwischen einer Reihe von Interferogrammen auszunutzen, werden zunehmend ganze D-InSAR-Bildstapel ausgewertet.

Die differentiell-interferometrische Phase besteht jedoch nicht nur aus dem Deformationssignal, sondern ist eine Überlagerung von mehreren Signalen, die sich in einem additiven Modell beschreiben lassen. Zum Deformationsanteil kommt der Phasenanteil der Atmosphäre hinzu, der durch Laufzeitverzögerungen des Radarsignals beim Durchqueren der Erdatmosphäre bedingt ist. Der sogenannte Orbitfehler ist die Restabweichung der Korrektur des Phasenanteils der „flachen Erde“ und ist auf Ungenauigkeiten in den zur Korrektur verwendeten Satellitenbahndaten zurückzuführen. Der letzte systematische Anteil ist durch den Höhenfehler gegeben, der durch Ungenauigkeiten im Digitalen Höhenmodell (DHM) bei der Elimination der topographischen Phase entsteht. Abschließend werden diese Phasenanteile noch durch ein zufälliges Signalrauschen überlagert (Casu, 2009, S. 34ff).

Im Gegensatz zur Deformation ändern sich die Atmosphäre, der Orbitfehler und das Rauschen unabhängig von Bild zu Bild. Neben diesem unterschiedlichen zeitlichen Verhalten weisen diese Signale auch ein jeweils verschiedenes räumliches Verhalten auf. Dieser Umstand kann genutzt werden, um die Signale innerhalb eines Bildstapels voneinander zu trennen.

Das Ziel dieser Bachelorarbeit besteht nun darin, die zeitliche Bewegung von den räumlichen Störungen (durch die Atmosphäre etc.) in jeder Aufnahme eines Bildstapels zu trennen. Dafür sollen die Signale durch eine raumzeitliche Approximation mit Tensor-B-Splines bestimmt werden. Zur Bearbeitung dieser Aufgabe sind folgende Schritte vorgesehen:

- Zur Erzeugung von Testdaten sowie zur späteren Validierung des Modells soll eine Simulationsumgebung geschaffen werden. Das Programm soll dabei die Erzeugung von Bildstapeln ermöglichen, die ein langzeitliches und ein bildweises Signal sowie ein zufälliges Rauschen enthalten.
- Im nächsten Schritt ist die Methodik zu erarbeiten, die für die raum-zeitliche Approximation mit Tensor-B-Splines notwendig ist.
- Mit den simulierten Daten und der angeeigneten Methodik soll nun die Approximation und die Trennung der Signale umgesetzt werden.
- Abschließend sind die verwendeten Modellvarianten zu validieren. Hierzu sollen die Ergebnisse mit den Vorgaben der Simulationsumgebung verglichen werden.

**Literatur**

Casu, F. (2009) *The Small BAseline Subset technique: performance assessment and new developments for surface deformation analysis of very extended areas*. Dissertation, Universität Cagliari, Cagliari, Italien.

Aufgabensteller: Prof. Dr. techn. Wolf-Dieter Schuh  
Betreuer: Joël Köhler, M.Sc.

Tag der Ausgabe:  
Dauer: 5 Monate  
Tag der Abgabe:

Bonn, den 19. April 2016



Wolf-Dieter Schuh



Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Bonn, 10. August 2016

---

Karen Bacs



# Zusammenfassung

Zur Detektion von kleinräumigen bis großräumigen Deformationen der Erdoberfläche wird die differentielle Auswertung von interferometrischen Satelliten-Radardaten (D-InSAR) verwendet. Die Aufnahmen eines Ausschnittes der Erdoberfläche zu verschiedenen Zeitpunkten werden übereinander gelegt und bilden einen sogenannten Bildstapel. Jedes Bild eines D-InSAR-Bildstapels enthält dabei differentiell-interferometrische Phasen, die sich aus verschiedenen, überlagerten Signalen zusammensetzen (CASU, 2009). In dieser Arbeit werden diese Signale in einen langzeitlichen Anteil, einen bildweisen Anteil und ein zufälliges Rauschen eingeteilt. Wie die Bezeichnungen andeuten, weisen die verschiedenen Anteile ein unterschiedliches zeitliches Verhalten auf. Das Ziel dieser Bachelorarbeit besteht darin diesen Umstand zu nutzen und somit die zeitliche Bewegung, also die Deformation, von den räumlichen Störungen, wie z.B. der Atmosphäre, in jeder Aufnahme eines Bildstapels zu trennen. Dafür gibt es bereits einige Ansätze, allerdings beruht dabei die Signaltrennung auf mehreren Schritten. In diesem Fall besteht der Ansatz darin die Signale in einem Schritt zu separieren. Da die einzelnen Signale nicht eindeutig parametrisiert werden können, werden für die Approximation jedes Signals Basissplines angesetzt. Diese gelten als numerisch stabil und es sind keine Restriktionen oder Bedingungen festzulegen. Explizit soll die Signaltrennung durch eine raum-zeitliche Approximation mit Tensor-B-Splines bestimmt werden (FAHRMEIR ET AL., 2009).

Im ersten Teil werden die Eigenschaften der Signale eines Bildstapels betrachtet und daraus die Erstellung von Simulationsdaten abgeleitet. Diese setzen sich aus dem langzeitlichen Deformationssignal, dem bildweisen Atmosphärensignal und dem zufälligen Rauschen zusammen.

Im zweiten Teil werden die methodischen Grundlagen erarbeitet, die für eine raum-zeitliche Approximation mittels Tensor-B-Splines nötig sind. Dazu werden die B-Spline-Basisfunktionen und das Zusammensetzen zu einer modellierenden Funktion behandelt.

Im nächsten Kapitel wird das grundlegende Approximationsmodell zur Trennung der Signale detailliert aufgestellt. Dabei wird das lineare Ausgleichungsmodell nach Gauß-Markov zu Grunde gelegt (KOCH, 1997). In einer Erweiterung des Approximationsmodells wird das Ausgleichungsmodell um Restriktionen an die Parameter ergänzt. In zwei weiteren Ansätzen werden auftretende Problematiken des Approximationsmodells bezüglich des Auflösungsvermögens und der Konditionierung des Ausgleichungsproblems behandelt.

Zur Bewertung der Abwandlungen des Approximationsmodells werden jeweils das Gesamtmodell und die getrennten Signale veranschaulicht und analysiert. Außerdem wird ein Vergleich zwischen dem Approximationsmodell ohne und mit Restriktionen vorgenommen. Weiterhin wird die Reproduktion der simulierten Deformationsraten aus den approximierten Daten in Augenschein genommen. Und aufgrund des auftretenden Rangdefektes wird eine Ausgleichung der Deformation als alleiniges, auszugleichendes Signal angesetzt. Im Allgemeinen führen die erhaltenen Ergebnisse aus den angewendeten Approximationen auf die Erkenntnis, dass die vorgestellten Approximationsmodelle in dieser Art nicht zur Separation der Signale geeignet sind. Es wird gezeigt, dass die Separation der Signale, aufgrund der Problematik des modellbedingten Rangdefektes, nicht lösbar ist.





# Abstract

The differential approach of analysing interferometric satellite radar data (D-InSAR) is used for detecting small- and large-scale surface movements. Therefore several images of the same area of the earth's surface from different points in time are stacked on top of each other. Every image of a D-InSAR-stack contains differential-interferometric phases, which are composed of various signals (CASU, 2009). In this bachelor thesis these signals are divided into a long-term part, a part per image and a random noise. The several parts of the signal are characterized by different behaviours in time. The aim of this thesis is to take advantage of these circumstances to separate the timewise deformation from the spatial disturbances, e.g. the atmosphere, in every image of the stack. There are already some approaches for the signal separation, which are based on a few steps. Whereas the idea of this approach is about separating the signals in one step. As it is not known how to parameterize the different signals, these are approximated by basis splines. The B-Splines are numerically stable and there are no constraints or conditions required. For the underlying problem a spatio-temporal approximation with Tensor-B-Splines will be determined (FAHRMEIR ET AL., 2009).

The first part of this bachelor thesis deals with the properties of the signals within an image-stack. Furthermore it reveals the generation of the simulation data, which include a long-term deformation signal, an atmospheric signal per image and a random noise.

The second part focusses on the methodological principles, which are needed for a spatio-temporal approximation with Tensor-B-Splines. Especially the local support of the B-Splines and the modelling, global function are described.

The following chapter points out the basic approximation model for separating the signals. It is based on the linear least square estimation (KOCH, 1997). In an extension of the approximation model, the estimation model will be enhanced by constraints on the parameters. Besides two occurring problems according to the resolution and the conditioning of the approximation model will be addressed.

Finally the different approximation models will be evaluated by showing and analysing the approximated observations and the separated signals. Among others the results with and without conditions will be compared. Moreover the reproduction of the generated deformation rate from the approximated data will be determined. Due to the arising rank deficiency an approximation with the deformation signal only will be assessed.

All in all the results of the approximations reveal that the presented approximation models are not suitable for separating the signals of an image-stack. It will be pointed out, that the separation of the signals cannot be solved because of the problem of the model-based rank deficiency.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Motivation . . . . .	3
1.2	Stand der Forschung . . . . .	3
1.3	Gliederung . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Simulationsumgebung</b>	<b>5</b>
2.1	Erzeugung eines Bildstapels . . . . .	5
2.1.1	Langzeitliches Signal . . . . .	5
2.1.2	Bildweises Signal . . . . .	6
2.1.3	Zufälliges Messrauschen . . . . .	7
2.2	Umsetzung in MATLAB . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Methodik der Tensor-B-Splines</b>	<b>11</b>
3.1	Splines . . . . .	11
3.2	B-Splines . . . . .	11
3.2.1	B-Spline-Basisfunktionen . . . . .	11
3.2.2	Funktion aus B-Splines . . . . .	13
3.3	Tensor-B-Splines . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Raum-zeitliches Approximationsmodell</b>	<b>16</b>
4.1	Lineare Ausgleichung nach Gauß-Markov . . . . .	16
4.1.1	Lineares Ausgleichungsmodell nach Gauß-Markov . . . . .	16
4.1.2	Aufstellen des Modells zur Approximation . . . . .	17
4.2	Lineare Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen . . . . .	24
4.2.1	Lineares Ausgleichungsmodell nach Gauß-Markov mit Restriktionen . . . . .	24
4.2.2	Aufstellen des Restriktionsmodells . . . . .	25
4.3	Prädiktion der geschätzten Signale auf einem regelmäßigen Gitter . . . . .	26
4.4	Problematik des Approximationsmodells . . . . .	27
4.4.1	Auflösung der Deformationsrate . . . . .	27
4.4.2	Rangbetrachtungen der Matrizen der Normalgleichungen . . . . .	27

<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>31</b>
5.1	Ergebnisse des Ausgleichungsmodells ohne Restriktionen . . . . .	31
5.1.1	Schätzung des Gesamtsignals . . . . .	31
5.1.2	Separation der Signale . . . . .	32
5.1.3	Konditionierung der Normalgleichungen . . . . .	33
5.2	Ergebnisse des Ausgleichungsmodells mit Restriktionen . . . . .	34
5.2.1	Schätzung des Gesamtsignals . . . . .	34
5.2.2	Separation der Signale . . . . .	35
5.2.3	Konditionierung der Normalgleichungen . . . . .	36
5.3	Ansätze zur Lösung der Probleme des Approximationsmodells . . . . .	37
5.3.1	Anpassung der zeitlichen Auflösung der B-Splines . . . . .	37
5.3.2	Ansatz zur Umgehung des Rangdefektes . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Schlussbemerkungen</b>	<b>47</b>
6.1	Fazit . . . . .	47
6.2	Ausblick . . . . .	47
<b>A</b>	<b>Bezeichnungen</b>	<b>i</b>
<b>B</b>	<b>Abkürzungen</b>	<b>v</b>
	<b>Verzeichnisse</b>	<b>vi</b>
	Abbildungsverzeichnis . . . . .	vi
	<b>Literatur</b>	<b>viii</b>

# 1. Einleitung

## 1.1 Motivation

Kleinräumige bis großräumige Deformationen der Erdoberfläche können mithilfe spezieller Satellitenverfahren detektiert werden. Dazu wird beispielsweise die differentielle Auswertung von interferometrischen Satelliten-Radardaten (D-InSAR) eingesetzt. Da die Deformation ein langzeitliches Phänomen ist, ändert sich das Signal in einer Zeitreihe von D-InSAR-Aufnahmen nur langsam. Um diesen zeitlichen Zusammenhang zwischen einer Reihe von Interferogrammen auszunutzen, werden zunehmend ganze D-InSAR-Bildstapel ausgewertet. Ein Bildstapel beinhaltet Aufnahmen, die jeweils das gleiche Gebiet zeigen. Durch das Übereinanderlegen dieser zeitlich nacheinander aufgenommenen Bilder ergibt sich ein Bildstapel.

Jedes Bild zeigt die differentiell-interferometrische Phase, die sich in einer Folge von Auswerteschritten aus den vom Satelliten aus aufgenommenen Daten erzeugen lässt. Zuerst wird aus zwei SAR-Satellitenbildern, die den gleichen Ausschnitt der Erdoberfläche abbilden, ein Interferogramm abgeleitet. Dieses Interferogramm gibt Aufschluss über die Topographie. Als zweiter Schritt wird ein Referenz-Höhenmodell von diesem Interferogramm abgezogen. Dadurch entsteht die differentiell-interferometrische Phase  $\Phi$  mit der die Veränderung der Erde über die Zeit beschrieben werden kann. Insgesamt setzt sich diese Phase aus einer Überlagerung mehrerer Signale zusammen, die sich mit dem additiven Modell

$$\Phi = \Phi_{\text{defo}} + \Phi_{\text{atmo}} + \Phi_{\Delta\text{orbit}} + \Phi_{\Delta\text{topo}} + \Phi_{\text{noise}} \quad (1.1)$$

beschreiben lassen. Die differentiell-interferometrische Phase beinhaltet sowohl das Deformationssignal  $\Phi_{\text{defo}}$  als auch den Phasenanteil der Atmosphäre  $\Phi_{\text{atmo}}$ . Dieses Signal wird durch die Laufzeitverzögerungen des Radarsignals beim Durchqueren der Erdatmosphäre hervorgerufen. Der Orbitfehler  $\Phi_{\Delta\text{orbit}}$  stellt die Restabweichung der Korrektur des Phasenanteils der „flachen Erde“ dar und wird durch Ungenauigkeiten in den zur Korrektur verwendeten Satellitenbahndaten hervorgerufen. Der letzte systematische Anteil wird mit dem Höhenfehler  $\Phi_{\Delta\text{topo}}$  beschrieben. Dieser Anteil ist auf Ungenauigkeiten im Digitalen Höhenmodell (DHM) zurückzuführen und fließt bei der Elimination der topographischen Phase ein. Abschließend werden diese Phasenanteile durch ein zufälliges Signalausrauschen  $\Phi_{\text{noise}}$  überlagert (CASU, 2009, S. 34ff).

Im Gegensatz zur Deformation ändern sich die Atmosphäre, der Orbitfehler und das Rauschen unabhängig von Bild zu Bild. Neben diesem unterschiedlichen zeitlichen Verhalten weisen diese Signale auch ein jeweils verschiedenes räumliches Verhalten auf. Diese Charakteristika können genutzt werden, um die Signale innerhalb eines Bildstapels voneinander zu trennen.

Das Ziel dieser Bachelorarbeit besteht nun darin, die langzeitlichen Signalanteile von den hochfrequenten Anteilen (durch die Atmosphäre etc.) in jeder Aufnahme eines Bildstapels zu trennen. Dafür sollen die Signale durch eine raum-zeitliche Approximation mit Tensor-B-Splines bestimmt werden.

## 1.2 Stand der Forschung

Die D-InSAR-Technologie wird zur großflächigen Detektion von Oberflächenbewegungen eingesetzt, da sie im Vergleich zu traditionellen Techniken und in Relation zur Größe des Aufnahmegebietes kostengünstig ist (FERRETTI ET AL., 2001). Mit diesem Verfahren können Deformationen des Terrains im cm- bis mm-Bereich detektiert werden (CASU, 2009, S. 1). Generell werden als begrenzende Faktoren dieser Technik die zeitliche

und geometrische Dekorrelation sowie die atmosphärischen Inhomogenitäten genannt (FERRETTI ET AL., 2001).

Es gibt bereits verschiedene Ansätze die in Abschnitt 1.1 genannten Signale eines D-InSAR-Bildes bzw. -Bildstapels zu trennen. Beispielsweise wird in FERRETTI ET AL. (2001) ein Verfahren zur Detektion von kohärenten Pixeln dargestellt. Mit diesen über die Zeit stabilen Pixeln soll die Deformation überwacht werden. Um die Deformation aus diesen Pixeln in differentiell-interferometrischen Radardaten zu bestimmen, werden drei Schritte durchgeführt. Im ersten Schritt wird eine gemeinsame, iterative Ausgleichung durchgeführt, in der unter anderem der Höhenfehler und die Atmosphäre als lineare Größen geschätzt werden. Daraufhin werden im zweiten Schritt alle Bilder des Bildstapels um den geschätzten atmosphärischen Phasenanteil korrigiert. Im letzten Schritt kann der Höhenfehler und die Geschwindigkeit der Deformation in einer erneuten, gemeinsamen Ausgleichung pixelweise geschätzt werden.

Im Gegensatz dazu soll in dieser Arbeit ein gesamtheitlicher Ansatz zur raum-zeitlichen Signaltrennung getestet werden, sodass alle Phasenanteile gleichzeitig berücksichtigt werden. Außerdem können somit alle Signalanteile zur weiteren Auswertung verwendet werden, da sie nicht nur als Störfaktoren aus jedem Bild entfernt werden.

### 1.3 Gliederung

In Kapitel 2 dieser Arbeit wird zunächst auf die Simulationsumgebung eingegangen. Dazu werden die Eigenschaften der zu separierenden Signale, also des langzeitlichen und des bildweisen Signals sowie des zufälligen Rauschens, erläutert. Außerdem wird die Umsetzung in MATLAB zur Erzeugung der Testdaten betrachtet und die simulierten Testdaten werden dargestellt. Diese dienen zum einen als Beobachtungen für die Approximation der Signale, zum anderen bilden sie die Basis für die spätere Validierung des Approximationsmodells. Im daran anschließenden Kapitel 3 werden die zur Trennung der Signale benötigten methodischen Grundlagen erarbeitet. Dabei werden die Begriffe der Basissplines und der Tensor-B-Splines erläutert, und wie es damit möglich ist beobachtete Messdaten zu modellieren.

Zuerst wird in Kapitel 4 das lineare Ausgleichungsmodell nach Gauß-Markov dargestellt. Daran anschließend wird detailliert die Umsetzung des Approximationsmodells für das vorliegende Problem formuliert. Danach wird ein weiteres Approximationsmodell, die lineare Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen, aufgeführt. Dabei wird ebenfalls das Vorgehen zur Aufstellung des Restriktionsmodells erarbeitet. Um die ausgeglichenen Beobachtungen flächenhaft darstellen zu können, wird daran anschließend die Bestimmung von prädizierten Beobachtungen betrachtet. Aufgrund der auftretenden Probleme bei der Anwendung der Approximationsmodelle werden zuletzt diese Problematiken und entsprechende Lösungsansätze diskutiert.

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der Anwendung der Approximationsmodelle ohne und mit Restriktionen auf die simulierten Daten dargestellt und bewertet. Dazu wird jeweils die Reproduzierbarkeit des Gesamtsignals und die Güte der Trennung der Signale untersucht. Außerdem werden die beiden Ansätze verglichen und es wird auf die auftretende Problematik des Rangdefektes eingegangen.

Darüber hinaus werden zwei Ansätze zur Lösung der vorgestellten Probleme des zugrunde liegenden Approximationsmodells umgesetzt. Zum einen wird die zeitliche Auflösung der B-Splines angepasst. Dazu werden neue Simulationsdaten für einen kürzeren Beobachtungszeitraum erzeugt und die Ergebnisse evaluiert. Zum anderen wird ein Ansatz zur Umgehung des modellbedingten Rangdefektes angewendet. Dazu wird das Approximationsmodell vereinfacht und nur die Deformation als gesuchtes, auszugleichendes Signal angenommen. Abschließend enthalten die Schlussbemerkungen in Kapitel 6 sowohl ein Fazit als auch einen Ausblick.

## 2. Simulationsumgebung

Wie bereits in Abschnitt 1.1 beschrieben, besteht eine differentiell-interferometrische Phase aus verschiedenen, überlagerten Signalen. In diesem Kapitel wird näher auf die Phasenanteile eingegangen und es werden vereinfachende Annahmen für den Aufbau der Simulationsumgebung erläutert. Darauf folgend wird die Umsetzung der Simulation in MATLAB aufgezeigt.

Die Kenntnis über den Aufbau der Simulationsdaten ist für die abschließende Auswertung entscheidend. Um das Modell der Approximation der Signale validieren zu können, muss die Zusammensetzung der Input-Daten bekannt sein.

### 2.1 Erzeugung eines Bildstapels

In diesem Abschnitt werden die zugrunde liegenden Annahmen zur Erstellung der Testdaten erläutert. Bei der Erzeugung eines Bildstapels wird hauptsächlich zwischen langzeitlichen (vgl. Abschnitt 2.1.1) und bildweisen Signalen (vgl. Abschnitt 2.1.2) unterschieden. Die Phasenanteile beider Signaltypen können dabei die gleiche Größenordnung aufweisen. Das langzeitliche Signal ist der Phasenanteil der Deformation. Dagegen zählt zu den bildweisen Signalen sowohl die Atmosphäre als auch die Orbitfehler. Weiterhin wird jedes Bild von einem zufälligen Rauschen überlagert.

Generell werden einige Vereinfachungen für dieses Approximationsproblem festgelegt. Zum einen werden die Bilder des Bildstapels einem absoluten Zeitpunkt zugeordnet. Zum anderen werden einige Signale der differentiell-interferometrischen Phase als vernachlässigbar angesehen, da diese für die vorliegende Problemstellung nicht entscheidend sind. Dies trifft auf die Orbitfehler zu (vgl. Abschnitt 2.1.2). Außerdem ist die Größe des Topographierestfehlers abhängig von der Ungenauigkeit im DHM. Bei hinreichender Genauigkeit des DHM kann auch dieser Phasenanteil vernachlässigt werden.

#### 2.1.1 Langzeitliches Signal

Zum langzeitlichen Signal wird der Phasenanteil der Deformation gezählt, da dieser sich langsam über die Zeit ändert. Im Allgemeinen zeichnet sich diese Art des Signals dadurch aus, dass es eine starke Korrelation in der Zeit aufweist. Dies bedeutet, dass ein Zusammenhang zwischen aufeinanderfolgenden Bildern in einem Bildstapel existiert. Deshalb soll dieses Signal über die Zeit aus einer Reihe von Bildern eines Bildstapels geschätzt werden.

Für einen einzelnen Punkt kann die Deformation in vertikaler Richtung nach MOGHASED-AZAR ET AL. (2012) über

$$y(t_i) = a + bt_i + c \sin(2\pi t_i) + d \cos(2\pi t_i) + e \sin(4\pi t_i) + f \cos(4\pi t_i) + \sum_{j=1}^{n_g} g_j H(t_i - T_{gj}) + \nu_i \quad (2.1)$$

beschrieben werden, wobei  $t_i$  mit  $i = 1, \dots, I$  die absoluten Zeitpunkte der Bilder in Jahren sind und  $I$  die Anzahl der Bilder eines Bildstapels ist. Die Parameter  $a$  und  $b$  beschreiben die Höhe des Punktes und die lineare Änderungsrate im Bezug dazu. Die Koeffizienten  $c$  und  $d$  stehen für eine jährlich-periodische Bewegung, während  $e$  und  $f$  eine halbjährliche Periodizität festlegen. Mit den letzten zwei Termen können

weitere Offsets und zufällige Messfehler modelliert werden. Diese zwei Terme werden jedoch im Nachfolgenden vernachlässigt. Damit ergibt sich das vereinfachte Modell zu:

$$y(t_i) = a + bt_i + c \sin(2\pi t_i) + d \cos(2\pi t_i) + e \sin(4\pi t_i) + f \cos(4\pi t_i). \quad (2.2)$$

Um das Modell flächendeckend für ein Bild anwenden zu können, sind die Koeffizienten  $a$  bis  $f$  ortsabhängig zu wählen. In Abbildung 2.1 ist zu erkennen, dass durch die Festlegung der Deformation des Maximalpunktes (vgl. Gleichung (2.2)) die Deformation im gesamten Bild abhängig vom Ort ist. Je näher der Punkt am Maximalpunkt des Deformationsgebietes liegt, desto größer ist die Deformation relativ zum Anfangszeitpunkt  $t_1 = 0$ . Somit wird die Deformation über

$$y(t_i, x, y) = a(x, y) + b(x, y)t_i + c(x, y) \sin(2\pi t_i) + d(x, y) \cos(2\pi t_i) + e(x, y) \sin(4\pi t_i) + f(x, y) \cos(4\pi t_i) \quad (2.3)$$

modelliert.

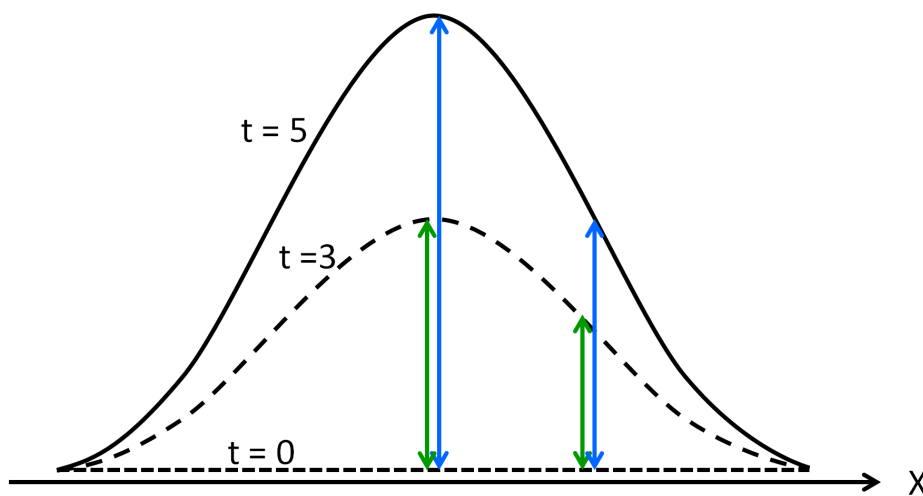


Abbildung 2.1: Simulation der ortsabhängigen Deformation

Für jedes simulierte Deformationsgebiet wird eine Funktion nach Gleichung 2.3 aufgestellt. Anschließend wird das Gesamt-Deformationssignal durch Addition der einzelnen Deformationsgebiete berechnet. Dadurch ist sichergestellt, dass sich die Deformationsgebiete unabhängig voneinander verändern können.

Außerdem ist der langzeitliche Phasenteil durch eine räumliche Korrelation charakterisiert. Dies bedeutet, dass benachbarte Pixel eines Bildes in ähnlicher Weise systematisch verfälscht vorliegen.

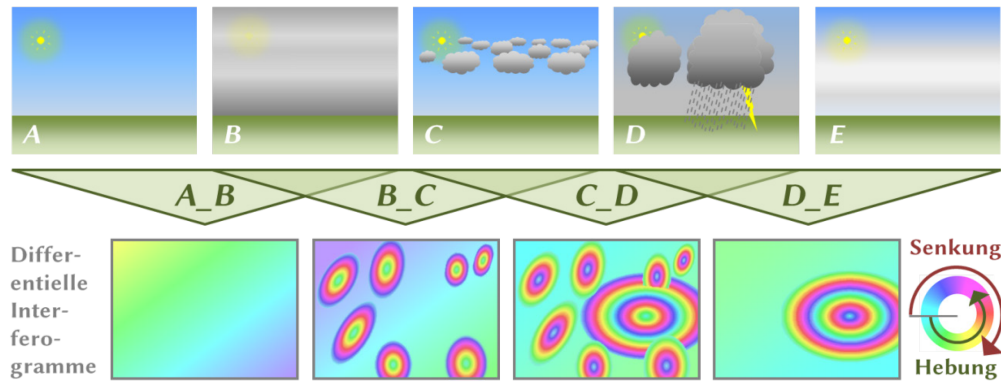
In der Simulation wird vereinfacht davon ausgegangen, dass eine reine vertikale Deformation vorliegt. Es soll im MATLAB-Programm verschiedene Einstellmöglichkeiten bezüglich Hebung bzw. Senkung und Geschwindigkeit der Deformation geben.

### 2.1.2 Bildweises Signal

Im Gegensatz zum langzeitlichen Signal ist das bildweise Signal zeitlich sehr variabel. Da das bildweise Signal keine zeitliche Korrelation aufweist, ist dieses Signal in jedem Bild unabhängig vom vorherigen und nächsten Bild. Dies trifft sowohl auf den atmosphärischen Phasenteil als auch den Orbitfehler zu. Die Atmosphäre kann, je nach Wetterlage, räumlich variabel sein. Im Gegensatz dazu sind Orbitfehler räumlich wenig variabel, da sie einen Trend darstellen.



Nach SCHÄFER (2012, Kap. 3.2) kann der Phasenanteil der Atmosphäre durch eine lineare Rampe im Zusammenhang mit räumlich korrelierten Phasenwerten mit der Größenordnung von 100 m bis 10 km beschrieben werden. In Abbildung 2.2 ist zu erkennen, wie sich dieses Modell für verschiedene Wetterlagen auswirkt. In der Abbildung ist die Auswirkung für Interferogramme aufgezeigt, wobei sich das Prinzip auf die hier gewählte Betrachtung von absoluten Zeitpunkten übertragen lässt. Weiterhin wird die Atmosphäre als nicht-gaußverteilt und richtungsabhängig charakterisiert (DING ET AL., 2008, Kap. 4.3 und Kap. 6).



**Abbildung 2.2:** Schematische Darstellung der Auswirkungen verschiedener Wetterlagen auf die Phasenverschiebungen in differentiellen Interferogrammen (SCHÄFER, 2012, S.45)

Der ebene Trend kann mit der temperatur- und druckabhängigen Schichtung der Atmosphäre, die sich am Gelände orientiert, erklärt werden (KÖHLER, 2013, Kap. 3.1). Im Allgemeinen führt der Durchgang des Signals durch die Atmosphäre zu einer Signalverzögerung. Da sich die lokale Wetterlage auf die Phase auswirkt (SCHÄFER, 2012, Kap. 3.2), kann dies als eine räumliche Korrelation der atmosphärischen Phase interpretiert werden (CASU, 2009, Kap. 2.11.6).

Der Orbitfehler weist, wie der Phasenanteil der Atmosphäre, die Form einer Phasenrampe auf (DING ET AL., 2008). Aufgrund dieser ähnlichen Systematik ist es schwierig die zwei Signale zu trennen. Unter der Annahme, dass gute Satellitenorbits vorliegen, wird davon ausgegangen, dass die Auswirkung der Orbitfehler gegenüber dem Phasenanteil der Atmosphäre hinreichend klein ist. Somit kann der Orbitfehler im Folgenden vernachlässigt werden.

Für die Umsetzung bedeutet dies, dass ein linearer, ebener Trend angenommen werden kann. In Ergänzung dazu können die räumlich-korrelierten Phasenwerte durch vereinzelte, lokale Senkungsgebiete dargestellt werden, die als Wolken interpretiert werden können. Durch die Zuordnung eines absoluten Zeitpunktes zu jedem Bild und der auftretenden Signalverzögerung durch die Atmosphäre, werden ausschließlich Senkungsgebiete betrachtet.

### 2.1.3 Zufälliges Messrauschen

Das zufällige Rauschen ist durch das Messsystem bedingt. Dieses Signal weist weder eine zeitliche noch eine räumliche Korrelation auf, d.h. dass dieser Phasenanteil in jedem Bildpunkt zufällig auftritt. Deshalb wird diese Signalgröße als zufälliger, normalverteilter Wert mit dem Erwartungswert Null zu jedem Bildpixel addiert.

## 2.2 Umsetzung in MATLAB

Im Folgenden wird die Implementierung der Simulationsumgebung in MATLAB skizziert. Diese Bilder dienen als simulierte Beobachtungen für die Approximation der Signale in einem Bildstapel. Dazu wird auf die Umsetzung der in Abschnitt 2.1 physikalisch motivierten Annahmen zu den Anteilen der differentiell-interferometrischen Phase eingegangen.

Insgesamt wird ein Bildstapel erzeugt, der sich aus mehreren Bildern zusammensetzt. Dabei kann der Beobachtungszeitraum in Jahren und die Anzahl der beobachteten Bilder am Anfang des Programms eingestellt werden. Die Bilder werden zufällig über den Beobachtungszeitraum verteilt und ihnen wird ein absoluter Zeitpunkt im entsprechenden Zeitrahmen zugewiesen. In jedem Bild des Bildstapels werden die gleichen sicheren Punkte, die auch als kohärente Punkte bezeichnet werden, ausgewählt. Nur auf diesen Pixeln beruht bei der Auswertung die Ausgleichung zur Trennung der Signale.

Außerdem kann für das Deformationssignal die Anzahl der Hebungs- und Senkungsgebiete angegeben werden. Für jedes dieser Gebiete wird sowohl die Lage des Maximalpunktes als auch die Ausdehnung zufällig zwischen gegebenen Grenzen festgelegt. Durch diese Parameter und die Höhe des maximalen Punktes ist ein Deformationsgebiet eindeutig beschrieben und kann mithilfe einer bivariaten Gauß-Glockenkurve dargestellt werden. Dies wird in MATLAB mit einer Funktion, die an „gaussele“ aus BLOUCAS-DIAS UND VALADÃO (2007) angelehnt ist, umgesetzt. Mit der editierten Version dieser Funktion ist es möglich die Deformationsgebiete an beliebigen Orten des Bildes zu platzieren.

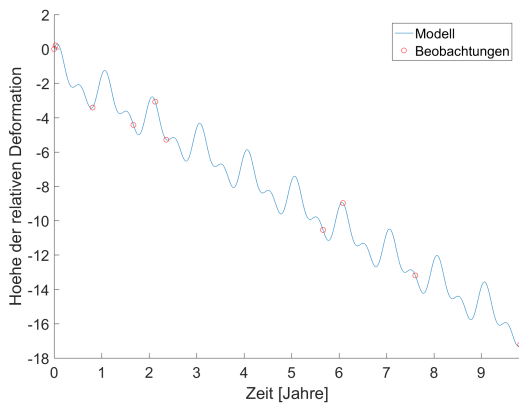
In einer ersten Umsetzung wird für die zeitliche Änderung der Deformation die Gleichung (2.3) zu Grunde gelegt, wobei die Koeffizienten  $b(x, y)$ ,  $c(x, y)$ ,  $d(x, y)$ ,  $e(x, y)$  und  $f(x, y)$  zufällig innerhalb vorgegebener Grenzen erstellt werden. Die Grenze für den Koeffizienten  $b(x, y)$  ist am größten. Weiter sind  $c(x, y)$  und  $d(x, y)$  von der Größenordnung größer als  $e(x, y)$  und  $f(x, y)$ . Unter der Annahme, dass die Deformationen als Änderung zum Anfangszeitpunkt bestimmt werden, muss die Deformation zum ersten Zeitpunkt  $t_1$  gleich Null sein. Dies kann mit Hilfe des Parameters  $a(x, y)$  über

$$y(t_1, x, y) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.4)$$

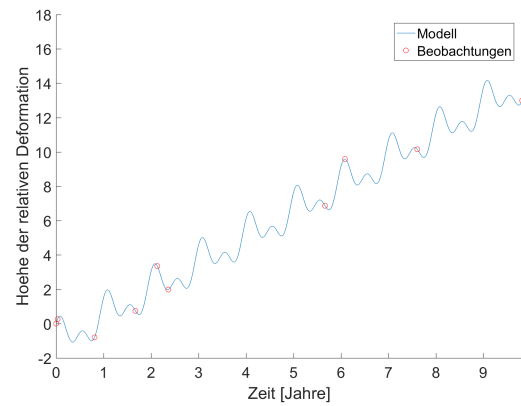
gesteuert werden. Bei der Verfeinerung des Programms können weitere Einstellmöglichkeiten z.B. für die Beschleunigung der Deformation hinzu kommen. Unabhängig von der Wahl der Deformationsrate wird die ausgewählte Funktion für jede Hebung und Senkung aufgestellt, um damit die Deformationsänderung zu steuern. Dies bedeutet, dass für jedes Deformationsgebiet ein Parametersatz angelegt wird. Die Deformationsrate, also die Höhenänderung relativ zum Anfangszeitpunkt, ist beispielhaft für zwei Deformationsgebiete in einem Zeitraum von zehn Jahren in Abbildung 2.3 dargestellt. Es sind die jährlichen und halbjährlichen Periodizitäten zu erkennen. Außerdem sind die Zeitpunkte der zehn simulierten Bilder als rote Kreise markiert.

Zu jedem absoluten Zeitpunkt eines Bildes lassen sich folglich die maximalen Höhen der einzelnen Hebungen und Senkungen bestimmen. Weiterhin kann für jedes Gebiet pro Bild, wie oben beschrieben, ein Modell erstellt werden. Durch abschließendes Addieren der Signale der verschiedenen Deformationsgebiete entsteht der Deformationsanteil der Bilder des Testbildstapels. Das Modell der Deformation ist für drei Zeitpunkte in der Abbildung 2.4 aufgezeigt. Dabei ist in Abbildung 2.4(a) eindeutig zu erkennen, dass die Deformation zum Zeitpunkt des ersten Bildes gleich Null ist. Außerdem kann die Zunahme der relativen Deformation der zwei Gebiete entnommen werden.

Zu den nun erstellten Bildern kann die Atmosphäre als zufällige Phasenrampe für jedes Bild hinzugefügt werden. Weiter kann die lokale Wetterlage, wie z.B. Wolken, berücksichtigt werden. Diese Wolken können in Form von mehreren, lokalen Senkungsgebieten mithilfe der bivariaten Gauß-Glockenkurven über die bestehenden Bilder gelegt werden. Somit ergibt sich das Modell der Atmosphäre, welches für dieselben drei



(a) Deformationsrate des ersten Berges



(b) Deformationsrate des zweiten Berges

Abbildung 2.3: Deformationsraten zweier Deformationsgebiete

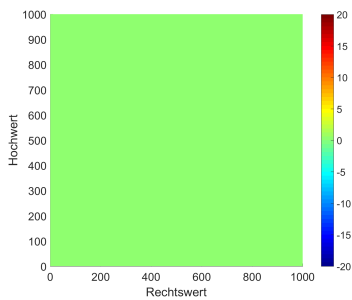
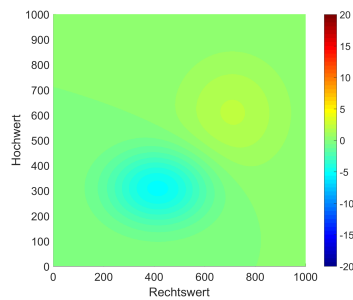
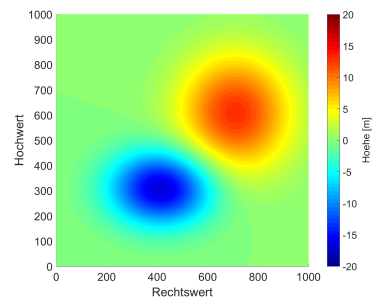
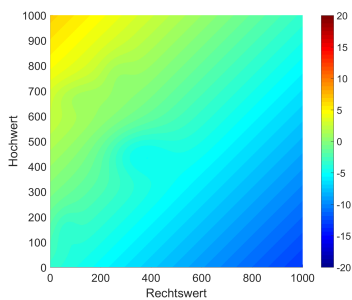
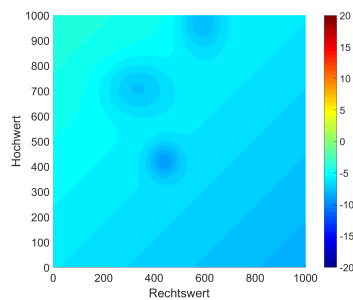
(a) Zeitpunkt des Bildes 1  
( $t = 0$  Jahre)(b) Zeitpunkt des Bildes 6  
( $t = 2.3631$  Jahre)(c) Zeitpunkt des Bildes 10  
( $t = 9.8194$  Jahre)

Abbildung 2.4: Modell der Deformation

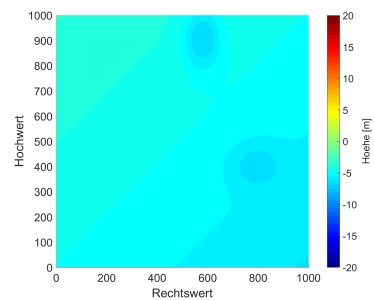
Zeitpunkte in den Abbildungen 2.5 (a) bis (c) dargestellt ist. In allen drei Abbildungen ist eine Phasenrampe, die eine zufällige Richtung aufweist, zu erkennen. Weiterhin sind die lokalen Senkungsgebiete, die beispielsweise eine Wolke repräsentieren können, abgebildet.



(a) Zeitpunkt des Bildes 1



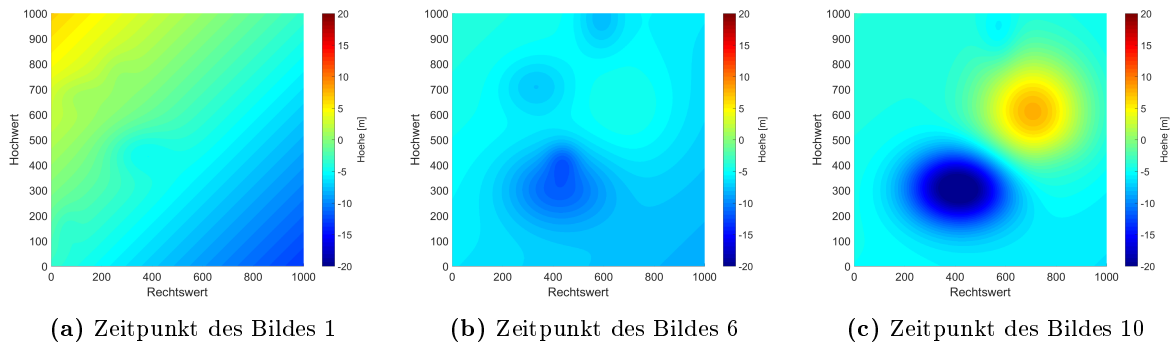
(b) Zeitpunkt des Bildes 6



(c) Zeitpunkt des Bildes 10

Abbildung 2.5: Modell der Atmosphäre

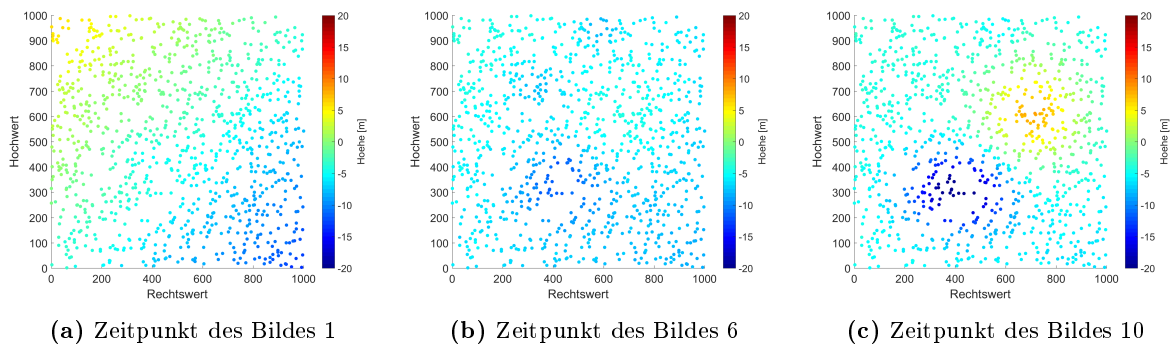
Das addierte Modell aus der simulierten Deformation und Atmosphäre ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Diese Modelle sollen in den Ergebnissen als Referenz herangezogen werden, um eine Entscheidung über die Güte der Approximation treffen zu können.



**Abbildung 2.6:** Modell der Beobachtungen als Summe der Deformation und der Atmosphäre

Um die Beobachtungen aus den Modellen in den Abbildungen 2.4 und 2.5 zu erhalten, werden über zufällige Indizes die kohärenten Pixel, die in jedem Bild die gleichen sind, erstellt.

Zuletzt wird das zufällige Rauschen berücksichtigt. Dafür werden zu jedem Pixelwert kleine, normalverteilte Zufallszahlen addiert. Damit ergeben sich die Beobachtungen, die in den Abbildungen 2.7 dargestellt sind. Diese enthalten sowohl das Signal der Deformation, als auch der Atmosphäre und das Rauschen.



**Abbildung 2.7:** Pixelweise Beobachtungen als Summe der Deformation, der Atmosphäre und des Rauschens

## 3. Methodik der Tensor-B-Splines

Wie im Kapitel 1 beschrieben, besteht das Ziel dieser Arbeit darin, die zeitlichen von den bildweisen Signalen zu trennen. Hierzu werden nun die Grundlagen zur Approximation mittels Tensor-B-Splines erarbeitet.

Es soll eine Approximation durchgeführt werden, d.h. dass die Funktion nicht exakt an die Daten angepasst wird. Bei verrauschten Daten soll die approximierende Funktion das Rauschen teilweise heraus filtern (MEISSL, 1982, Kap. D.7.1).

### 3.1 Splines

Im Allgemeinen werden Splines zu den Basisfunktionssystemen mit lokalem Träger gezählt. Dies bedeutet, dass eine Funktion aus mehreren, lokal definierten Polynomen niedrigen Grades zusammengesetzt ist. Nach FAHRMEIR ET AL. (2009, Kap. 7.1.1) beschreibt ein Polynom-Spline eine Funktion  $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad  $l \geq 0$  zu den Knoten  $a = \kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n = b$ , wenn sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt. Zum einen soll  $f(x)$   $(l-1)$ -mal stetig differenzierbar sein. Für  $l = 1$  entspricht dies der Forderung, dass  $f(x)$  stetig ist, für  $l = 0$  werden keine Glattheitsanforderung an  $f(x)$  gestellt. Zum anderen soll  $f(x)$  auf den durch die Knoten gebildeten Intervallen  $[\kappa_j, \kappa_{j+1})$  ein Polynom vom Grad  $l$  sein.

### 3.2 B-Splines

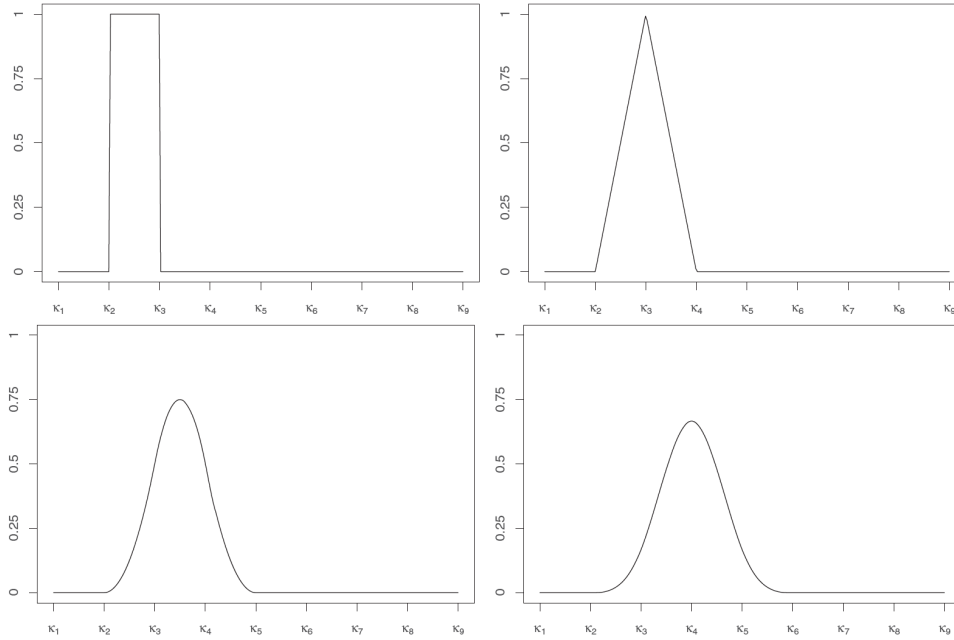
Eine spezielle Form der Splines sind sogenannte Basissplines bzw. B-Splines. Dabei wird die globale, resultierende Approximationsfunktion aus vielen Basisfunktionen zusammengesetzt, die jeweils in einem definierten Bereich ungleich Null sind. Der Vorteil dabei ist, dass die globale Funktion automatisch die Glattheitsanforderung erfüllt und keine weiteren Restriktionen oder Bedingungen notwendig sind (MEISSL, 1982, Kap. D.7.3). Außerdem weisen B-Splines gute numerische Eigenschaften auf (FAHRMEIR ET AL., 2009, S. 303).

#### 3.2.1 B-Spline-Basisfunktionen

Zunächst wird auf die Basisfunktionen der B-Splines eingegangen. Aus diesen lokalen Trägern wird die approximierende Funktion zusammengesetzt. Eine B-Spline-Basisfunktionen  $B_j^l$  wird sowohl durch die Ordnung  $l$ , als auch durch den lokalisierenden Knoten  $j$  definiert.

Nach FAHRMEIR ET AL. (2009, S. 305f) weisen B-Splines gewisse Eigenschaften auf. Wie der Name impliziert, bilden sie eine lokale Basis. Diese sind für einen bestimmten Bereich zwischen  $(l+2)$  Knoten ungleich Null. Bei gleichabständigen Knoten weisen die Basisfunktionen die gleiche Gestalt auf und sind nur entlang der x-Achse verschoben. Daraus folgt, dass an jeder beliebigen Stelle im Definitionsbereich  $(l+1)$  Basisfunktionen Einfluss haben. Darüber hinaus gilt die Zerlegung der Einheit. Dies bedeutet, dass die Summe aller positiven Basisfunktionen an einer Stelle gleich eins ist. Außerdem überschneidet sich jede Basisfunktion mit  $2l$  benachbarten Basisfunktionen.

In Abbildung 3.1 sind die Basisfunktionen für die Ordnungen  $l = 0, \dots, 3$  dargestellt. Es handelt sich dabei um konstante, lineare, quadratische und kubische B-Spline-Basisfunktionen. Es ist zu erkennen, dass die Verwendung von stückweisen Basisfunktionen mit der Ordnung  $l = 0$  zu konstanten Werten und einer nicht



**Abbildung 3.1:** Einzelne B-Spline Basisfunktionen der Ordnungen  $l = 0, 1, 2, 3$  zu gleichabständigen Knoten (FAHRMEIR ET AL., 2009, S. 303).

stetigen Funktion führt. Eine Funktion aus stückweisen Polynomen der Ordnung  $l = 1$  setzt sich aus Geradenstücken zusammen und bildet somit eine stetige Funktion. Sie wird auch „Hütchenfunktion“ genannt. Bei einer Zusammensetzung aus B-Spline-Basisfunktionen höherer Ordnung entsteht eine stetig differenzierbare Funktion. In den Graphen der Abbildung 3.1 ist jeweils der Ort der B-Spline-Basisfunktion durch den Knoten  $\kappa_2$  festgelegt. Generell kann die Basisfunktion mit Hilfe einer Skalentransformation

$$\hat{x} = \frac{x - \kappa_{j + \frac{l+1}{2}}}{\Delta\kappa} \quad (3.1)$$

auf jeden Knoten  $\kappa_j$  im Definitionsbereich verschoben werden, wobei mit  $\Delta\kappa$  der Knotenabstand beschrieben wird (MEISSL, 1982, Kap. D.7.3). Somit ist es möglich den zu approximierenden Bereich mit lokal definierten Basisfunktionen zu beschreiben. Diese Eigenschaft ist außerdem eine praktische Vereinfachung für den nachfolgenden funktionalen Zusammenhang im Gauß-Markov-Modell.

Die Einträge eines beliebigen kubischen B-Splines  $B_j^3$  können durch die Auswertung der skalentransformierten und somit lokalen Basisfunktionen berechnet werden:

$$B_j^3(x) = B_{-2}^3(\hat{x}). \quad (3.2)$$

Dabei ist die lokale Basisfunktion durch den Knoten  $j = -2$  definiert. Nach MEISSL (1982, Kap. D.7.3) lautet die lokale Darstellung einer kubischen B-Spline-Basisfunktion  $B_{-2}^3(\hat{x})$ :

$$B_{-2}^3(\hat{x}) = \begin{cases} 0 & \hat{x} < -2, \\ \frac{1}{6}(\hat{x} + 2)^3 & -2 \leq \hat{x} < -1, \\ \frac{1}{6}(\hat{x} + 2)^3 - \frac{4}{6}(\hat{x} + 1)^3 & -1 \leq \hat{x} < 0, \\ \frac{1}{6}(-\hat{x} + 2)^3 - \frac{4}{6}(-\hat{x} + 1)^3 & 0 \leq \hat{x} < 1, \\ \frac{1}{6}(-\hat{x} + 2)^3 & 1 \leq \hat{x} < 2, \\ 0 & 2 \leq \hat{x}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Im Gegensatz zur Angabe der geschlossenen Funktion für B-Splines mit niedriger Ordnung können Basissplines auch rekursiv zusammengesetzt werden. Dies wird vor allem für B-Splines höherer Ordnung verwendet. So lassen sich die Basissplines mit Ordnung  $l$  am Knoten  $j$  wie folgt rekursiv definieren (FAHRMEIR ET AL., 2009, S. 304f):

$$B_j^l(x) = \frac{x - \kappa_j}{\kappa_{j+l} - \kappa_j} B_j^{l-1}(x) + \frac{\kappa_{j+l+1} - x}{\kappa_{j+l+1} - \kappa_{j+1}} B_{j+1}^{l-1}(x). \quad (3.4)$$

Dabei werden die B-Splines höherer Ordnung mit den Basisfunktionen niedrigerer Ordnung ausgedrückt. Daraus folgt, dass als Initialisierung ein B-Spline der Ordnung 0

$$B_j^0(x) = \begin{cases} 1 & \kappa_j \leq x < \kappa_{j+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.5)$$

definiert werden muss. Diese Darstellung gilt sowohl für äquidistante als auch für ungleichabständige Knotenmengen. In diesem Fall sollen jedoch erstmal nur gleichabständige Knoten betrachtet werden.

Das Zusammensetzen von B-Spline-Basisfunktionen niedriger Ordnung zu Basisfunktionen höherer Ordnung kann auch mittels Faltungen umgesetzt werden. Dabei kann ein Basisspline der Ordnung  $l$  aus B-Splines der Ordnungen  $(l-1)$  und 0 über

$$B_j^l(x) = B_j^{l-1}(x) * B_j^0(x) = B_j^{l-2}(x) * B_j^1(x) \quad (3.6)$$

erzeugt werden.

### 3.2.2 Funktion aus B-Splines

Die oben beschriebenen Basisfunktionen werden über alle  $n$  Knoten  $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n$  im Definitionsbereich per Linearkombination

$$h(x) = \sum_{j=-s}^{n-s-1} a_j B_j^l(x) \quad (3.7)$$

zusammengesetzt (MEISSL, 1982, Kap. D.7.3). Dadurch verlieren sie die Eigenschaft der globalen Glattheitsanforderung nicht. In diesem Zusammenhang stellt  $B_j^l$  am Knoten  $\kappa_j$  die B-Spline-Basisfunktion der Ordnung  $l$  dar. Diese Ordnung bleibt über den gesamten Definitionsbereich unverändert. Die Koeffizienten  $a_j$  werden in einer Ausgleichung der kleinsten Quadrate geschätzt und sind für die Skalierung der einzelnen Basisfunktionen verantwortlich. Der Index  $s = \frac{l-1}{2}$  ist von der maximalen Ordnung  $l$  abhängig, damit die Anzahl der Basissplines in Abhängigkeit von der Ordnung festgelegt werden kann. Dadurch werden auch für die Randknoten jeweils  $l$  Basisfunktionen angesetzt. Da die Basisfunktionen nur an ganzzahligen Knoten angesetzt werden können, werden im Folgenden nur B-Splines ungerader Ordnung betrachtet.

Aus Abbildung 3.2 kann entnommen werden, dass eine Linearkombination aus kubischen B-Splines einen linearen Trend enthält, da eine Gerade beschrieben werden kann. Dies bedeutet, dass mit Basissplines der Ordnung  $l$  auch Funktionen niedrigerer Ordnung modelliert werden können.

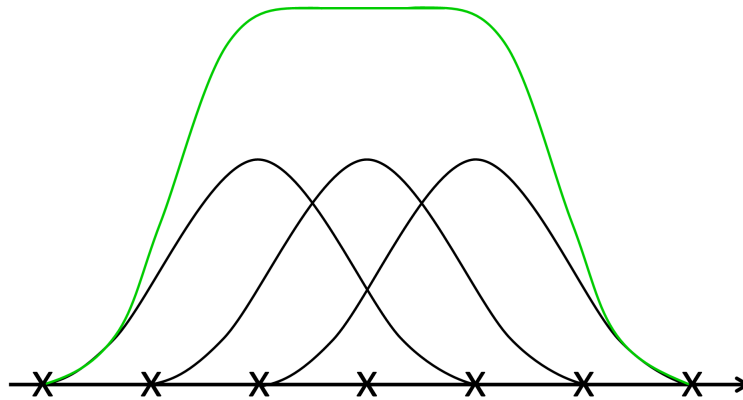


Abbildung 3.2: Linearer Anteil bei der Kombinationen von kubischen B-Splines

In Abbildung 3.3(a) werden gleichabständige Basissplines zur Approximation der Punkte angesetzt. Im Bild 3.3(b) sind die Basisfunktionen mit den ausgeglichenen Skalierungsfaktoren dargestellt, mit denen die Höhe jedes Basissplines gesteuert wird. Es wird deutlich, dass durch die Erstellung einer Linearkombination aus den einzelnen B-Spline-Basisfunktionen (vgl. Abbildung 3.3(c)) eine geeignete Repräsentation der Messdaten erzeugt werden kann.

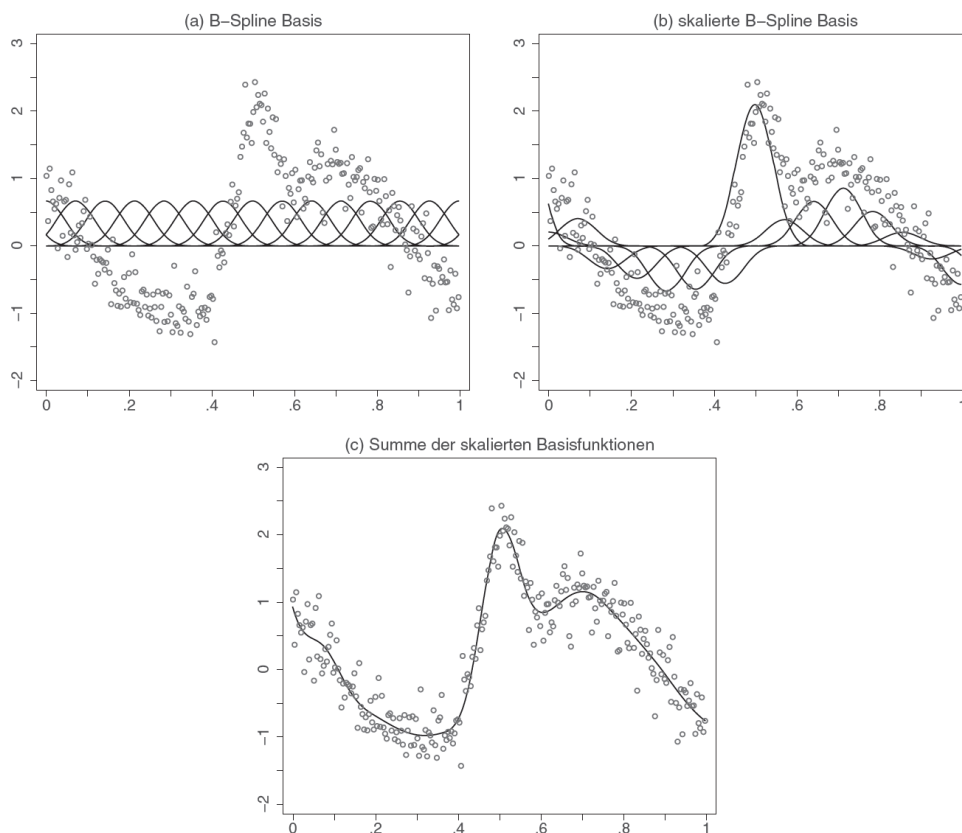


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung der Schätzung eines B-Splines (FAHRMEIR ET AL., 2009, S. 307).



### 3.3 Tensor-B-Splines

Die mehrdimensionale Approximation mit Basissplines führt zu einer Komplexitätssteigerung. Es gibt verschiedene Ansätze zur Reduktion der Komplexität. In diesem Abschnitt wird der Einsatz von Tensor-B-Splines bzw. separierbaren Funktionen betrachtet. Dabei wird ausgenutzt, dass sich die B-Splines höherer Ordnung aus Basissplines niedriger Ordnung kombinieren lassen (MEISSL, 1982, Kap. D.7.3). Somit ist das Ziel, die mehrdimensionalen Basisfunktion durch niederdimensionale, separierbare Funktionen darzustellen. Dazu wird ein höher dimensionaler Spline in mehrere eindimensionale Splines aufgeteilt. So können für verschiedene Richtungen unterschiedliche Ordnungen angesetzt werden. Zum Beispiel kann ein zweidimensionaler, flächenhafter B-Spline in zwei eindimensionale Splines verschiedener Ordnung in  $x$ - und  $y$ -Richtungen mit

$$B_{jk}^{l,m}(x,y) = B_j^l(x)B_k^m(y) \quad (3.8)$$

separiert werden (MEISSL, 1982, Kap. D.7.3). Die Knotenmengen in  $x$ - und  $y$ -Richtung seien mit  $\{\kappa_j\}$  mit  $j = 1, \dots, n$  und  $\{\lambda_k\}$  mit  $k = 1, \dots, q$  gegeben. Für die verschiedenen Richtungen können eine unterschiedliche Ordnung und Anzahl von Basissplines angesetzt werden. Dies kann interessant sein, wenn die Ausdehnung bzw. die Regelmäßigkeit der Daten verschieden ist oder die Variation der Werte unterschiedlich groß ist. Durch das Verschieben der Basisfunktion, kann nach MEISSL (1982, Kap. D.7.3) wiederum der gesamte Definitionsbereich abgedeckt werden:

$$B_{jk}(x,y) = B(x-j,y-k) = B(x-j)B(y-k) \quad (3.9)$$

Resultierend daraus lässt sich die Approximation

$$h(x,y) = \sum_{j=-s}^{(n-s-1)} \sum_{k=-p}^{(n-p-1)} a_{jk} B_j^l(x) B_k^m(y). \quad (3.10)$$

schätzen (MEISSL, 1982, Kap. D.7.3). Dabei stellt  $a_{ij}$  einen Eintrag der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}_{ij}$  dar und  $s = \frac{l-1}{2}$  sowie  $p = \frac{m-1}{2}$  werden durch die maximalen Ordnungen  $l$  bzw.  $m$  festgelegt.

# 4. Raum-zeitliches Approximationsmodell

In diesem Kapitel wird die Approximation der Signale, die in den Beobachtungen enthalten sind, mittels Tensor-B-Splines dargestellt. Diese Signale, die in Kapitel 2.1 beschrieben sind, werden im Folgenden als Atmosphären- und Deformationssignal bezeichnet, wobei die relative Deformation zum Anfangszeitpunkt bestimmt wird.

## 4.1 Lineare Ausgleichung nach Gauß-Markov

### 4.1.1 Lineares Ausgleichungsmodell nach Gauß-Markov

Bei einer Ausgleichung sind die Beobachtungen  $\ell$  als Stichprobe aus einer Grundmenge der Werte des Wahrscheinlichkeitsraumes gegeben. Gesucht sind die unbekannt, festen Parameter  $\mathbf{x}$ . Der Zusammenhang zwischen dem Beobachtungs- und dem Parametervektor kann über die Funktion

$$\ell + \mathbf{v} = f(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

beschrieben werden, die sich aus Linearkombinationen von gegebenen Koeffizienten und Parametern zusammensetzt. Da die Anzahl der Beobachtungen größer als die Anzahl der Unbekannten ist, liegt eine Überbestimmung vor und somit muss eine Ausgleichung durchgeführt werden. Nach KOCH (1997, Kap. 3) kann das funktionale Modell der Ausgleichung nach Gauß-Markov über

$$\ell + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4.2)$$

mit der Designmatrix  $\mathbf{A}$ , die die Koeffizienten der Funktion  $f(\mathbf{x})$  enthält, beschrieben werden. Im Zusammenhang damit steht das stochastischen Modell

$$\Sigma\{\mathcal{L}\} := \Sigma, \quad (4.3)$$

wobei  $\Sigma\{\mathcal{L}\}$  die positiv definite Kovarianzmatrix der Beobachtungen ist. Die Ausgleichung der Parameter erfolgt nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dabei wird die Quadratsumme der Verbesserungen

$$\mathbf{v}^T \Sigma^{-1} \mathbf{v} \quad (4.4)$$

minimiert. Die Verbesserungen

$$\mathbf{v} = \tilde{\ell} - \ell, \quad (4.5)$$

beschreiben die Abweichungen der Beobachtungen von den Schätzwerten der Beobachtungen  $\tilde{\ell}$ . Nach dem Aufstellen der Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \ell \quad (4.6)$$

kann die Berechnung der Schätzwerte der Parameter über

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \ell \quad (4.7)$$

als Funktion der Beobachtungen und mittels der Inversen der Normalgleichungsmatrix ( $\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A}$ ) durchgeführt werden. Die ausgeglichenen Beobachtungen können mit den ausgeglichenen Parametern über

$$\tilde{\boldsymbol{\ell}} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} \quad (4.8)$$

bestimmt werden.

### 4.1.2 Aufstellen des Modells zur Approximation

Im Folgenden wird die Umsetzung des in Abschnitt 4.1.1 dargestellten Ausgleichungsmodells nach Gauß-Markov für die vorliegende Problemstellung beschrieben. Dazu werden die einzelnen Größen und deren Struktur detailliert aufgezeigt.

#### Beobachtungen

Die Beobachtungen  $\boldsymbol{\ell}$  stellen die Funktionswerte der kohärenten Pixel in jedem Bild dar. Diese sind mit dem Ort im Bild und dem Zeitstempel des zugehörigen Bildes verknüpft. Dies bedeutet für eine einzelne Beobachtung  $\ell_{ijk}$ , dass sie von je einer Stützstelle in der Zeit  $i$ , in x-Richtung  $j$  und in y-Richtung  $k$  abhängig ist. Die Beobachtungen sind bildweise untereinander angeordnet und müssen entsprechend den passenden Stützstellen zugeordnet werden. Dadurch ergibt sich für den Beobachtungsvektor

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{bmatrix} \ell\{1\} \\ \ell\{2\} \\ \vdots \\ \ell\{I\} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

eine Struktur mit den Beobachtungsblöcken  $\ell\{i\}$  pro Bild  $i$ , wobei  $I$  die Anzahl der Bilder darstellt. Die Struktur jedes Beobachtungsblocks orientiert sich dabei an den Stützstellen in x- und y-Richtung. Falls jeder Pixel eines Bildes eine Beobachtung enthielte, so ist die Struktur der Stützstellen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\{i\} &= \left[ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ J \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ J \right]^T \quad \text{und} \\ \mathbf{y}\{i\} &= \left[ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ \dots \ K \right]^T \end{aligned} \quad (4.10)$$

mit der Anzahl  $J$  der Pixel in x- und  $K$  in y-Richtung definiert. Somit ist die Reihenfolge der Beobachtungen über

$$\ell\{i\} = \left[ \ell_{i \ 1 \ 1} \ \ell_{i \ 2 \ 1} \ \ell_{i \ 3 \ 1} \ \dots \ \ell_{i \ J \ 1} \ \ell_{i \ 1 \ 2} \ \ell_{i \ 2 \ 2} \ \dots \ \ell_{i \ J-1 \ K} \ \ell_{i \ J \ K} \right]^T \quad (4.11)$$

festgelegt. Da im Beobachtungsvektor nicht alle Pixel jedes Bildes enthalten sind, werden nur die Stützstellen zu den gegebenen, unregelmäßigen, kohärenten Pixeln aufgestellt. Da diese stabilen Pixel in jedem Bild gleich sind, sind die Stützstellen  $\mathbf{x}\{i\}$  und  $\mathbf{y}\{i\}$  ebenfalls identisch für jedes Bild. Die Einträge der Stützstellenvektoren werden als bekannt angenommen.

Es wird angenommen, dass die Beobachtungen gleich genau und unkorreliert sind. Dies bedeutet, dass die Kovarianzmatrix der Beobachtungen

$$\boldsymbol{\Sigma}\{\mathcal{L}\} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{1} \quad (4.12)$$

eine Diagonalmatrix darstellt und durch den a priori Varianzfaktor  $\sigma_0^2$  als Einheitsmatrix umgeschrieben werden kann. Somit kann  $\Sigma\{\mathcal{L}\}$  und das stochastische Modell im Folgenden vernachlässigt werden.

## Funktionaler Zusammenhang

Im Allgemeinen setzt sich das beobachtete Signal aus dem Deformations- und dem Atmosphärensignal zusammen. So lässt sich der funktionale Zusammenhang mit

$$\ell_{ijk} + v_{ijk} = f(t_i, x_j, y_k) + \sum_{i=1}^I g^{(i)}(x_j, y_k) \quad (4.13)$$

ansetzen. Weiter wird das Deformationssignal über

$$f(t, x, y) = \sum_{i=-1}^{(I_{\text{Defo}}-2)} \sum_{j=-1}^{(J_{\text{Defo}}-2)} \sum_{k=-1}^{(K_{\text{Defo}}-2)} b_{ijk} B_i^3(t) B_j^3(x) B_k^3(y) \quad (4.14)$$

und das Atmosphärensignal über

$$g^{(i)}(x, y) = \sum_{j=-1}^{(J_{\text{Atmo}}-2)} \sum_{k=-1}^{(K_{\text{Atmo}}-2)} a_{ijk}^{(i)} B_j^3(x) B_k^3(y) \quad (4.15)$$

beschrieben. Für alle 1D-Basisplines in dieser Approximation werden die Ordnungen auf drei festgelegt, d.h. es werden kubische B-Splines angesetzt. Das Rauschen soll mit den Verbesserungen  $v$  aufgefangen werden.

## Knotenmenge

Durch die Festsetzung der Ordnung lassen sich die zu durchlaufenden Basisplines nach Gleichung (3.10) über die Anzahl der angesetzten Knoten

$$\left[ I_{\text{Defo}} \quad J_{\text{Defo}} \quad K_{\text{Defo}} \quad J_{\text{Atmo}} \quad K_{\text{Atmo}} \right] \quad (4.16)$$

in der jeweiligen Richtung definieren. Um die Beobachtungen am Rand sinnvoll approximieren zu können, wird die Knotenmenge erweitert. Dazu wird das bestehende Knotennetz, welches in Abbildung 4.1 in schwarz dargestellt ist, um die blauen Knoten außerhalb des Bildes ergänzt. Im Abbildung 4.1 werden zwei zusätzliche Knoten in jeder Richtung und auf jeder Seite des Bildes hinzugefügt, um kubische Splines aufstellen zu können. Um das grün umrahmte Bild in Abbildung 4.1 approximieren zu können werden die Anzahl der angesetzten Knoten in x- und y-Richtung auf drei festgelegt.

Dadurch, dass kubische B-Splines angesetzt werden, ergibt sich die Knotenmenge für die Stützstellen der B-Splines in jeder Richtung zu

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\theta}_{\text{Defo}}\} &= \left[ -1 \quad 0 \quad \cdots \quad I_{\text{Defo}} - 2 \right]^T, \\ \{\boldsymbol{\kappa}_{\text{Defo}}\} &= \left[ -1 \quad 0 \quad \cdots \quad J_{\text{Defo}} - 2 \right]^T, \\ \{\boldsymbol{\lambda}_{\text{Defo}}\} &= \left[ -1 \quad 0 \quad \cdots \quad K_{\text{Defo}} - 2 \right]^T, \\ \{\boldsymbol{\kappa}_{\text{Atmo}}\} &= \left[ -1 \quad 0 \quad \cdots \quad J_{\text{Atmo}} - 2 \right]^T \text{ und} \\ \{\boldsymbol{\lambda}_{\text{Atmo}}\} &= \left[ -1 \quad 0 \quad \cdots \quad K_{\text{Atmo}} - 2 \right]^T \end{aligned} \quad (4.17)$$

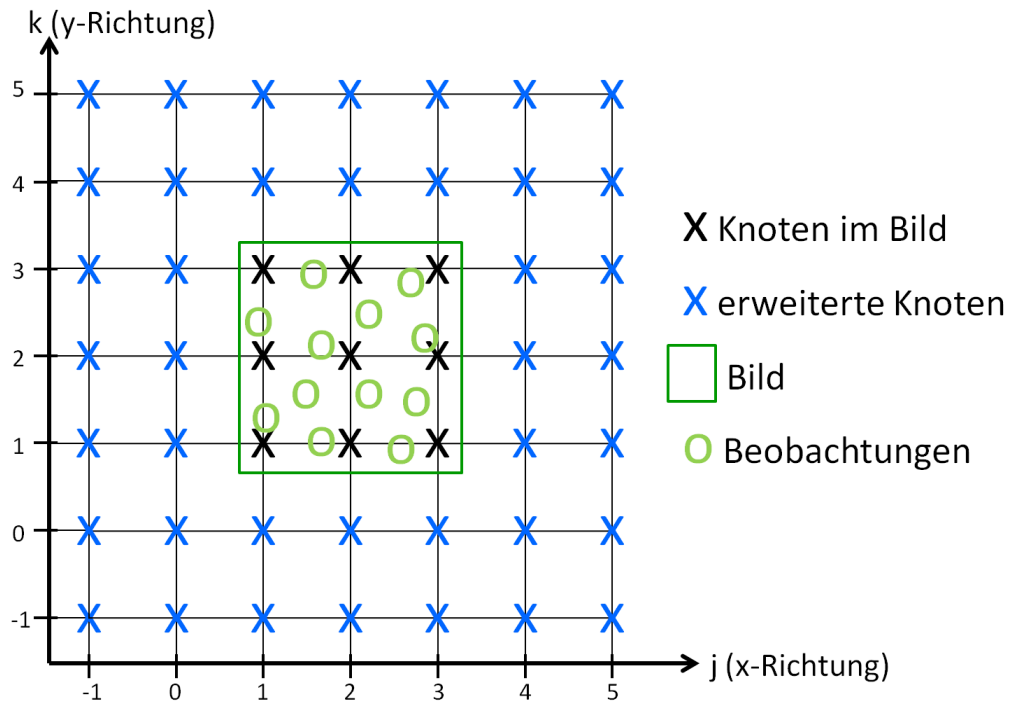


Abbildung 4.1: Erweiterte Knotenmenge

in Abhängigkeit von der Knotenanzahl nach der Gleichung (4.16). Für jede Richtung werden Basisfunktionen in 1D, also separierbare Funktionen, wie in Abbildung 4.2 dargestellt, angesetzt und ausgewertet.

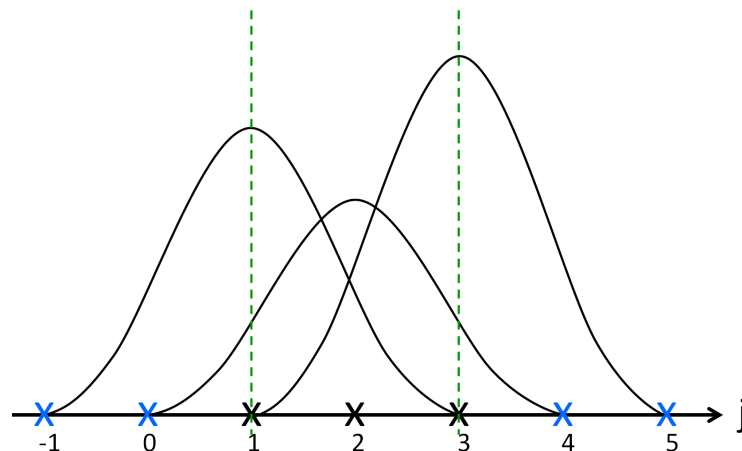
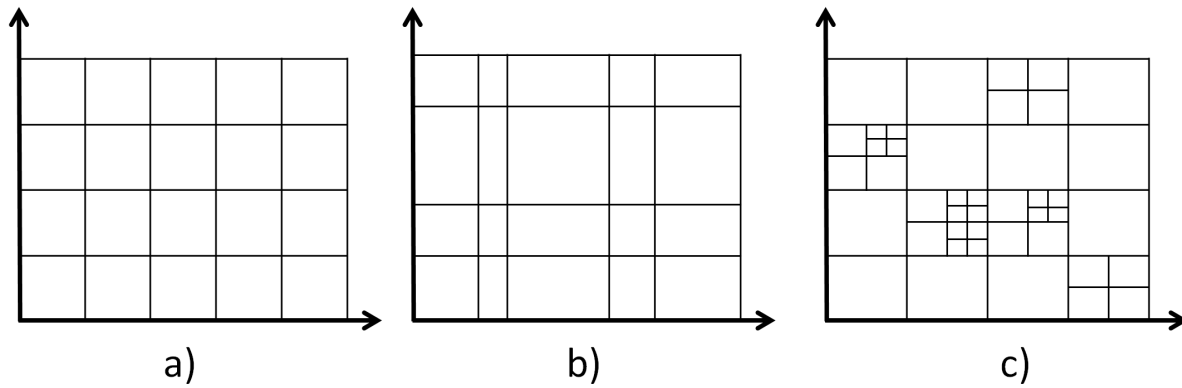


Abbildung 4.2: Ansetzen der B-Splines an erweiterter Knotenmenge

## Gitter

Zur Approximation der Signale können verschiedene Gitter angesetzt werden. Einerseits können gleichmäßige Gitter in x- und y-Richtung angesetzt werden (vgl. Abbildung 4.3 a)). Andererseits können regelmäßige Gitterstrukturen mit ungleichmäßigen Abständen verwendet werden, die jeweils unterschiedliche Abstände in x- und y-Richtung aufweisen können (vgl. Abbildung 4.3 b)). Diese zwei Gittertypen werden verwendet, wenn gleichmäßig verteilte Daten vorliegen. Der Vorteil ist, dass sie effizient zu programmieren sind.

Daneben werden lokal verdichtete Gitter (vgl. Abbildung 4.3 c)) genutzt. Diese finden Verwendung bei ungleichmäßig verteilten Daten und bei großen Datenlücken. Dadurch, dass die Gitterweite lokal verkleinert



**Abbildung 4.3:** Darstellung verschiedener Gittertypen bei der Approximation mit B-Splines:  
 a) regelmäßig in x-/y-Richtung, b) unregelmäßiges Gitter jeweils in x-/y-Richtung, c) lokal verdichtetes Gitter

werden kann, kann eine datenadaptive Approximation umgesetzt werden. Dieser Ansatz wird hier allerdings nicht weiter betrachtet. In einer weiteren Arbeit könnte untersucht werden, ob es sinnvoll ist diesen Ansatz für die Approximation des atmosphärischen Signals zu verwenden. Da die Atmosphäre lokal sehr stark variieren kann, könnte somit eine Änderung der Atmosphäre durch ein verdichtetes Gitter besser approximiert werden.

Bei einer Approximation mittels B-Splines können sowohl der Typ a) als auch b) mithilfe von rekursiven De Boor-Splines (vgl. Gleichung (3.4)) repräsentiert werden und finden somit in dieser Arbeit Verwendung zur Umsetzung der Approximation.

Als Voraussetzung dafür gilt, dass die Daten zufällig über die beobachtete Fläche verteilt sind, damit keine Datenlücken entstehen. Dies ist entscheidend, damit beim Ansetzen der Approximation jedes Raster Beobachtungen enthält und somit die Parameter geschätzt werden können. Dies bedeutet, dass der Fall vernachlässigt werden kann, in dem keine Daten für ein Deformationsgebiet vorliegen und somit keine Aussage für die Deformation getroffen werden kann.

## Designmatrix $\mathbf{A}$

Im Anschluss an die Erweiterung der Knoten, die mit Hilfe der Gittertypen a) und b) umgesetzt werden kann (vgl. Abbildung 4.3), und der Definition des funktionalen Modells (vgl. Gleichungen (4.13) bis (4.15)) wird die Designmatrix  $\mathbf{A}$  erstellt. Diese beschreibt den Zusammenhang zwischen den Beobachtungen und den Parametern und welche Beobachtungen speziell Einfluss auf welche Parameter haben.

Für die Approximation mit B-Splines bedeutet dies, dass die Designmatrix die Kombination von Basissplines der Zeit und der x- und y-Richtung enthält. Die Zuordnung der Beobachtungen zu den beeinflussten B-Splines kann über zwei Arten erfolgen, die in Abschnitt 3.2 beschrieben sind. Die Zuordnung mithilfe der Verschiebung durch Skalentransformation ist nur für ein gleichmäßiges Gitter (vgl. Abbildung 4.3 a)) geeignet. Um eine flexible Gestaltung des Gitters gewährleisten zu können, werden rekursive De Boor-Splines verwendet.

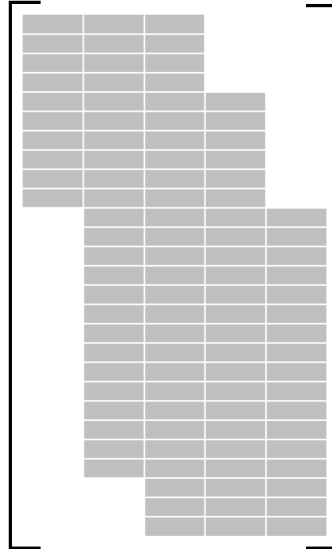
Zuerst wird für jede Richtung eine Designmatrix mit 1D-Basisplines erstellt. Dabei wird an alle erweiterten Knoten, auf die in der Summe in der Gleichung (4.14) bzw. (4.15) zugegriffen wird, ein B-Spline angesetzt. Für kubische Splines mit fünf Knoten in x-Richtung ergibt sich beispielsweise

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} B_{-1}^3(x_1) & B_0^3(x_1) & B_1^3(x_1) & B_2^3(x_1) & B_3^3(x_1) \\ B_{-1}^3(x_2) & B_0^3(x_2) & B_1^3(x_2) & B_2^3(x_2) & B_3^3(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{-1}^3(x_n) & B_0^3(x_n) & B_1^3(x_n) & B_2^3(x_n) & B_3^3(x_n) \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

wobei  $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  die Stützstellen der Beobachtungen und  $n$  die Anzahl der Beobachtungen pro Bild sind. Allgemein lassen sich diese Designmatrizen für jede Richtung über

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{Defo},t} &= \left[ B_{-1}^3(\mathbf{t}) \ B_0^3(\mathbf{t}) \ B_1^3(\mathbf{t}) \ B_2^3(\mathbf{t}) \ \dots \ B_{I_{\text{Defo}}-3}^3(\mathbf{t}) \ B_{I_{\text{Defo}}-2}^3(\mathbf{t}) \right], \\ \mathbf{A}_{\text{Defo},x} &= \left[ B_{-1}^3(\mathbf{x}\{i\}) \ B_0^3(\mathbf{x}\{i\}) \ B_1^3(\mathbf{x}\{i\}) \ B_2^3(\mathbf{x}\{i\}) \ \dots \ B_{J_{\text{Defo}}-3}^3(\mathbf{x}\{i\}) \ B_{J_{\text{Defo}}-2}^3(\mathbf{x}\{i\}) \right], \\ \mathbf{A}_{\text{Defo},y} &= \left[ B_{-1}^3(\mathbf{y}\{i\}) \ B_0^3(\mathbf{y}\{i\}) \ B_1^3(\mathbf{y}\{i\}) \ B_2^3(\mathbf{y}\{i\}) \ \dots \ B_{K_{\text{Defo}}-3}^3(\mathbf{y}\{i\}) \ B_{K_{\text{Defo}}-2}^3(\mathbf{y}\{i\}) \right], \\ \mathbf{A}_{\text{Atmo},x} &= \left[ B_{-1}^3(\mathbf{x}\{i\}) \ B_0^3(\mathbf{x}\{i\}) \ B_1^3(\mathbf{x}\{i\}) \ B_2^3(\mathbf{x}\{i\}) \ \dots \ B_{J_{\text{Atmo}}-3}^3(\mathbf{x}\{i\}) \ B_{J_{\text{Atmo}}-2}^3(\mathbf{x}\{i\}) \right] \text{ und} \\ \mathbf{A}_{\text{Atmo},y} &= \left[ B_{-1}^3(\mathbf{y}\{i\}) \ B_0^3(\mathbf{y}\{i\}) \ B_1^3(\mathbf{y}\{i\}) \ B_2^3(\mathbf{y}\{i\}) \ \dots \ B_{K_{\text{Atmo}}-3}^3(\mathbf{y}\{i\}) \ B_{K_{\text{Atmo}}-2}^3(\mathbf{y}\{i\}) \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

definieren. Dabei stellt  $\mathbf{t}$  die Stützstellen in der Zeit dar, die den absoluten Zeitpunkten der Bildaufnahmen entsprechen. Da die Stützstellen in x- und y-Richtung für alle Bilder identisch sind, bezeichnen  $\mathbf{x}\{i\}$  und  $\mathbf{y}\{i\}$  die örtlichen Stützstellen für ein beliebiges Bild. Bei Berücksichtigung der Struktur der Stützstellen in x- und y-Richtung nach Gleichung (4.10) ergibt sich in den Designmatrizen der y-Richtung  $\mathbf{A}_{\text{Defo},y}$  und  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},y}$  eine klare Struktur aufgrund der Durchlauf-Reihenfolge. Diese Struktur ist in Abbildung 4.4 dargestellt, wobei



**Abbildung 4.4:** Struktur der 1D-Designmatrizen der y-Richtung  $\mathbf{A}_{\text{Defo},y}$  und  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},y}$

fünf Basisplines angesetzt sind. Die grauen Kästchen enthalten Einträge durch Basisplines, wohingegen die weißen Kästchen Null-Einträge darstellen, da die entsprechenden Beobachtungen keinen Einfluss auf den Basisspline der Spalte haben und somit der Basisspline für die gegebene Stützstelle gleich Null ist. Für die Zeit ergibt sich die gleiche Struktur, wenn die Bilder in zeitlicher Reihenfolge der Aufnahmezeitpunkte

geordnet sind. Für die Designmatrizen in x-Richtung gibt es diese Struktur nicht, da diese Stützstellen bei festgehaltener y-Stützstelle jedes Mal durchlaufen werden. Somit kann nur festgestellt werden, dass in jeder Zeile drei bis vier Einträge sind, je nach dem wie viele überlappende B-Splines durch die Beobachtung beeinflusst sind.

Aus den Designmatrizen der einzelnen Richtungen wird im nächsten Schritt eine Designmatrix für das gesamte Approximationsproblem aufgestellt. Dazu wird zunächst ein Atmosphären- und ein Deformationsanteil bestimmt.

Zur Aufstellung des atmosphärischen Anteils wird eine flächenhafte B-Spline-Kombination

$$\mathbf{A}_{\text{Atmo},xy} = \left[ \mathbf{A}_{\text{Atmo},y}(:, 1) \circ \mathbf{A}_{\text{Atmo},x}, \dots, \mathbf{A}_{\text{Atmo},y}(:, K_{\text{Atmo}}) \circ \mathbf{A}_{\text{Atmo},x} \right] \quad (4.20)$$

aus den 1D-Designmatrizen  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},x}$  und  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},y}$  (vgl. Gleichung (4.19)) erstellt. Dabei steht  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},y}(:, k)$  für die  $k$ -te Spalte von  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},y}$  und das Symbol  $\circ$  beschreibt eine elementweise Multiplikation der Spalte  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},y}(:, k)$  mit allen Spalten aus  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},x}$ . Da die Stützstellen in x- und y-Richtung für die Beobachtungen unregelmäßig verteilt sind und die Kombination der Stützstellen für jede Beobachtung bekannt sind, genügt in diesem Schritt eine elementweise Multiplikation. Das Kronecker-Produkt an dieser Stelle zu verwenden ist nicht sinnvoll, da damit alle Kombinationen zwischen den Stützstellen in x- und y-Richtung gebildet würden. Der Block  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},xy}$  ist für alle Bilder gleich, da die kohärenten Pixel in jedem Bild an den gleichen Stützstellen vorliegen. Somit kann die Zuordnung zu den passenden Parametern über das Kronecker-Produkt  $\otimes$  mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{1}$

$$\mathbf{A}_{\text{Atmo}} = \mathbf{1}_{[I]} \otimes \mathbf{A}_{\text{Atmo},xy} \quad (4.21)$$

durchgeführt werden. Für den Deformationsanteil wird ebenfalls erst eine flächenhafte Kombination

$$\mathbf{A}_{\text{Defo},xy} = \left[ \mathbf{A}_{\text{Defo},y}(:, 1) \circ \mathbf{A}_{\text{Defo},x}, \dots, \mathbf{A}_{\text{Defo},y}(:, K_{\text{Defo}}) \circ \mathbf{A}_{\text{Defo},x} \right], \quad (4.22)$$

wie für die Atmosphäre in Gleichung (4.20), gebildet. Falls die gleiche Anzahl und Ordnung der Basissplines für die Atmosphäre und die Deformation angesetzt wird, so gilt  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},xy} = \mathbf{A}_{\text{Defo},xy}$ . Da das Deformationssignal eine Korrelation bezüglich der Bilder eines Bildstapels aufweist, wird diese flächenhafte Kombination mit der Designmatrix der Zeit (vgl. Gleichung (4.19)) verknüpft. Dabei soll sichergestellt werden, dass sich jeder B-Spline in x- und y-Richtung mit der Zeit unabhängig von den anderen Basissplines verändern kann. Dies bedeutet, dass mithilfe des Kronecker-Produktes alle Kombinationen zwischen den B-Splines in der Zeit und den flächenhaften Basissplines in x- und y-Richtung über

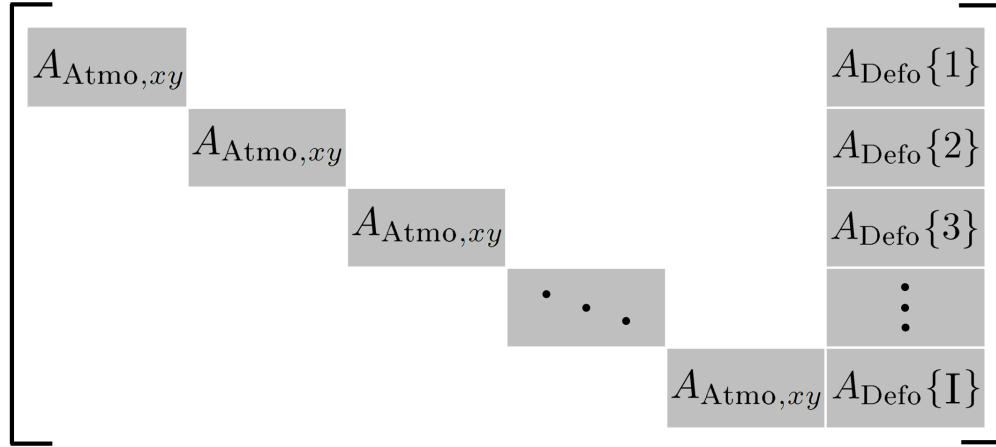
$$\mathbf{A}_{\text{Defo}} = \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \otimes \mathbf{A}_{\text{Defo},xy} \quad (4.23)$$

aufgestellt werden. Zuletzt lässt sich daraus die Designmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{Atmo}} & \mathbf{A}_{\text{Defo}} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

erstellen, wobei die Teilmatrizen aus numerischen Gründen in dieser Art angeordnet sind. In dem Schema 4.5 ist die dünnbesetzte Struktur der Designmatrix dargestellt.



Abbildung 4.5: Struktur der Designmatrix  $A$ 

## Parameter

Durch das Aufstellen aller Kombinationen von 1D-Basissplines ergibt sich für die Parameter der Atmosphäre eine Matrix  $\mathbf{A}_{jk}$  mit den Koeffizienten  $a_{jk}^{(i)}$  und für die Parameter der Deformation eine 3D-Matrix  $\mathbf{B}_{ijk}$  mit den Koeffizienten  $b_{ijk}$ . Diese sind abhängig von den Stützstellen der Basissplines in der Zeit  $i$ , in der x-Richtung  $j$  und in der y-Richtung  $k$ . Insgesamt ergibt sich eine Anzahl von  $(\mathbf{I}_{\text{Defo}} \cdot \mathbf{J}_{\text{Defo}} \cdot \mathbf{K}_{\text{Defo}} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{J}_{\text{Atmo}} \cdot \mathbf{K}_{\text{Atmo}})$  Parametern. Zur Aufstellung des Parametervektors

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{Atmo}} \\ \mathbf{x}_{\text{Defo}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{jk}(\cdot) \\ \mathbf{B}_{ijk}(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{jk}^{(1)}(\cdot) \\ \mathbf{A}_{jk}^{(2)}(\cdot) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{jk}^{(I)}(\cdot) \\ \mathbf{B}_{ijk}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

werden die Matrizen  $\mathbf{A}_{jk}$  und  $\mathbf{B}_{ijk}$  durch eine Vektorisierung mithilfe von  $(\cdot)$  neu geordnet. Für die Atmosphäre wird ein Parametervektor pro Bild und für die Deformation insgesamt ein Parametervektor für den gesamten Bildstapel aufgestellt. Dabei ist ersichtlich, dass die Deformationsparameter vom absoluten Zeitpunkt eines Bildes abhängen, da sie den Zusammenhang zwischen den Bildern beschreiben sollen. Im Gegensatz dazu ist der absolute Zeitpunkt für die atmosphärischen Parameter nicht interessant, da die Atmosphäre keine Korrelation zwischen den Bildern aufweist. Die Atmosphärenparameter werden einem Bild zugeordnet, um die Atmosphäre von der Deformation bildweise trennen zu können.

Somit wird die Parametermatrix der Atmosphäre für jedes Bild  $i$  über

$$\mathbf{A}_{jk}^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{-1 \ -1}^{(i)} & a_{-1 \ 0}^{(i)} & \cdots & a_{-1 \ \text{K}_{\text{Atmo}-2}}^{(i)} \\ a_{0 \ -1}^{(i)} & a_{0 \ 0}^{(i)} & \cdots & a_{0 \ \text{K}_{\text{Atmo}-2}}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\text{J}_{\text{Atmo}-2} \ -1}^{(i)} & a_{\text{J}_{\text{Atmo}-2} \ 0}^{(i)} & \cdots & a_{\text{J}_{\text{Atmo}-2} \ \text{K}_{\text{Atmo}-2}}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

aufgestellt. Durch Vektorisieren, also spaltenweises untereinander Anordnen, dieser Matrix ergibt sich der bildweise Parametervektor des atmosphärischen Signals zu

$$\mathbf{A}_{jk}^{(i)}(\cdot) = \left[ a_{-1 \ -1}^{(i)} \ \cdots \ a_{\text{J}_{\text{Atmo}-2} \ -1}^{(i)} \ a_{-1 \ 0}^{(i)} \ \cdots \ a_{\text{J}_{\text{Atmo}-2} \ \text{K}_{\text{Atmo}-3}}^{(i)} \ a_{-1 \ \text{K}_{\text{Atmo}-2}}^{(i)} \ \cdots \ a_{\text{J}_{\text{Atmo}-2} \ \text{K}_{\text{Atmo}-2}}^{(i)} \right]^T \quad (4.27)$$

Die Struktur der Parameter für die Deformation ist ähnlich der Atmosphäre, allerdings ist die direkte Bildzuordnung und dessen Zeitpunkt zu berücksichtigen. Daraus ergibt sich für jeden zeitlichen Basisspline  $B_i^3(t)$  eine Parametermatrix des Deformationssignals

$$\mathbf{B}_{(i)jk} = \begin{bmatrix} b_{i-1-1} & b_{i-1-0} & \cdots & b_{i-1-K_{\text{Defo}}-2} \\ b_{i-0-1} & b_{i-0-0} & \cdots & b_{i-0-K_{\text{Defo}}-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i-J_{\text{Defo}}-2-1} & b_{i-J_{\text{Defo}}-2-0} & \cdots & b_{i-J_{\text{Defo}}-2-K_{\text{Defo}}-2} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

die ebenfalls über

$$\mathbf{B}_{(i)jk}(\cdot) = \left[ b_{i-1-1} \quad \cdots \quad b_{i-J_{\text{Defo}}-2-1} \quad b_{i-1-0} \quad \cdots \quad b_{i-J_{\text{Defo}}-2-K_{\text{Defo}}-3} \quad b_{i-1-K_{\text{Defo}}-2} \quad \cdots \quad b_{i-J_{\text{Defo}}-2-K_{\text{Defo}}-2} \right]^T \quad (4.29)$$

vektoriert dargestellt werden kann. Für das Deformationsmodell (vgl. Gleichung (4.14)) ergibt sich der Parametervektor

$$\mathbf{B}_{ijk}(\cdot) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(1)jk}(\cdot) \\ \mathbf{B}_{(2)jk}(\cdot) \\ \mathbf{B}_{(3)jk}(\cdot) \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{(I_{\text{Defo}})jk}(\cdot) \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

## 4.2 Lineare Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen

Die Ergebnisse der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov ohne Restriktionen, die im Abschnitt 5.1 beschrieben werden, weisen auf eine unzureichende Trennung der Signale und Konditionierung des Ausgleichungsproblems hin. Somit besteht der nächste Schritt darin die Ausgleichung erneut durchzuführen und dabei Restriktionen an die Parameter anzubringen.

### 4.2.1 Lineares Ausgleichungsmodell nach Gauß-Markov mit Restriktionen

Diese erweiterte Ausgleichungsmethode mit Restriktionen für die Parameter beschreibt KOCH (1997, Kap. 327). Dabei werden neben den Beobachtungsgleichungen

$$\boldsymbol{\ell} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4.31)$$

lineare Nebenbedingungen an die Parameter

$$\mathbf{H}^T \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.32)$$

angebracht. Dabei stellt  $\mathbf{H}^T$  die Bedingungsmatrix und  $\mathbf{b}$  den Bedingungsvektor dar. Die Ausgleichung erfolgt unter Minimierung der Verbesserungsquadratsumme  $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$  mit den Nebenbedingung in Gleichung (4.32). Dabei ergeben sich die Verbesserungen zu  $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{x} - \boldsymbol{\ell}$ . Das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

enthält sowohl die Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  als auch die Nebenbedingungen aus der Gleichung (4.32). Nach MEISSL (1982) kann dieses Gleichungssystem über

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

gelöst werden, wenn die zwei Bedingungen

$$\text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \right) = m \quad \text{und} \quad \text{Rang}(\mathbf{H}) = r \quad (4.35)$$

erfüllt sind, wobei  $m$  die Anzahl der Parameter und  $r$  die Anzahl der Restriktionsgleichungen sind, die linear unabhängig sein müssen. Aus den Blöcken der Gesamtinverse lassen sich schlussendlich die ausgeglichenen Parameter

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{L} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\ell} + \mathbf{M} \mathbf{b} \quad (4.36)$$

bestimmen.

#### 4.2.2 Aufstellen des Restriktionsmodells

In Abschnitt 5.1 wird dargestellt, dass vor allem die Deformation im ersten Bild bereits deutlich von Null abweicht, obwohl die relativen Deformationen zu diesem Zeitpunkt bestimmt werden sollen. Um die Lagerung der Deformation und des zeitlichen Verhaltens zu verbessern, ist die Idee Restriktionen anzusetzen. Da die Deformation im ersten Bild gleich Null sein soll, bedeutet dies, dass die Summe aller Kombinationen von B-Splines an allen Beobachtungspunkten zum Zeitpunkt  $t_1 = 0$  gleich Null ist. Somit sollte theoretisch nur das atmosphärische Signal im ersten Bild enthalten sein. Daraus lässt sich ableiten, dass die Restriktionen sich auf die Parameter dieses Bildes beziehen sollen. Diese Parameter umfassen sowohl alle Parameter der Deformation in x- und y-Richtung als auch die Parameter der ersten zwei Basissplines in der Zeit. Die anderen, zeitlichen B-Splines sind zum Zeitpunkt  $t_1 = 0$  definitionsgemäß Null (vgl. Abschnitt 3.2). Als Restriktionsmodell ergibt sich somit die Gleichung

$$\sum_{i=-1}^0 \sum_{j=-1}^{(J_{\text{Defo}}-2)} \sum_{k=-1}^{(K_{\text{Defo}}-2)} b_{ijk} B_i^3(t_1) B_j^3(\kappa_j) B_k^3(\lambda_k) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.37)$$

in Anlehnung an das funktionale Modell der Deformation (vgl. Gleichung (4.14)). Als Unterschied dazu werden anstatt der Stützstellen der Beobachtungen die Stützstellen der Knoten der B-Splines  $\{\boldsymbol{\kappa}_{\text{Defo}}\}$  und  $\{\boldsymbol{\lambda}_{\text{Defo}}\}$  aus der Gleichung (4.17) eingesetzt. Als zeitliche Stützstelle wird ausschließlich der Zeitpunkt  $t_1 = 0$  des ersten Bildes betrachtet. Insgesamt werden  $r = (J_{\text{Defo}} \cdot K_{\text{Defo}} \cdot 2)$  Restriktionsgleichungen aufgestellt.

Die Restriktionsmatrix wird ähnlich der Designmatrix für die Deformationen in Gleichung (4.23) aufgestellt. Zunächst werden die 1D-Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x &= \begin{bmatrix} B_{-1}^3(\boldsymbol{\kappa}_{\text{Defo}}) & B_0^3(\boldsymbol{\kappa}_{\text{Defo}}) & B_1^3(\boldsymbol{\kappa}_{\text{Defo}}) & B_2^3(\boldsymbol{\kappa}_{\text{Defo}}) & \dots & B_{J_{\text{Defo}}-3}^3(\boldsymbol{\kappa}_{\text{Defo}}) & B_{J_{\text{Defo}}-2}^3(\boldsymbol{\kappa}_{\text{Defo}}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_y &= \begin{bmatrix} B_{-1}^3(\boldsymbol{\lambda}_{\text{Defo}}) & B_0^3(\boldsymbol{\lambda}_{\text{Defo}}) & B_1^3(\boldsymbol{\lambda}_{\text{Defo}}) & B_2^3(\boldsymbol{\lambda}_{\text{Defo}}) & \dots & B_{K_{\text{Defo}}-3}^3(\boldsymbol{\lambda}_{\text{Defo}}) & B_{K_{\text{Defo}}-2}^3(\boldsymbol{\lambda}_{\text{Defo}}) \end{bmatrix} \text{ und} \\ \mathbf{H}_t &= \begin{bmatrix} B_{-1}^3(t_1) & B_0^3(t_1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.38)$$

gebildet. Über die Verknüpfung mithilfe des Kronecker-Produktes

$$\mathbf{H}_{xyt} = \mathbf{H}_t \otimes \mathbf{H}_y \otimes \mathbf{H}_x \quad (4.39)$$

ergibt sich die Struktur der Restriktionsmatrix zu

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H}_{xyt} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Dabei steht die erste Null-Matrix für die Parameter der Atmosphäre und die zweite Null-Matrix für die Deformationsparameter, die die Basissplines  $B_1^3(t_1)$  bis  $B_{\text{IDefo}-2}^3(t_1)$  der Zeit enthalten und somit nicht durch Restriktionen beschränkt sein sollen. Da die Deformation gleich Null sein soll, ergibt sich für den Bedingungsvektor

$$\mathbf{b} = \mathbf{0}_{[r \times 1]}. \quad (4.41)$$

### 4.3 Prädiktion der geschätzten Signale auf einem regelmäßigen Gitter

Zur flächenhaften Darstellung der Ergebnisse der Approximation werden prädizierte Beobachtungen auf einem regelmäßigen Gitter erzeugt. Da die Atmosphäre zeitdiskret geschätzt wird, können nur die Bilder der Beobachtungszeitpunkte prädiziert werden. Für die Deformation hingegen ist eine kontinuierliche Funktion in Ort und Zeit angesetzt und somit ließe sich die Deformation für beliebige Zeitpunkte bildhaft darstellen. Zur Erzeugung der prädizierte Beobachtungen wird die Designmatrix erneut erstellt. Zunächst werden die 1D-Designmatrizen wie in Gleichung (4.19) aufgestellt. Hierbei werden allerdings alle Stützstellen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\{i\} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & J \end{bmatrix}^T & \text{und} \\ \mathbf{y}\{i\} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & K \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.42)$$

des regelmäßigen Rasters in x- und y-Richtung betrachtet. In diesem Fall sollen alle Kombinationen zwischen den Stützstellen gebildet werden, d.h. dass die kombinierten Designmatrizen in x- und y-Richtung mit

$$\bar{\mathbf{A}}_{\text{Atmo},xy} = \bar{\mathbf{A}}_{\text{Atmo},y} \otimes \bar{\mathbf{A}}_{\text{Atmo},x} \quad \text{und} \quad (4.43)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo},xy} = \bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo},y} \otimes \bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo},x} \quad (4.44)$$

über das Kronecker-Produkt gebildet werden können. Somit entstehen alle Kombinationen der Stützstellen, wie in Gleichung (4.10) dargestellt. Das Intervall zwischen den Stützstellen der Zeit wird nicht verkleinert, da die Atmosphäre nur für gegebene Bilder geschätzt werden kann. Die weiteren Kombinationen zum Aufstellen der Designmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  erfolgen über

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{\text{Atmo}} & \bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} \otimes \bar{\mathbf{A}}_{\text{Atmo},xy} & \bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo},t} \otimes \bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo},xy} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

wie in den Gleichungen (4.21), (4.23) und (4.24) angegeben. Um die approximierten Signale der Atmosphäre und der Deformation getrennt betrachten zu können, werden prädizierte Beobachtungen

$$\bar{\ell}_{\text{Atmo}} = \bar{\mathbf{A}}_{\text{Atmo}} \tilde{\mathbf{x}}_{\text{Atmo}} \quad \text{und} \quad (4.46)$$

$$\bar{\ell}_{\text{Defo}} = \bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo}} \tilde{\mathbf{x}}_{\text{Defo}} \quad (4.47)$$

mit den zugehörigen Teilen des ausgeglichenen Parametervektors  $\tilde{\mathbf{x}}$  und der Designmatrix  $\bar{\mathbf{A}}$  berechnet (vgl. Gleichung (4.8)). Für eine bildweise Betrachtung der Signale müssen nun nur noch die Blöcke des prädizierten Beobachtungsvektors aufgespalten (vgl. Gleichung (4.9)) und in einer Matrix angeordnet werden, die dem regelmäßigen Raster entspricht.

## 4.4 Problematik des Approximationsmodells

Wie in Abschnitt 5.2 beschrieben wird, führt die Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen auf eine verbesserte Trennung der Signale im ersten Bild, allerdings tritt kaum eine Optimierung des Konditionierungsproblems auf. Aus diesem Grund, werden in diesem Abschnitt zwei Problematiken der Umsetzung des Gauß-Markov-Modells angesprochen.

### 4.4.1 Auflösung der Deformationsrate

Zuerst wird sich mit den Voraussetzungen zur Auflösung der Signale befasst. In der Simulationsumgebung wird mit der Gleichung (2.3) ein halbjährliches Signal erzeugt, das in der Abbildung 2.3 umgesetzt ist. Um dieses halbjährliche Signal auflösen zu können, kann die Anzahl der benötigten Basissplines berechnet werden. Denn die Dichte der B-Splines legt die mögliche aufzulösende Frequenz der Signale fest. Nach SÜNKELE (1985) kann über die Dauer einer Periode  $t$  in Tagen die Periodendauer  $T$  in Jahren

$$T = \frac{t}{365} \quad (4.48)$$

bestimmt werden. Damit kann wiederum die maximal aufzulösende Frequenz

$$f = \frac{1}{T} \quad (4.49)$$

ermittelt werden. Schlussendlich ergibt sich der Abstand der B-Splines für ein Jahr zu

$$\Delta\kappa = \frac{1}{2f}. \quad (4.50)$$

Mit diesem Abstand  $\Delta\kappa$  lässt sich die Mindestanzahl an B-Splines für einen gegebenen Beobachtungszeitraum bestimmen.

### 4.4.2 Rangbetrachtungen der Matrizen der Normalgleichungen

Als zweite Problematik wird der Rang der Matrizen, die in den Normalgleichungen enthalten sind, betrachtet. Generell besteht der Ansatz der Approximation der Signale darin, das Deformations- und das Atmosphärensignal durch Basissplines zu trennen. Bereits beim Aufstellen der Designmatrix in Abschnitt 4.1.2 wird beschrieben, dass die Designmatrizen für die Deformation  $\mathbf{A}_{\text{Defo},xy}$  und die Atmosphäre  $\mathbf{A}_{\text{Atmo},xy}$  identisch

sind, wenn die gleichen Ordnungen und Anzahlen für die B-Splines angesetzt werden. Es wird festgelegt, dass  $\mathbf{J}_x = \mathbf{J}_{\text{Defo}} = \mathbf{J}_{\text{Atmo}}$  und  $\mathbf{K}_y = \mathbf{K}_{\text{Defo}} = \mathbf{K}_{\text{Atmo}}$  gilt und somit eine identische Matrix vorliegt, die im Folgenden mit  $\mathbf{A}_{xy}$  bezeichnet wird. Analog zu der Gleichung (4.23) kann die Designmatrix der Deformation über

$$\mathbf{A}_{\text{Defo}} = \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \otimes \mathbf{A}_{xy} \quad (4.51)$$

aufgestellt werden. Dabei wird  $\mathbf{A}_{\text{Defo},t}$  entsprechend der Gleichung (4.19) mit den Dimensionen  $[\mathbf{I} \times \mathbf{I}_{\text{Defo}}]$  aufgestellt und kann zu

$$\mathbf{A}_{\text{Defo},t} = \begin{bmatrix} B_{-1}^3(t_1) & B_0^3(t_1) & \cdots & B_{\mathbf{I}_{\text{Defo}}-2}^3(t_1) \\ B_{-1}^3(t_2) & B_0^3(t_2) & \cdots & B_{\mathbf{I}_{\text{Defo}}-2}^3(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-1}^3(t_1) & B_0^3(t_1) & \cdots & B_{\mathbf{I}_{\text{Defo}}-2}^3(t_1) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

umformuliert werden. Somit kann die Gleichung (4.51) zu

$$\mathbf{A}_{\text{Defo}} = \begin{bmatrix} B_{-1}^3(t_1) & B_0^3(t_1) & \cdots & B_{\mathbf{I}_{\text{Defo}}-2}^3(t_1) \\ B_{-1}^3(t_2) & B_0^3(t_2) & \cdots & B_{\mathbf{I}_{\text{Defo}}-2}^3(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-1}^3(t_1) & B_0^3(t_1) & \cdots & B_{\mathbf{I}_{\text{Defo}}-2}^3(t_1) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{A}_{xy} \quad (4.53)$$

$$= \begin{bmatrix} B_{-1}^3(t_1)\mathbf{A}_{xy} & B_0^3(t_1)\mathbf{A}_{xy} & \cdots & B_{\mathbf{I}_{\text{Defo}}-2}^3(t_1)\mathbf{A}_{xy} \\ B_{-1}^3(t_2)\mathbf{A}_{xy} & B_0^3(t_2)\mathbf{A}_{xy} & \cdots & B_{\mathbf{I}_{\text{Defo}}-2}^3(t_2)\mathbf{A}_{xy} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{-1}^3(t_1)\mathbf{A}_{xy} & B_0^3(t_1)\mathbf{A}_{xy} & \cdots & B_{\mathbf{I}_{\text{Defo}}-2}^3(t_1)\mathbf{A}_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

ausgeschrieben werden. Gleiches gilt für die Designmatrix der Atmosphäre, die analog zur Gleichung (4.21) mit

$$\mathbf{A}_{\text{Atmo}} = \mathbf{1}_{[\mathbf{I}]} \otimes \mathbf{A}_{xy} \quad (4.55)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot \mathbf{A}_{xy} & 0 \cdot \mathbf{A}_{xy} & \cdots & 0 \cdot \mathbf{A}_{xy} \\ 0 \cdot \mathbf{A}_{xy} & 1 \cdot \mathbf{A}_{xy} & \cdots & 0 \cdot \mathbf{A}_{xy} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{A}_{xy} & 0 \cdot \mathbf{A}_{xy} & \cdots & 1 \cdot \mathbf{A}_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{xy} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{xy} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

erstellt wird, wobei die quadratische Einheitsmatrix die Dimensionen der Anzahl der Bilder  $\mathbf{I}$  aufweist. Sowohl in Gleichungen (4.51) als auch in Gleichung (4.57) kommt das Kronecker-Produkt vor, dadurch lassen

sich diese Gleichungen beim Erstellen der Designmatrix (vgl. Gleichung (4.24)) nach den Rechenregeln für Kronecker-Produkte zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{Atmo}} & \mathbf{A}_{\text{Defo}} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} \otimes \mathbf{A}_{xy} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \otimes \mathbf{A}_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{A}_{xy} \quad (4.60)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & B_{-1}^3(t_1) & B_0^3(t_1) & \cdots & B_{I_{\text{Defo}}-2}^3(t_1) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & B_{-1}^3(t_2) & B_0^3(t_2) & \cdots & B_{I_{\text{Defo}}-2}^3(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & B_{-1}^3(t_1) & B_0^3(t_1) & \cdots & B_{I_{\text{Defo}}-2}^3(t_1) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{A}_{xy} \quad (4.61)$$

zusammenfassen. Beim Übergang auf die Normalgleichungen ergibt sich für die Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (4.62)$$

$$= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{A}_{xy} \right)^T \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{A}_{xy} \right) \quad (4.63)$$

$$= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix}^T \otimes \mathbf{A}_{xy}^T \right) \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{A}_{xy} \right) \quad (4.64)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{A}_{xy}^T \mathbf{A}_{xy}, \quad (4.65)$$

wobei  $\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix}$  die Dimensionen  $[I \times I + I_{\text{Defo}}]$  und somit die quadratische Form die Dimensionen  $[I + I_{\text{Defo}} \times I + I_{\text{Defo}}]$  aufweist. Dies bedeutet, dass der Rang dieser Matrix mit

$$\text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix} \right) = I \quad (4.66)$$

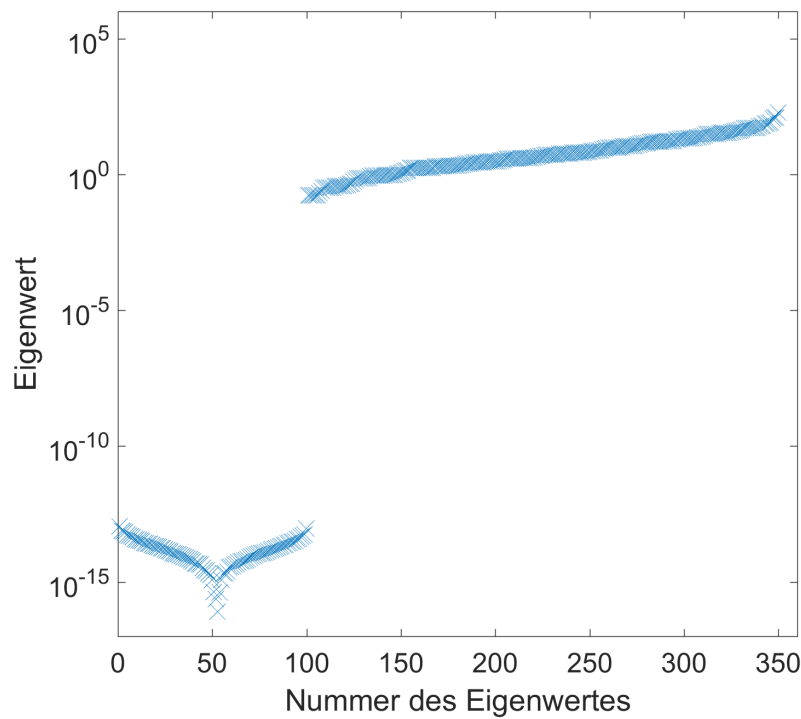
gegeben ist und somit auch der Rang der quadratischen Form

$$\text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[I]} & \mathbf{A}_{\text{Defo},t} \end{bmatrix} \right) = I < (I + I_{\text{Defo}}) \quad (4.67)$$

nicht voll ist. Es entsteht also ein Rangdefekt von  $I_{\text{Defo}}$ , der der Anzahl der Parameter der Basisfunktionen in der Zeit entspricht. Da  $\mathbf{A}_{xy}$  die Dimensionen  $[n \times J_x \cdot K_y]$  hat, ergibt sich für  $\mathbf{A}_{xy}^T \mathbf{A}_{xy}$  die quadratischen Dimensionen der Anzahl der Parameter in x- und y-Richtung ( $J_x \cdot K_y$ ) und somit ein voller Rang.

Es lässt sich vermuten, dass sich der Rangdefekt der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  aus den Dimensionen von  $\mathbf{A}_{xy}$  multipliziert mit dem Rangdefekt der quadratischen Form berechnet. Somit ergibt sich ein Rangdefekt von  $(I_{\text{Defo}} \cdot J_x \cdot K_y)$ , der durch die Aufstellung des Modells zustande kommt.

Diese Anzahl der Rangdefekte lässt sich mithilfe der Abbildung 4.6 bezüglich der Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix bestätigen, wobei für die Deformation und die Atmosphäre die gleiche Anzahl an Knoten in x- und y-Richtung  $J_x = 5$  und  $K_y = 5$  angesetzt sind. Außerdem sind  $I_{\text{Defo}} = 4$  B-Splines in der Zeit gewählt. Somit gilt  $(I_{\text{Defo}} \cdot J_x \cdot K_y) = (4 \cdot 5 \cdot 5) = 100$ , dies entspricht wiederum der Anzahl der Eigenwerte, die kleiner als  $10^{-10}$  sind. Dies deutet darauf hin, dass die Basisfunktionen, die in  $\mathbf{A}_{xy}$  angesetzt werden und sowohl zur Beschreibung der Deformation als auch der Atmosphäre genutzt werden, nicht in dieser Anordnung geeignet sind, um die Signale trennen zu können. Wie in den Abbildungen der Abschnitte 5.1 und 5.2 dargestellt, können die Signale der Deformation und Atmosphäre durch das Modell kompensiert werden, sodass das Gesamtsignal gut reproduziert werden kann. Allerdings können die Signale in dieser Weise nicht separiert werden. Dies hängt auch damit zusammen, dass ein Basisspline der Ordnung  $l$  immer einen linearen



**Abbildung 4.6:** Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix  $N$  der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov mit gleichabständigen Knoten in  $x$ - und  $y$ -Richtung

Anteil bzw. Anteile von B-Splines niedrigerer Ordnung enthält. Somit ist die Zuordnung dieser Anteile zu einem der Signale nicht eindeutig, da beide Signale Anteile von Basissplines niedrigerer Ordnung enthalten. Dies bedeutet, dass die langwelligen Signalanteile durch das Modell mit  $A_{xy}$  nicht trennbar sind.

An diese Überlegungen schließt sich die Frage an, inwieweit das Ansetzen von unterschiedlichen Anzahlen für die B-Splines für die Atmosphäre und Deformation zur Verminderung des Problems beiträgt. Wie bereits in Kapitel 4.4.1 beschrieben, legt die Dichte der B-Splines die mögliche aufzulösende Frequenz der Signale fest. Um eine Ebene darzustellen ist diese Frequenz sehr niedrig und somit sowohl mit fünf als auch sieben B-Splines in jeder Richtung möglich. Deshalb ist das Zuordnungsproblem durch eine Variation der Anzahl der B-Splines nicht lösbar. Die Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix mit unterschiedlichen Basisspline-Anzahlen für die Deformation und Atmosphäre in Abbildung 5.5 stellt dar, dass durch diesen Umstand eine Abschwächung des Problems erreicht werden kann.



## 5. Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der angewandten Approximationsmodelle, die in Kapitel 4 beschrieben sind, dargestellt. Dabei wird jeweils die Schätzung des Gesamtsignals und der Trennung der Signale betrachtet. Außerdem wird die Konditionierung des Ausgleichungsmodells berücksichtigt, um eine Aussage über die Güte der Ausgleichung treffen zu können.

### 5.1 Ergebnisse des Ausgleichungsmodells ohne Restriktionen

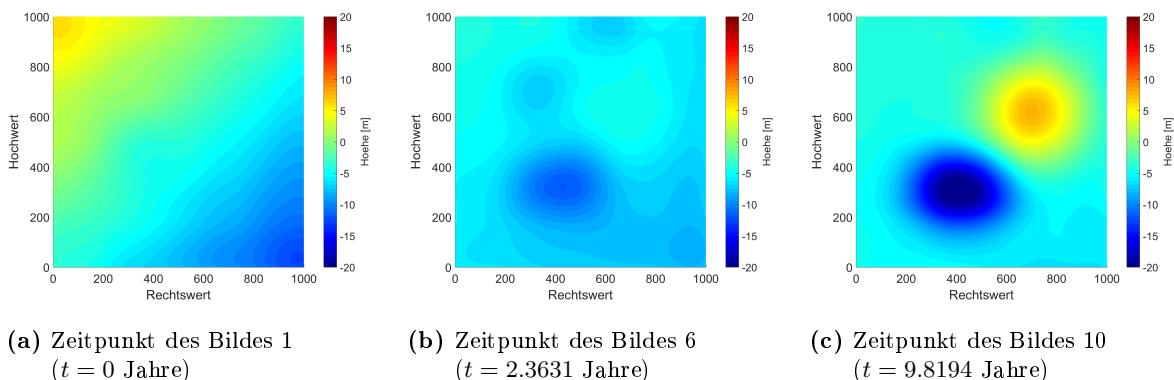
#### 5.1.1 Schätzung des Gesamtsignals

Zuerst wird das Gesamtsignal als Ergebnis der Ausgleichung nach Parametern ohne Restriktionen betrachtet. In den Einstellungen ist festgelegt, dass zehn Bilder zufällig über zehn Jahre verteilt sind. Dieser Zeitraum und die Anzahl der Bilder ist ausgewählt, da sie die Zeitreihe eines D-InSAR-Bildstapels realistisch wiedergeben. Außerdem soll eine Einschränkung der Komplexität und somit des Rechenaufwandes gewährleistet werden. Beispielhaft werden die Bilder eins, sechs und zehn gezeigt. Die Anzahl der B-Splines werden nach dem Schema in Gleichung (4.16) auf

$$\begin{bmatrix} I_{\text{Defo}} & J_{\text{Defo}} & K_{\text{Defo}} & J_{\text{Atmo}} & K_{\text{Atmo}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

festgelegt. Dabei ist die Anzahl der Basissplines für die Atmosphäre größer gewählt, da diese kleineren, lokalen Variationen unterliegen kann. Um die Simulation und die Approximation vergleichen zu können, werden die zu approximierenden Beobachtungen zuerst nur aus den Signalen der Deformation und der Atmosphäre zusammengesetzt. Zur Darstellung der Ergebnisse werden, wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, erneut die Designmatrix und die prädierten Beobachtungen für ein regelmäßiges Raster erstellt.

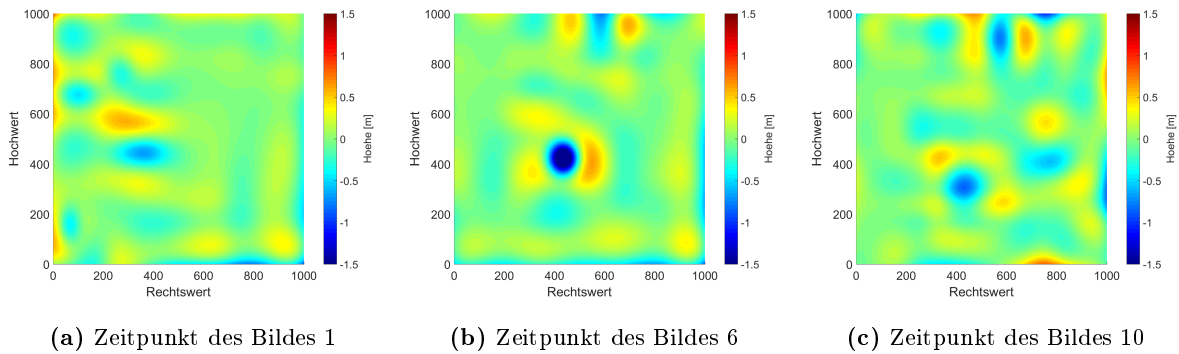
In Abbildung 5.1 sind die prädierten Beobachtungen als Summe der Deformation und der Atmosphäre dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass die Approximation sehr ähnlich den simulierten Beobachtungen in Abbildung 2.6 sind.



**Abbildung 5.1:** Approximation der Beobachtungen als Summe der Deformation und der Atmosphäre mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov

Um diesen Zusammenhang zu unterstreichen, sind die Differenzbilder zwischen den simulierten und ausgeglichenen Beobachtungen in Abbildung 5.2 aufgezeigt, wobei auf die kleiner gewählte Farbskala zu achten

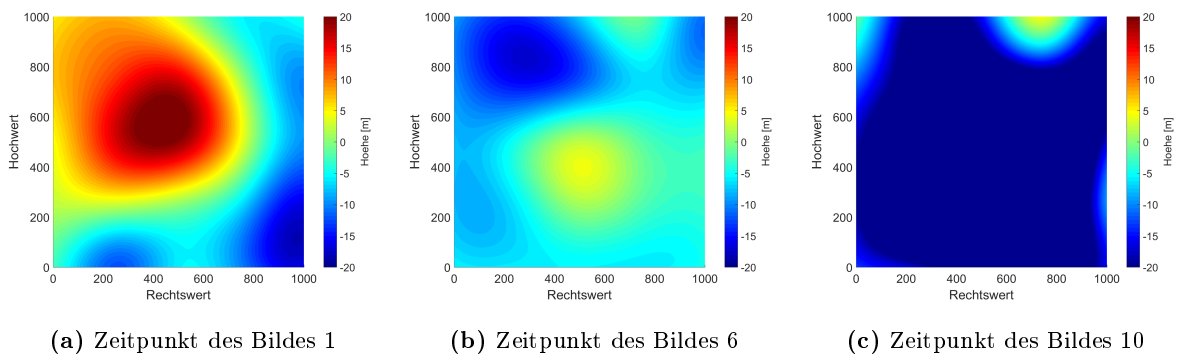
ist. Da diese Differenzen klein im Vergleich zu der Größenordnung der Deformation und der Atmosphäre sind, deutet dies darauf hin, dass sich das Gesamtsignal mithilfe des aufgestellten Approximationsmodells gut beschreiben lässt.



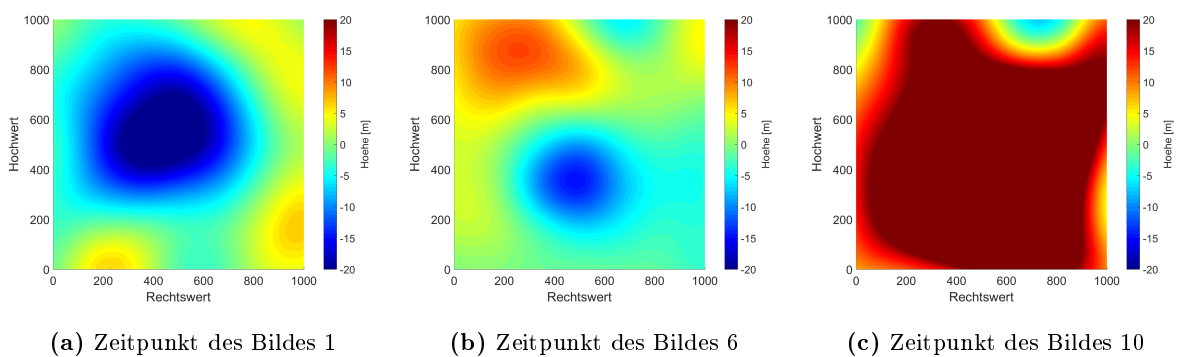
**Abbildung 5.2:** Differenzbilder aus den simulierten abzüglich der approximierten Beobachtungen mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov

### 5.1.2 Separation der Signale

In einem nächsten Schritt wird die Güte der Trennung der zwei Signale untersucht. Die Approximation der Deformation ist in Abbildung 5.3 und die Approximation der Atmosphäre ist in Abbildung 5.4 dargestellt.



**Abbildung 5.3:** Approximation der Deformation mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov



**Abbildung 5.4:** Approximation der Atmosphäre mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov

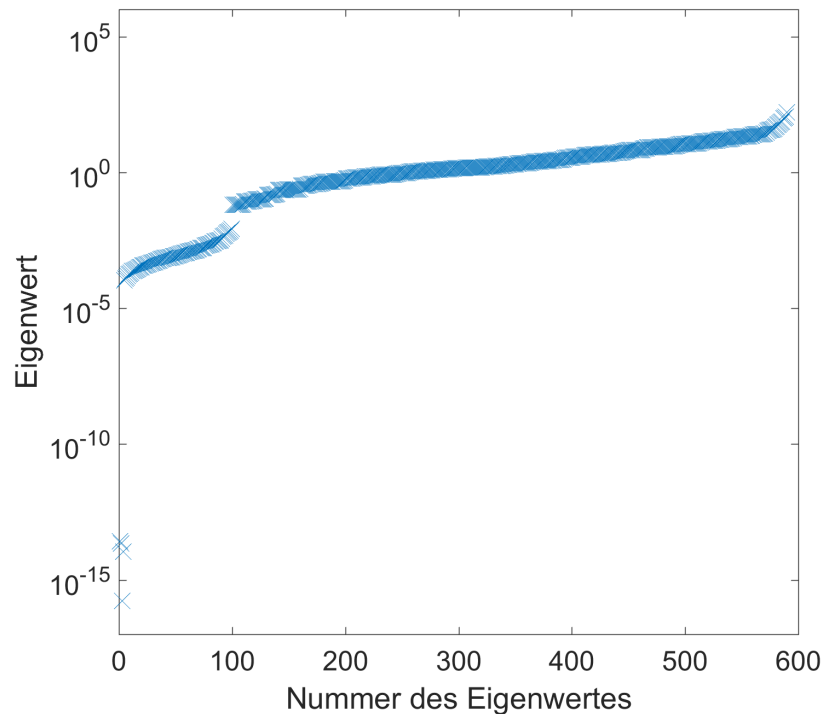
Es ist zu entnehmen, dass sowohl das Deformations- als auch das Atmosphärensignal in sich stark korreliert ist über den gesamten Bildstapel. Dies sollte laut der in Abschnitt 2.1 beschriebenen Annahmen allerdings nur auf die Deformation zutreffen. Die Atmosphäre ist als zufällig und unabhängig in jedem Bild angenommen.

Außerdem wird von einer relativen Deformation zum Anfangszeitpunkt ausgegangen. Somit ist das approximierte Deformationssignal im ersten Bild (vgl. Abbildung 5.3) zu groß. Dies ist der Grund, weshalb im nächsten Abschnitt 4.2 Restriktionen für die Deformation im ersten Bild angebracht werden.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass die lineare Ausgleichung nach Gauß-Markov auf eine Überschätzung der einzelnen Signale führt. Da die zwei Signale zu groß geschätzt werden, bedeutet dies, dass eine starke Korrelation zwischen der Deformation und der Atmosphäre auftritt, um dennoch eine gute Approximation des Gesamtsignals (vgl. Abbildung 5.2) zu erhalten. Wie in den Abbildungen 5.3 und 5.4 ersichtlich ist, verhalten sich die zwei Signale sehr gegensätzlich, d.h. dass eine Hebung in der Deformation durch eine Senkung in der Atmosphäre ausgeglichen wird.

### 5.1.3 Konditionierung der Normalgleichungen

Da die Approximation der einzelnen Signale nicht den Simulationsdaten entspricht, wird zunächst die Konditionierung des Ausgleichungsproblems betrachtet. Zum einen kann festgestellt werden, dass die Designmatrix  $\mathbf{A}$  dünn besetzt ist (vgl. Abbildung 4.5) und die Größenordnung der Zahlen stark variiert. Zum anderen kann eine Aussage aus den Eigenwerten der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  abgeleitet werden, die im Zusammenhang mit dem Aufbau der Designmatrix steht. Diese Eigenwerte sind in Abbildung 5.5 logarithmisch dargestellt. Auffällig sind die kleinsten Eigenwerte, die eine Größenordnung von  $10^{-14}$  aufweisen. Diese spiegeln die Anzahl der angesetzten Basissplines für die Zeit wieder, das sind in diesem Fall  $I_{\text{Defo}} = 4$



**Abbildung 5.5:** Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{N}$  der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov

B-Splines. Vermutlich sind die kleinen Eigenwerte dadurch zu erklären, dass die Deformationen relativ zum Anfangszeitpunkt bestimmt werden, allerdings ist der Anfangszeitpunkt nicht eindeutig beschrieben. In diesem Fall wären die B-Splines, die für die Zeit angesetzt sind, nicht eindeutig festgelegt.

Diese kleinen Eigenwerte lassen sich ebenfalls im Rangdefekt der Normalgleichungsmatrix wiederfinden, wobei die Anzahl der Parameter auf 590 festgelegt sind und sich der Rang der Normalgleichungsmatrix zu

$$\text{Rang}(\mathbf{N}) = 586 \quad (5.2)$$

ergibt. Die Differenz aus der Anzahl der Parameter und dem Rang ergibt einen Rangdefekt von 4. Weiterhin sind die Eigenwerte zwischen dem ersten und zweiten Sprung auffällig. Diese beiden Gruppen von Eigenwerten ergeben zusammen die gleiche Anzahl von Parametern ( $\mathbf{I}_{\text{Defo}} \cdot \mathbf{J}_{\text{Defo}} \cdot \mathbf{K}_{\text{Defo}}$ ), die für die Deformation angesetzt werden (vgl. Gleichung (4.16)). Für den dargestellten Fall ergeben sich

$$\mathbf{I}_{\text{Defo}} \cdot \mathbf{J}_{\text{Defo}} \cdot \mathbf{K}_{\text{Defo}} = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \quad (5.3)$$

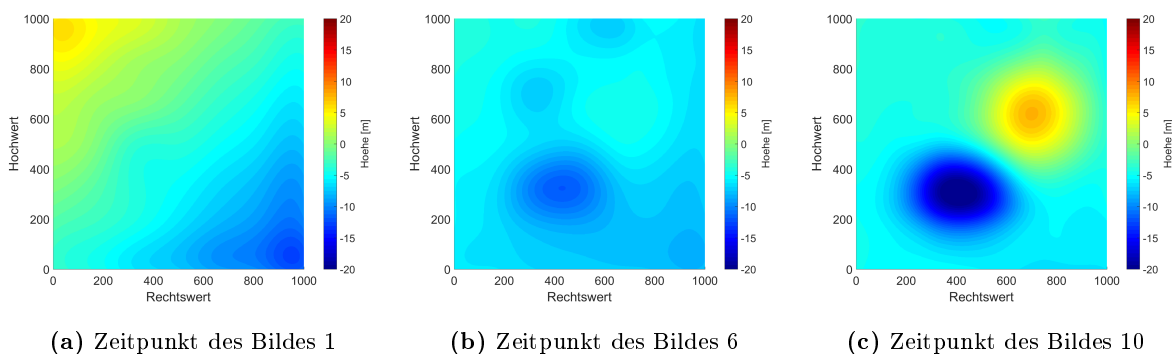
kleine Eigenwerte vor dem zweiten Sprung.

## 5.2 Ergebnisse des Ausgleichsmodells mit Restriktionen

### 5.2.1 Schätzung des Gesamtsignals

Um die Approximation der Signale nach Gauß-Markov mit Restriktionen darstellen zu können, werden wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, prädierte Beobachtungen für ein regelmäßiges Raster erstellt. Außerdem werden die gleichen Einstellungen wie in Abschnitt 5.1 für die Länge des Zeitraumes, die Anzahl der Bilder und die Anzahl der B-Splines verwendet.

Die Abbildung 5.6 zeigt das approximierte Gesamtsignal für jedes Bild unter der Anbringung von Restriktionen für die Parameter. Im Zusammenhang mit den Differenzbildern in Abbildung 5.7 kann entnommen werden, dass das Gesamtsignal durch das Approximationsmodell mit Restriktionen ebenfalls gut genähert werden kann. Dabei ist auf die unterschiedlichen Skalierungen der Farbskalen zu achten.



**Abbildung 5.6:** Approximation der Beobachtungen als Summe der Deformation und der Atmosphäre mithilfe der linearen Ausgleichs nach Gauß-Markov mit Restriktionen

Die Abbildung 5.8 stellt die Differenz zwischen den Approximationen nach Gauß-Markov mit (vgl. Abbildung 5.7) und ohne Restriktionen (vgl. Abbildung 5.2) dar. In dieser Abbildung ist die Skalierung der Farbskala um den Faktor drei kleiner als Skalierung der Farbskala in den Abbildungen der Differenzen zu den simulierten Beobachtungen. Da in diesen Differenzbildern Strukturen zu erkennen sind, kann festgehalten werden,

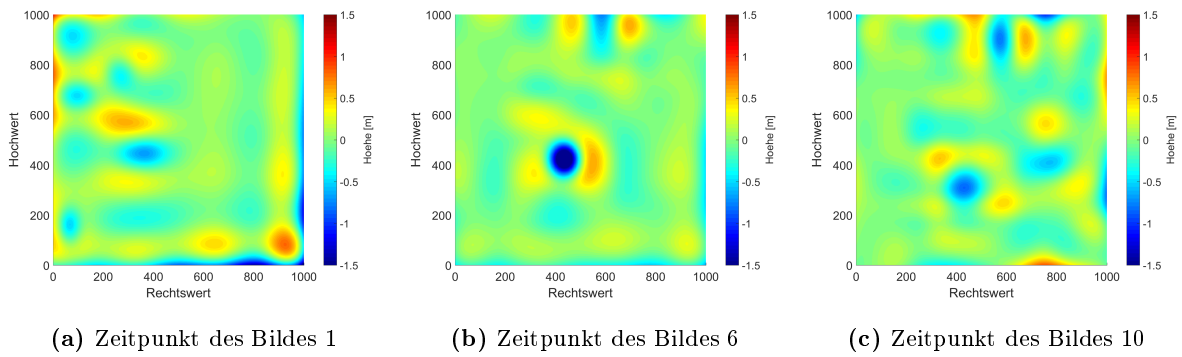


Abbildung 5.7: Differenzbilder aus den simulierten abzüglich der approxmierten Beobachtungen mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen

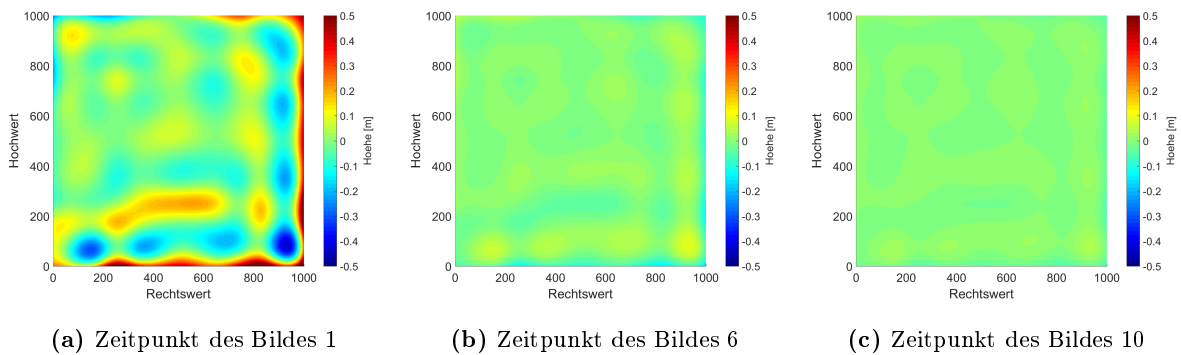


Abbildung 5.8: Differenzen der Approximationen mit (vgl. Abbildung 5.6) und ohne Restriktionen (vgl. Abbildung 5.1)

dass die Approximationen mit und ohne Restriktionen auf unterschiedliche Ergebnisse führen. Besonders die ersten Bilder des Bildstapels weisen Unterschiede auf. Dabei sind die Abweichungen am Rand der Bilder am größten.

### 5.2.2 Separation der Signale

Das ausgeglichene Signal der Deformation ist in der Abbildung 5.9 und das Signal der Atmosphäre ist in der Abbildung 5.10 dargestellt. Zum Aufnahmezeitpunkt des ersten Bildes ist, wie in Abschnitt 4.2.2 gefor-

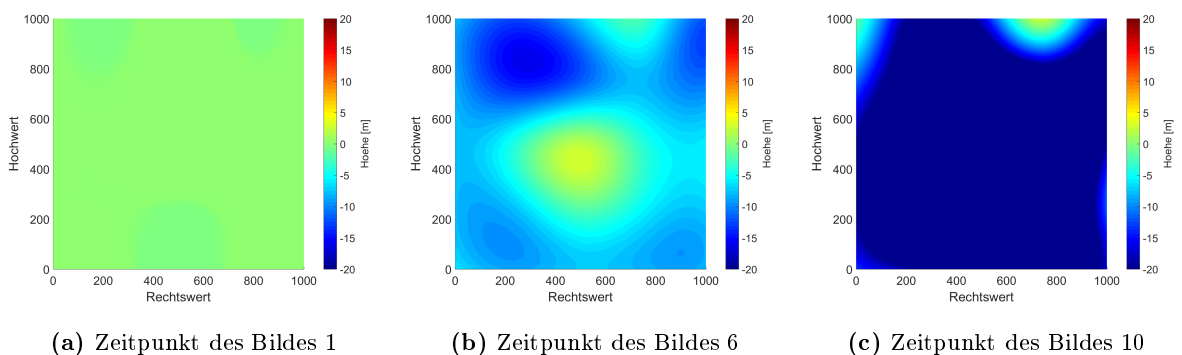
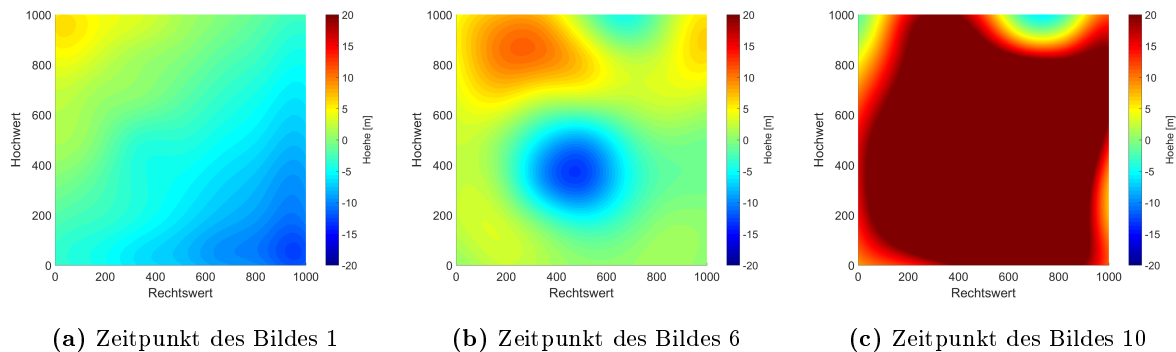


Abbildung 5.9: Approximation der Deformation mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen

dert, keine Deformation zu erkennen (vgl. Abbildung 5.9(a)). Somit ist in Abbildung 5.10(a) die tatsächlich simulierte Atmosphäre zu erkennen. Allerdings weisen die weiteren Abbildungen der Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen 5.9(b) und (c) bzw. 5.10(b) und (c) in der Größenordnung große Ähnlichkeiten mit den Abbildungen der Ausgleichung nach Gauß-Markov ohne Restriktionen 5.3(b) und (c) bzw. 5.4(b) und (c) auf.



**Abbildung 5.10:** Approximation der Atmosphäre mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen

Insgesamt lässt sich sagen, dass durch die Anbringung von Restriktionen das Ausgleichungsmodell leicht verbessert wird. Allerdings ist die Trennung der Signale nur für den ersten Zeitpunkt möglich. Weiterhin besteht eine starke Korrelation zwischen dem Deformations- und dem Atmosphärensignal in jedem Bild. Außerdem weisen beide Signale eine Korrelation über den Bildstapel auf und die ausgeglichenen Signale sind deutlich größer als die Simulationsdaten.

### 5.2.3 Konditionierung der Normalgleichungen

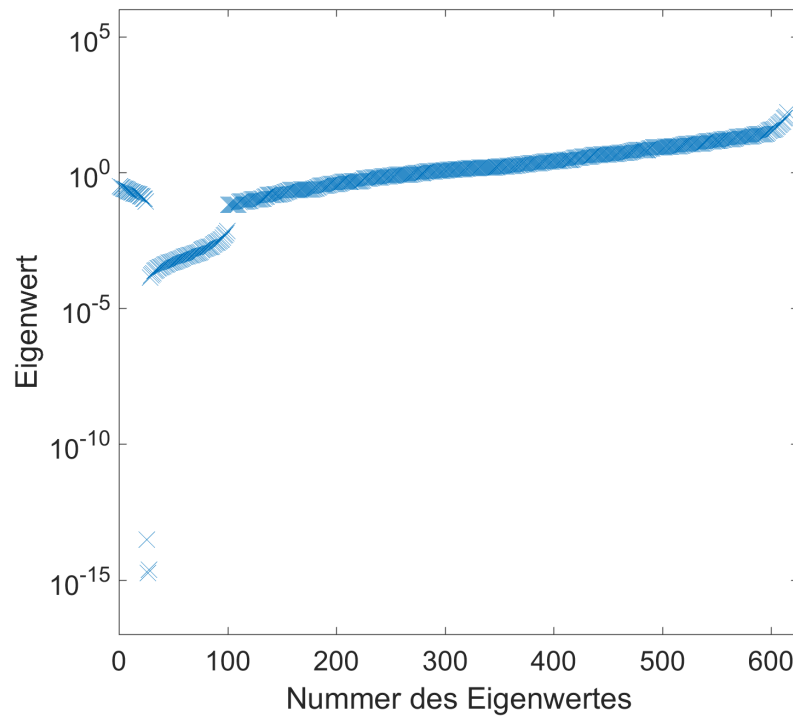
Für das lineare Approximationsmodell nach Gauß-Markov mit Restriktionen wird ebenfalls die Konditionierung überprüft. Dabei werden die Eigenwerte der, um die Restriktionsgleichungen erweiterten, Normalgleichungsmatrix

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

bestimmt. Da die Restriktionen eine Einschränkung des Lösungsraumes bedeuten, ist zu erwarten, dass die Anzahl der Rangdefekte gegenüber der Ausgleichung ohne Restriktionen (vgl. Abschnitt 5.1.3) abnimmt. Anhand der Abbildung 5.11, die die Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix der Ausgleichung mit Restriktionen enthält, kann diese Erwartung bestätigt werden. Bei  $I_{\text{Defo}} = 4$  angesetzten B-Splines in der Zeit wird der Rangdefekt um eins gekürzt, d.h. dass ein Basisspline in der Zeit eindeutig festgelegt werden kann.

Es lässt sich vermuten, dass die ersten  $r = (J_{\text{Defo}} \cdot K_{\text{Defo}}) = 25$  Eigenwerte den Korrelaten zugeordnet werden können und somit im Weiteren vernachlässigt werden können.

Damit lässt sich ebenfalls bestätigen, dass der Rangdefekt modellbedingt ist, wie in Abschnitt 4.4.2 beschrieben, und nicht durch Restriktionen behoben werden kann.



**Abbildung 5.11:** Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix der linearen Ausgleichung mit Restriktionen

## 5.3 Ansätze zur Lösung der Probleme des Approximationsmodells

Im Folgenden werden zwei Ansätze verfolgt, um eine Auflösung der zu approximierenden Signale gewährleisten und eine Trennung der Signale über die Approximation der Deformationen als Beobachtungen erreichen zu können.

### 5.3.1 Anpassung der zeitlichen Auflösung der B-Splines

In diesem Abschnitt wird Anzahl der Basissplines bestimmt, die nötig ist um das simulierte, halbjährliche Signal auflösen zu können. Wie in Abschnitt 4.4.1 gezeigt, ergibt sich für diesen Fall eine Periodendauer in Tagen zu

$$t = 180 \tag{5.5}$$

und somit die Periodendauer in Jahren zu

$$T \approx 0.5. \tag{5.6}$$

Dies bedeutet, dass zwei Schwingungen pro Jahr

$$f = \frac{1}{0.5} = 2 \tag{5.7}$$

vorliegen. Als Knotenabstand ergibt sich somit

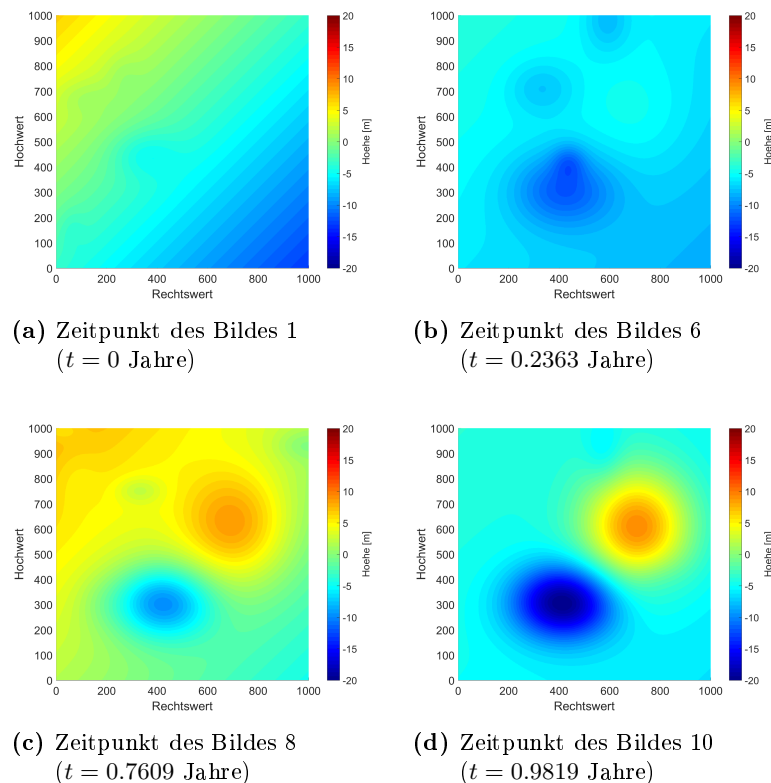
$$\Delta\kappa = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \quad (5.8)$$

und daraus folgt, dass mindestens vier B-Splines pro Jahr angesetzt werden müssen, um eine halbjährliche Periodizität aufdecken zu können.

### Simulationsdaten für den Beobachtungszeitraum von einem Jahr

Um diese Anzahl an B-Splines pro Jahr ansetzen und somit überprüfen zu können, dass das halbjährliche Signal auflösbar ist, muss die Abtastrate erhöht werden. Dies kann entweder über eine Verkürzung des Beobachtungszeitraumes oder über die Anhebung der Anzahl der Beobachtungen, um somit mehr B-Splines in der Zeit ansetzen zu können, umgesetzt werden. Damit der Rechenaufwand mit zehn Bildern als Beobachtungen gering gehalten werden kann und trotzdem genügend Beobachtungen zur Approximation herangezogen werden können, wird der Beobachtungszeitraum auf ein Jahr verkürzt und die Anzahl der Splines in der Zeit auf  $I_{\text{Defo}} = 5$  erhöht.

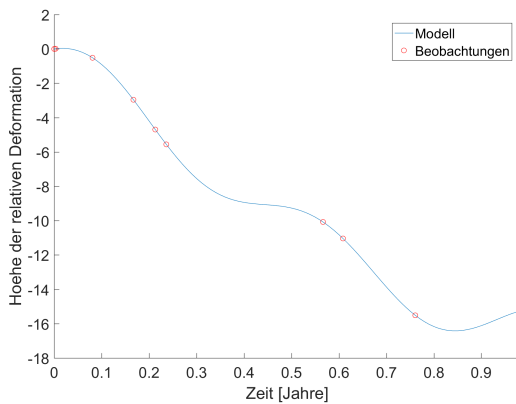
Zuerst werden neue Simulationsdaten für den verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr erzeugt. Zur Validierung der Ergebnisse sind die Modelle der simulierten Beobachtungen für die vier Beispielbilder eins, sechs, acht und zehn in Abbildung 5.12 gezeigt.



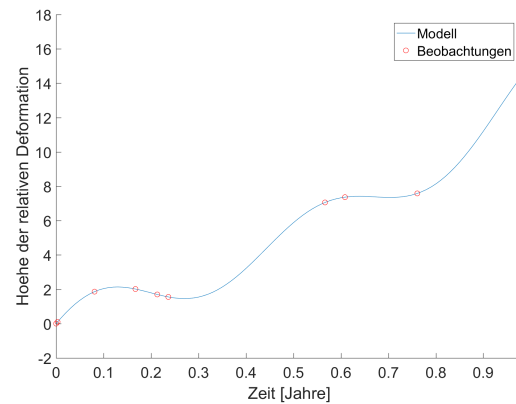
**Abbildung 5.12:** Modell der Beobachtungen aus der Deformation und Atmosphäre für einen verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr

Zur Veranschaulichung der Deformationssimulation sind sowohl die Deformationsraten, die sich für die zwei Deformationsgebiete ergeben, in Abbildung 5.13 als auch die simulierte Deformation in Abbildung 5.14 dargestellt. Die Simulationsdaten der Atmosphäre sind in Abbildung 2.5 gegeben.



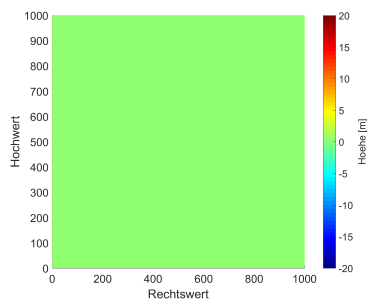


(a) Deformationsrate des ersten Berges

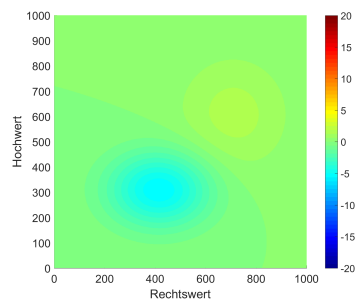


(b) Deformationsrate des zweiten Berges

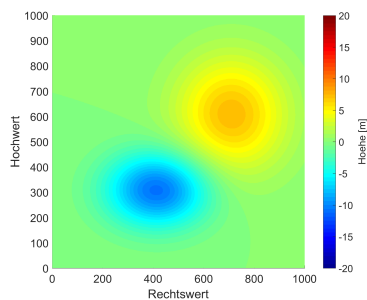
**Abbildung 5.13:** Deformationsraten zweier Deformationsgebiete für einen verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr



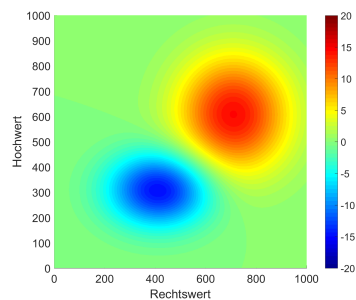
(a) Zeitpunkt des Bildes 1



(b) Zeitpunkt des Bildes 6



(c) Zeitpunkt des Bildes 8

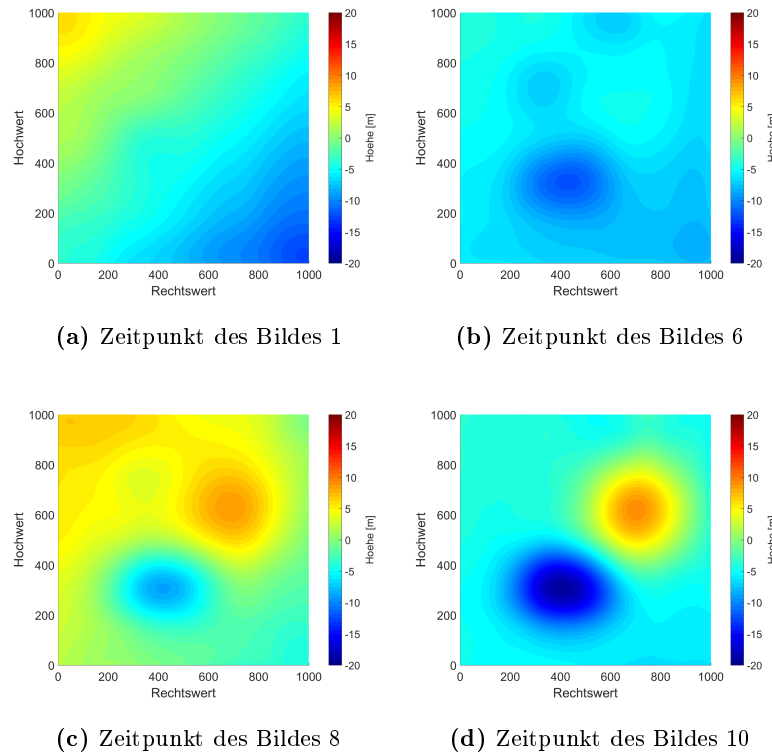


(d) Zeitpunkt des Bildes 10

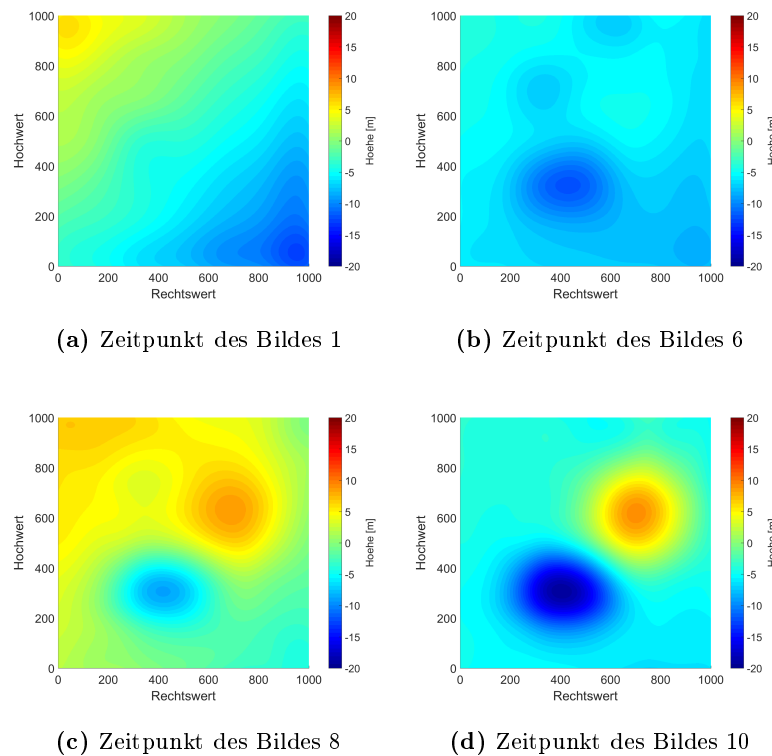
**Abbildung 5.14:** Modell der Deformation für einen verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr

## Ergebnisse für den Beobachtungszeitraum von einem Jahr

Zunächst wird die Approximation der Daten nach Gauß-Markov mit und ohne Restriktionen behandelt. In den Abbildungen 5.15 und 5.16 sind die Approximationen der Gesamtdaten gezeigt. Es ist auffällig, dass die Simulation (vgl. Abbildung 5.12) in allen vier Bildern glatter ist als die ausgeglichenen Beobachtungen. Bei Betrachtung der approximierten Signale der Deformation (vgl. Abbildungen 5.17 und 5.18) und der Atmosphäre (vgl. Abbildungen 5.19 und 5.20) ist zu erkennen, dass die Ausprägung der ausgeglichenen Signale sowohl vom Ort als auch von der Größenordnung der Hebung bzw. Senkung willkürlich scheint. Außerdem sind beide Signale deutlich größer als die jeweiligen simulierten Signale. Die Signale der Deformation und der Atmosphäre sind entgegen gesetzt gerichtet und kompensieren sich somit gegenseitig, damit das Gesamtsignal in der richtigen Größenordnung approximiert werden kann.



**Abbildung 5.15:** Approximation der Beobachtungen als Summe der Deformation und der Atmosphäre mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov ohne Restriktionen im verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr



**Abbildung 5.16:** Approximation der Beobachtungen als Summe der Deformation und der Atmosphäre mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen im verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr

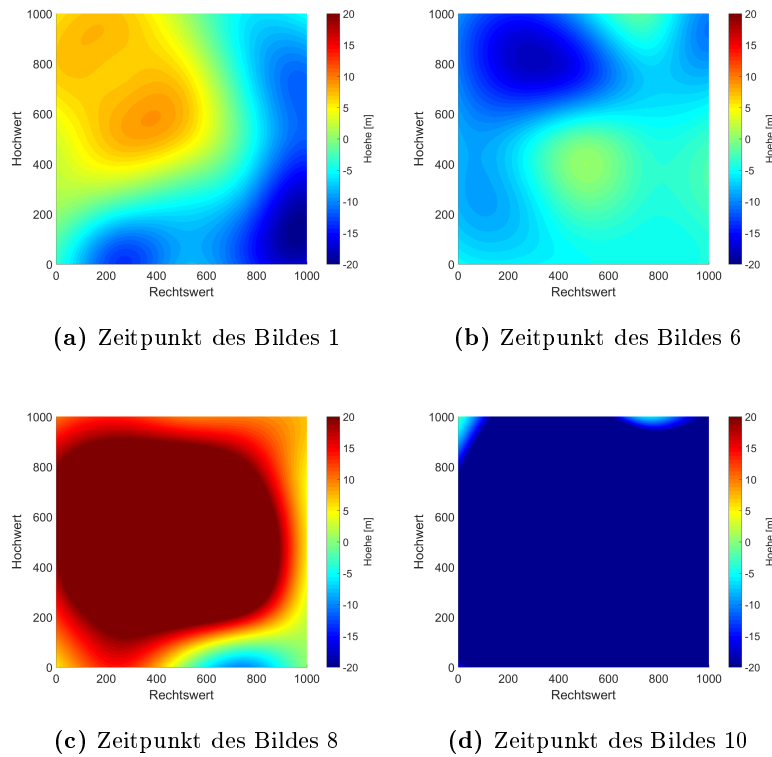


Abbildung 5.17: Approximation der Deformation mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov ohne Restriktionen im verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr

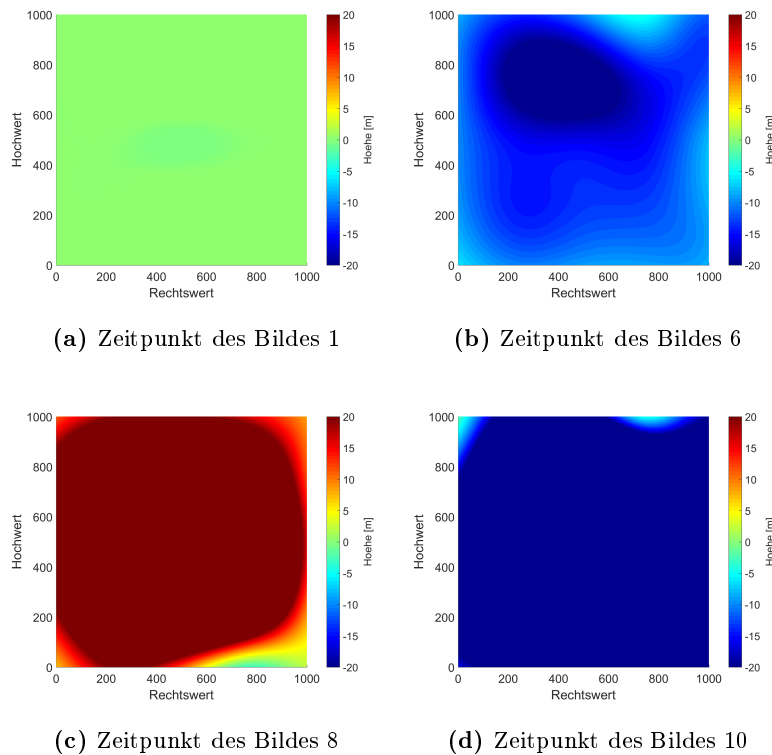
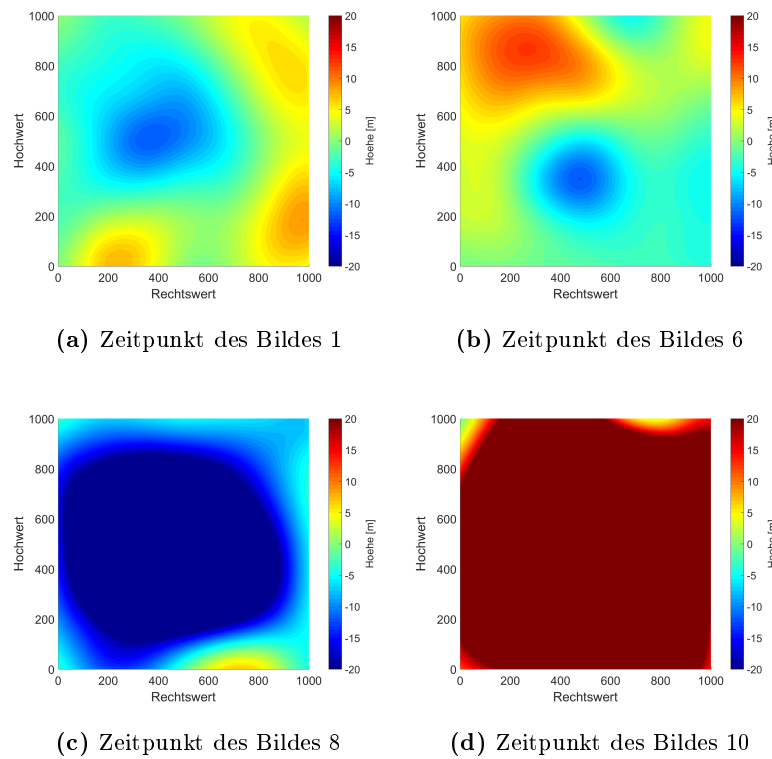
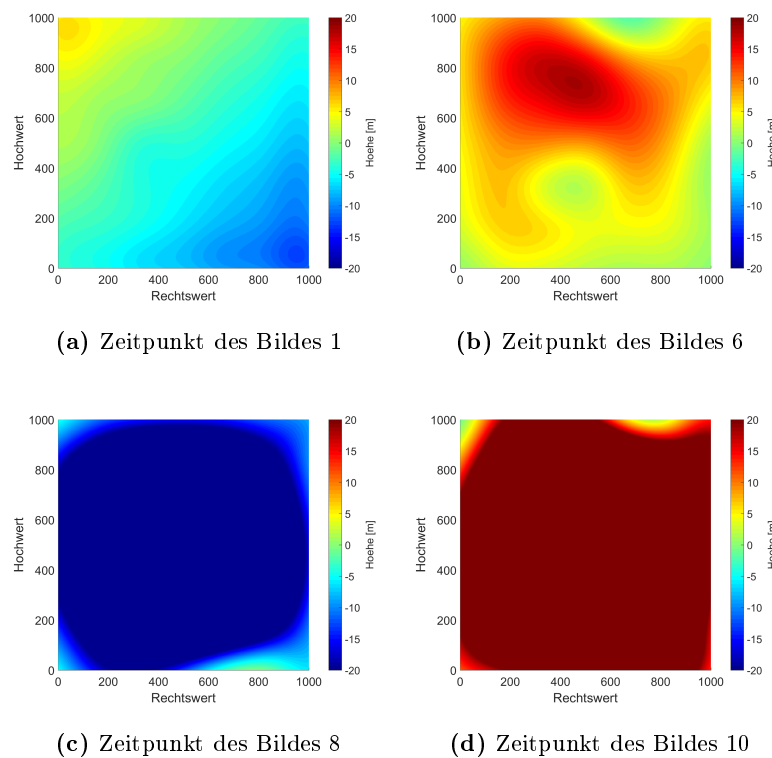


Abbildung 5.18: Approximation der Deformation mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen im verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr



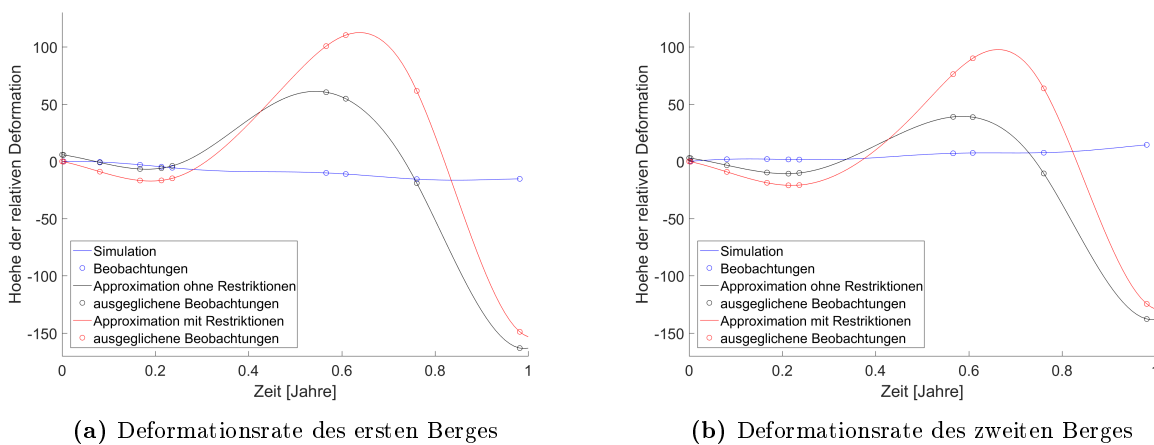
**Abbildung 5.19:** Approximation der Atmosphäre mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov ohne Restriktionen im verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr



**Abbildung 5.20:** Approximation der Atmosphäre mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen im verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr

In der Abbildung 5.21 sind die simulierten und approximierten Deformationsraten mit und ohne Restriktionen für die zwei Deformationsgebiete dargestellt. Diese können bestimmt werden, da die Maximalpunkte der Deformationsgebiete aus der Simulationsumgebung bekannt sind. Somit kann erneut eine Designmatrix für die Deformation (vgl. Gleichungen (4.22) und (4.23)) pro Deformationsgebiet erstellt werden. Dabei werden als Stützstellen in  $x$ - und  $y$ -Richtung die Stützstellen des Maximalpunktes des Deformationsgebietes eingesetzt. Für die Stützstellen in der Zeit gelten weiterhin die absoluten Zeitpunkte der zehn beobachteten Bilder.

In der Abbildung 5.21 ist zu erkennen, dass die approximierte Deformation eine deutlich höhere Größenordnung als die simulierte Deformation aufweist. Die Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen unterscheidet sich zur Ausgleichung ohne Restriktionen darin, dass der Anfangszeitpunkt der Deformation, wie in Abschnitt 4.2.2 gefordert, auf Null gesetzt ist. Allerdings wird auch bei angesetzten Restriktionen die Deformationsrate aufgrund des angesetzten Modells deutlich zu groß geschätzt. Die halbjährliche Periodizität des Signals kann somit nicht abgeleitet werden. Allerdings ist ersichtlich, dass die Periodizität aufgrund der Schwankungen des approximierten Signals auflösbar ist.



**Abbildung 5.21:** Vergleich der Approximationen der Deformationsraten ohne und mit Restriktionen für zwei Deformationsgebiete für einen verkürzten Beobachtungszeitraum von einem Jahr

### 5.3.2 Ansatz zur Umgehung des Rangdefektes

In diesem Abschnitt werden verschiedene Lösungsansätze dargestellt, um eine Umgehung des Rangdefektes und daraus resultierende Trennung der Signale zu ermöglichen. Zum einen könnte durch das Ansetzen verschiedener, unabhängiger Basisfunktionen für die Deformation und die Atmosphäre eine Separation der Signale erlangt werden. Zum anderen könnte eine Trennung der Signale dadurch erreicht werden, dass die Signale in komplementären Räumen dargestellt werden. Dies ist der Fall, wenn nur eines der Signale, z.B. das Deformationssignal, als auszugleichende Größe betrachtet wird und somit in den ausgeglichenen Beobachtungen  $\tilde{\ell}$  enthalten ist. Das Atmosphärensignal ist folglich zusammen mit dem Rauschen in den Verbesserungen  $\mathbf{v}$  enthalten. Eine Trennung der Signale sollte möglich sein, da  $\mathbf{v}$  das Komplement zu  $\tilde{\ell}$  darstellt. Dies bedeutet, dass zuerst eine Ausgleichung bezüglich der Deformation durchgeführt wird. In einem darauf folgenden Schritt ist das Ziel durch eine erneute Ausgleichung die Verbesserungen wiederum in die Atmosphäre und das Rauschen zu separieren.

## Ergebnisse zur Umgehung des Rangdefektes

Im Folgenden wird ein Lösungsansatz aus dem vorangegangenen Abschnitt überprüft. Falls nur die Deformation als ausgleichendes Signal angenommen wird, so sollte laut der Annahme das atmosphärische Signal in den Verbesserungen enthalten sein.

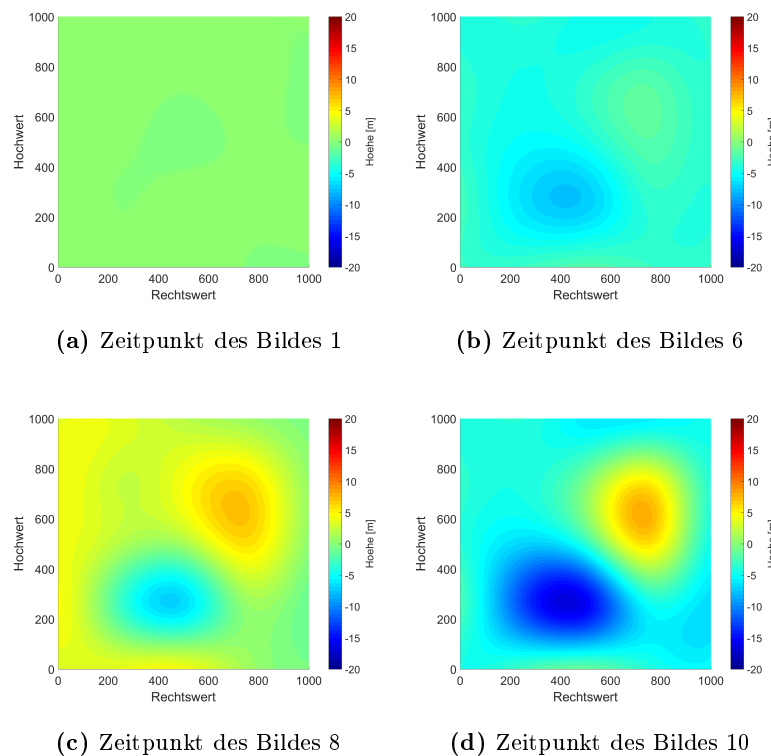
Zur erneuten Ausgleichung vereinfacht sich das Ausgleichungsmodell aus Gleichung (4.13) zu

$$\ell_{ijk} + v_{ijk} = f(t_i, x_j, y_k) \quad (5.9)$$

und für die Designmatrix kann die Designmatrix der Deformation  $\mathbf{A}_{\text{Defo}}$  (vgl. Gleichung (4.23)) angesetzt werden. Zur Evaluation dieses Lösungsansatzes werden ein Beobachtungszeitraum von einem Jahr und eine Approximation mit Restriktionen angesetzt.

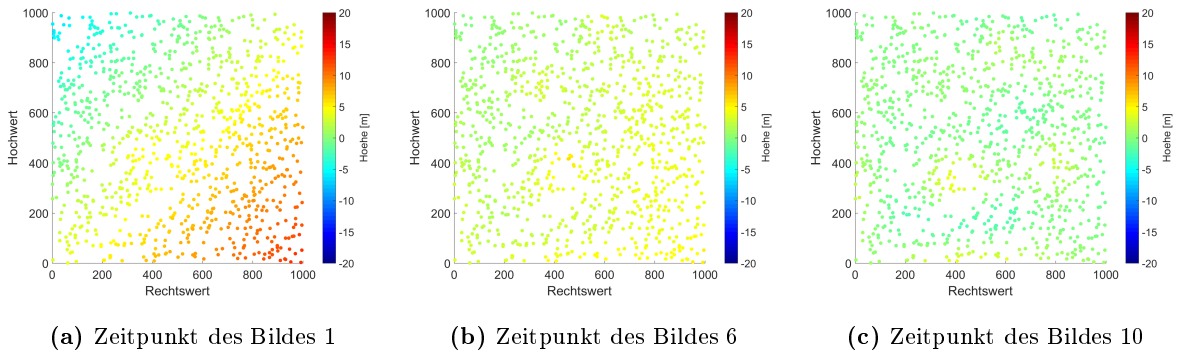
In Abbildung 5.22 ist die ausgeglichene Deformation nach dem in Gleichung (5.9) aufgestellten Gauß-Markov-Modell mit Restriktionen dargestellt. In den vier gezeigten Bildern sind die Orte der Deformationsgebiete zu erkennen. Die Dimensionen und die Ausrichtung dieser Gebiete entsprechen nicht exakt der Simulation, aber die Lage und die Richtung der Deformation stimmt mit den Simulationsdaten überein. Die Zunahme der Deformation ist nicht direkt ersichtlich, da ein von Bild zu Bild variierender konstanter Anteil approximiert wird. Dies lässt sich daran erkennen, dass die Grundfläche außerhalb der Deformationsgebiete zwischen den Farben türkis und gelb wechselt.

Dies entspricht einem Höhenunterschied von zehn Metern. Beim Vergleich der ausgeglichenen Deformation in Abbildung 5.22(b) zum Zeitpunkt des Bildes sechs mit dem entsprechenden Bild der simulierten Signale der Deformation in den Abbildung 5.14(b) und der der Atmosphäre in Abbildung 2.5(b) ist deutlich zu erkennen, dass die lokalen Senkungsgebiete der Atmosphäre nicht im approximierten Signal der Deformation enthalten sind, d.h. herausgefiltert werden.

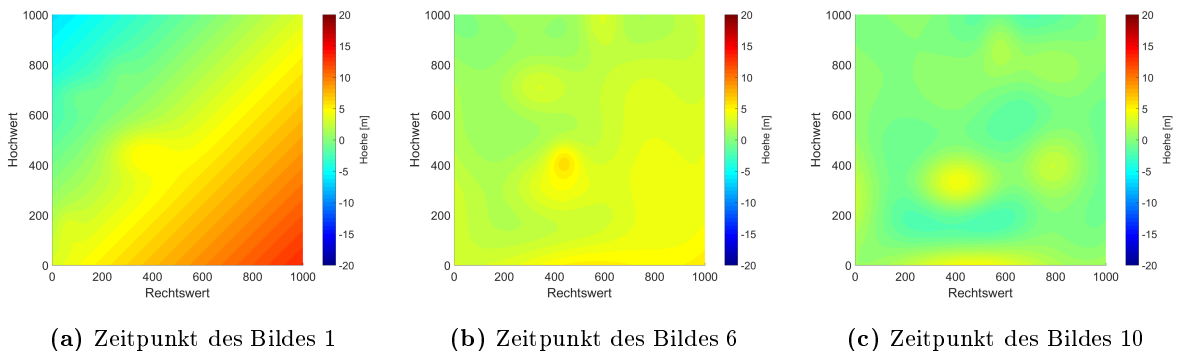


**Abbildung 5.22:** Approximation der Deformation als Beobachtungen mithilfe der linearen Ausgleichung nach Gauß-Markov mit Restriktionen im Beobachtungszeitraum von einem Jahr

In der Abbildung 5.23 sind die Verbesserungen der ausgeglichenen Deformation dargestellt. Durch Differenzbildung der prädizierten Beobachtungen in Abbildung 5.22 und der simulierten Beobachtungen in Abbildung 5.12 können prädizierte Verbesserungen in Abbildung 5.24 erzeugt werden. In der Abbildung 5.24(a) ist eine deutliche Rampe zu erkennen, die die gleichen Eigenschaften wie das atmosphärische Signal im ersten Bild aufweist. Die Rampe ist entgegen gesetzt der Beobachtungen ausgerichtet, da nach  $\tilde{\ell} = \ell + \mathbf{v}$  die addierten



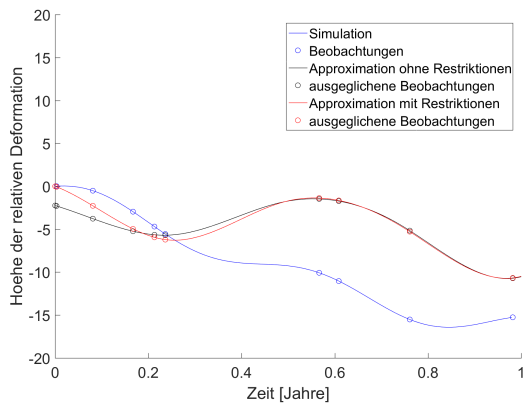
**Abbildung 5.23:** Verbesserungen der linearen Ausgleichung der Deformation nach Gauß-Markov mit Restriktionen im Beobachtungszeitraum von einem Jahren



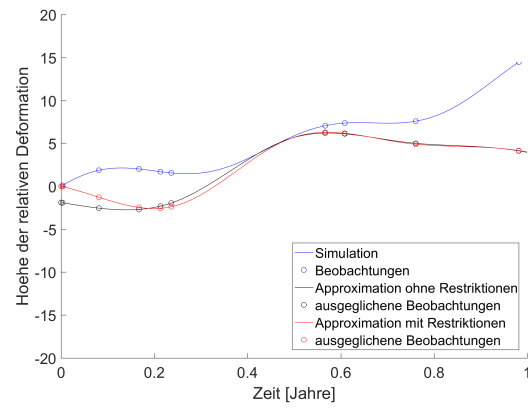
**Abbildung 5.24:** Differenz der Beobachtungen aus Abbildung 5.12 und der linearen Ausgleichung der Deformation nach Gauß-Markov mit Restriktionen aus Abbildung 5.22 im Beobachtungszeitraum von einem Jahr

Beobachtungen und Verbesserungen die ausgeglichenen Beobachtungen, also die Deformation, darstellen. Aufgrund der Annahmen für die Restriktionen ist zu erwarten, dass die Trennung der Signale im ersten Bild optimal sein sollte. Beim Vergleich des Modells der Atmosphäre in Abbildung 2.5 mit den prädizierten Verbesserungen in Abbildung 5.24 ist ersichtlich, dass die simulierte Rampe der Atmosphäre, ausgenommen dem ersten Zeitpunkt, nicht exakt in den Verbesserungen enthalten ist. In Abbildung 5.24 (b) ist zu erkennen, dass ein linearer Trend der Atmosphäre in den Verbesserungen enthalten ist. Allerdings ist ein konstanter Offset zu entnehmen, um den die Verbesserungen (vgl. Abbildung 5.24) im Gegensatz zur simulierten Atmosphäre (vgl. Abbildung 2.5) verschoben sind. Dies bedeutet, dass die Funktionen niedriger Ordnung des atmosphärischen Signals von den B-Splines der Deformationsapproximation größtenteils aufgesogen werden. Diese Charakteristik ist bereits in Abschnitt 3.2.2 beschrieben. Außerdem sind die zum Zeitpunkt sechs heraus gefilterten, lokalen Senkungsgebiete der Atmosphäre deutlich als Hebungsgebiete in der Abbildung 5.24(b) zu erkennen. Dies bedeutet, dass sie in diesem Fall gut durch das Approximationsmodell separiert werden können.

Die approximierten Deformationsraten der zwei Deformationsgebiete in der Abbildung 5.25 weisen die gleiche Größenordnung, wie die simulierten Daten auf. Die zwei Arten der Approximation unterscheiden sich haupt-



(a) Deformationsrate des ersten Berges



(b) Deformationsrate des zweiten Berges

**Abbildung 5.25:** Vergleich der Approximation der Deformationsraten ohne und mit Restriktionen für zwei Deformationsgebiete für den Ausgleich der Deformation im Beobachtungszeitraum von einem Jahr

sächlich zum Anfangszeitpunkt aufgrund des Restriktionsmodells. Es ist zu erkennen, dass eine halbjährliche Periodizität abgeleitet werden kann.



# 6. Schlussbemerkungen

## 6.1 Fazit

Zur Detektion von kleinräumigen bis großräumigen Deformationen der Erdoberfläche werden D-InSAR-Daten in Form von Bildstapeln ausgewertet. Das Ziel dieser Bachelorarbeit besteht darin, die zeitliche Bewegung von den räumlichen Störungen, wie z.B. der Atmosphäre, in jeder Aufnahme eines Bildstapels zu trennen. Dafür werden die Signale durch eine raum-zeitliche Approximation mit Tensor-B-Splines bestimmt.

Zunächst werden in Kapitel 2 die Zusammensetzung und die Erzeugung der Simulationsdaten für die Deformation, die Atmosphäre und die addierten Beobachtungen betrachtet. Diese dienen als Beobachtungen für die Approximation und als Vergleichsdaten für die Bestimmung der Güte der Approximationsmodelle. In Kapitel 3 werden die theoretischen Grundlagen für die Approximation mit Basissplines erarbeitet, die für die Approximationsmodelle benötigt werden. Zur Bewertung der, in Kapitel 4, aufgestellten Approximationsmodelle werden jeweils das Gesamtsignal und die getrennten Signale betrachtet. Im Allgemeinen führen die erhaltenen Ergebnisse aus den angewendeten Approximationsmodellen (vgl. Kapitel 5) auf die Erkenntnis, dass die vorgestellten Modelle in dieser Art nicht zur Separation der Signale geeignet sind.

Konkret ergibt das Approximationsmodell mit der Ausgleichung nach Gauß-Markov ohne Restriktionen, dass das Gesamtsignal gut modelliert werden kann. Allerdings werden die getrennten Signale gegenüber den simulierten Daten überschätzt und nahezu willkürlich angenommen. Die starke Korrelation zwischen dem Deformations- und dem Atmosphärensignal, sowohl untereinander als auch über den gesamten Bildstapel, ist signifikant. Auch durch die Einführung von Restriktionen für die Parameter des ersten Bildes kann nur eine leichte Optimierung des Approximationsproblems und dessen Konditionierung erreicht werden. Durch die formulierten Festsetzung werden die Signale im ersten Bild eindeutig trennbar. In den weiteren Bildern der Approximation kann keine Fixierung der Größenordnung der separierten Signale erlangt werden.

Weiterhin werden verschiedene Aspekte der Problematik des Approximationsmodells betrachtet und dafür werden Lösungsstrategien angeführt. Mit der Anpassung der zeitlichen Auflösung (vgl. Abschnitt 5.3.1) wird veranschaulicht, dass die simulierte, halbjährliche Deformationsrate auflösbar ist, allerdings ist wiederum hauptsächlich die Überschätzung des Deformationssignals ersichtlich. Im Ansatz zur Umgehung des Rangdefektes des Approximationsmodells (vgl. Abschnitt 5.3.2) wird ausschließlich die Deformation als auszugleichende Größe betrachtet. Jedoch kann auch auf diesem Weg keine vollständige Separation der Deformation von der Atmosphäre erreicht werden, da die Basissplines den konstanten Anteil bzw. die Rampen des atmosphärischen Signals aufsaugen und als Anteil der Deformation interpretieren.

Insgesamt wird gezeigt, dass die Separation der Signale, aufgrund der Problematik des modellbedingten Rangdefektes, nicht lösbar ist. In der Arbeit wird deutlich, dass dies hauptsächlich damit zu begründen ist, dass die Flexibilität, die die B-Splines aufweisen, dazu führen, dass keine eindeutige Trennung der Signale möglich ist. Dies ist der Fall, da einige Signalanteile beiden Signalen zugeordnet werden können.

Abschließend kann festgehalten werden, dass die vorgestellte Aufstellung der Approximationsmodelle eine Basis für weitere Untersuchungen bieten kann, um die Separation der langzeitlichen und bildweisen Signale durchführen zu können.

## 6.2 Ausblick

Anhand der Erkenntnisse, die aus den Approximationsmodellen zur Trennung der Signale eines Bildstapels und deren Umsetzung gewonnen werden konnten, lassen sich einige Punkte formulieren, die im Bezug auf

die Lösung des Problems noch genauer untersucht werden könnten. Wie bereits in Abschnitt 5.3.2 angedeutet, gibt es weitere Möglichkeiten zur Variation des Approximationsmodells. Durch eine Verbesserung bzw. Umgehung des Rangdefektes, sollte eine Trennung der Signale prinzipiell möglich sein. Der entscheidende Schritt dabei besteht darin, die Signalanteile eindeutig und richtig der Deformation und der Atmosphäre zuzuordnen.

Einerseits könnte dies durch das Ansetzen verschiedener, unabhängiger Basisfunktionen für das Deformations- und das Atmosphärensignal erzielt werden. Andererseits wäre auch die Möglichkeit denkbar, eine Signaltrennung über die Darstellung der Signale in komplementären Räumen zu erreichen. Die Idee dabei besteht darin, dass nur eines der Signale, z.B. das Deformationssignal, als ausgleichende Größe, wie im Ansatz in Abschnitt 5.3.2, betrachtet wird. Das Atmosphärensignal wird folglich zusammen mit dem Rauschen den Verbesserungen zugeordnet. Da die ausgeglichenen Beobachtungen und die Verbesserungen komplementär sind, d.h. orthogonal zueinander stehen, sollte eine eindeutige Zuordnung der Signalanteile zum Atmosphären- und Deformationssignal möglich sein. Für die Umsetzung bedeutet dies, dass im Anschluss an die Approximation der Deformation eine Trennung der Verbesserungen in das Atmosphärensignal und das Rauschen erfolgen könnte.

Eine weitere Möglichkeit zur Separation der Signale könnte dabei über eine Tiefpassfilterung durchgeführt werden. Unter der Annahme, dass die Deformation ein langwelliges Signal und die Atmosphäre ein kurzwelliges Signal ist, kann die Trennung über die Größe der Frequenz vorgenommen werden. Dabei kann das systematische Signal mit einer bestimmten Wellenlänge herausgefiltert werden. Mit einer Tiefpassfilterung werden die niederfrequenten Signale, wie z.B. das Deformationssignal als Beobachtungen, abgespalten. In diesem Fall wird die Atmosphäre aus dem Signal eliminiert. Im Gegensatz dazu, kann mit einer Hochpassfilterung das Signal der Atmosphäre den Filter passieren. Somit bleibt das atmosphäre Signal erhalten und das Deformationssignal wird unterdrückt. Das Problem dabei ist, dass sowohl die Deformation als auch die Atmosphäre keine eindeutigen Frequenzen aufweisen. Da die Atmosphäre sowohl langwellige, als auch kurzwellige Signalanteile enthält, ist diese frequenzabhängige Trennung nicht trivial lösbar, da eine Zuordnung der Frequenzen nicht eindeutig ist.

Um eine Güte eines abgewandelten Approximationsmodells validieren zu können, wäre es sinnvoll weitere Parameter in der Simulationsumgebung zu variieren. Zum Beispiel könnte durch die Simulation einer komplexeren Atmosphäre oder der Variation der Größenordnungen des Deformations- und Atmosphärensignals Stärken und Schwächen einer Approximation herausgearbeitet werden.

Sollten diese Variationen überprüft und eine Modellvariante ohne Rangdefekt erreicht sein, so sollte eine Übertragung der Approximationsmodelle von Simulationsdaten auf Realdaten eines D-InSAR-Bildstapels erfolgen.

# A. Bezeichnungen

## Allgemeines

- $I$  Anzahl der Bilder eines Bildstapels
- $i$  Index in der Zeit, Nummer eines Bildes im Bildstapel
- $j$  Index in x-Richtung
- $k$  Index in y-Richtung

## Zufallszahlen

- $\mathcal{L}$  Zufallsvektor
- $\Sigma\{\mathcal{L}\}$  Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors

## Operatoren

- $*$  Faltung
- $\circ$  elementweise Multiplikation
- $\otimes$  Kronecker-Produkt
- $(:)$  Vektorisierung einer Matrix
- $\text{Rang}(\mathbf{A})$  Rang einer Matrix

## Matrizen und Vektoren

- $a, \alpha$  Skalar
- $\mathbf{a}$  Vektor
- $\mathbf{A}$  Matrix
- $\mathbf{A}_{[m \times n]}$  Matrix der Dimension  $m \times n$
- $a_{mn}$  Element in Zeile  $m$  und Spalte  $n$  einer Matrix
- $\mathbf{A}(:, i)$   $i$ -te Spalte der Matrix
- $\mathbf{A}^{-1}$  Inverse einer Matrix
- $\mathbf{A}^T$  Transponierte einer Matrix
- $\mathbf{1}, \mathbf{1}_{[m]}$  Einheitsmatrix (der Dimensionen  $m \times m$ )
- $\mathbf{0}$  Null-Matrix

## Verwendete Formelsymbole

### Differentiell-interferometrische Phase

- $\Phi$  Differentiell-interferometrische Phase
- $\Phi_{\text{defo}}$  Phasenanteil der Deformation
- $\Phi_{\text{atmo}}$  Phasenanteil der Atmosphäre
- $\Phi_{\Delta\text{orbit}}$  Orbitfehler der Satellitenbahndaten
- $\Phi_{\Delta\text{topo}}$  Höhenfehler
- $\Phi_{\text{noise}}$  zufälliges Signalrauschen

**Simulation**

$t_i$	absoluter Zeitpunkt des Bildes $i$
$y(t_i)$	Höhe der vertikalen Deformation zum Zeitpunkt $t_i$ , Funktion der Deformationsrate
$a, b, c, d, e, f$	Koeffizienten der Funktion der Deformationsrate $y(t_i)$ für die Starthöhe, die lineare Änderungsrate und die jährliche bzw. halbjährliche Periodizität
$n_g, g_j, H, T_{gj}$	Parameter zur Modellierung von Offsets der Funktion der Deformationsrate $y(t_i)$
$\nu_i$	zufälligen Messfehler in der Funktion der Deformationsrate $y(t_i)$
$y(t_i, x, y)$	Höhe der vertikalen Deformation eines Punktes an der Stelle $(x, y)$ zum Zeitpunkt $t_i$
$a(x, y), b(x, y), c(x, y), d(x, y), e(x, y), f(x, y)$	ortsabhängige Koeffizienten der Funktion der Deformationsrate

**Methodik der Tensor-B-Splines**

$x$	Stützstelle auf der x-Achse
$f(x)$	Funktion eines Polynom-Splines abhängig vom Ort $x$
$l, m$	Grad der Funktion eines Polynom-Splines bzw. Ordnung eines B-Splines
$\kappa_j$	Knoten $j$ eines Polynom-Splines
$n, q$	Anzahl der Knoten einer B-Spline-Basisfunktion in x- bzw. y-Richtung
$B_j^l(x)$	B-Spline-Basisfunktionen mit dem Grad $l$ am Knoten $j$
$\Delta\kappa$	Knotenabstand
$\hat{x}$	skalentransformierte Stützstelle
$h(x)$	Funktion mit einer Linearkombination von B-Splines abhängig vom Ort $x$
$a_j$	auszugleichende Koeffizienten zur Skalierung der Basisfunktionen
$s, p$	ordnungsabhängige Faktoren
$B_{jk}^{l,m}(x, y)$	zweidimensionaler B-Spline in Abhängigkeit des Ortes $(x, y)$ an den Knoten $j, k$ und mit den Ordnungen $l, m$ in der x- und y-Richtung
$\{\kappa_j\}$	Knotenmenge in x-Richtung mit $n$ Knoten
$\{\lambda_k\}$	Knotenmenge in y-Richtung mit $q$ Knoten
$B_{jk}(x, y)$	zweidimensionaler B-Spline in Abhängigkeit des Ortes $(x, y)$ an den Knoten in x- ( $j$ ) und y-Richtung ( $k$ )
$h(x, y)$	Funktion eines Tensor-B-Splines abhängig vom Ort $(x, y)$
$\mathbf{A}_{ij}$	Koeffizientenmatrix mit den Skalierungsfaktoren der B-Spline-Basisfunktionen
$a_{ij}$	Eintrag der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}_{ij}$

**Gauß-Markov-Modell**

$\ell$	Beobachtungsvektor
$\mathbf{x}$	Parametervektor
$\mathbf{v}$	Verbesserungsvektor
$f(\mathbf{x})$	linearer funktionaler Zusammenhang in Abhängigkeit der Parameter $\mathbf{x}$
$\mathbf{A}$	Designmatrix mit den Koeffizienten der Funktion $f(\mathbf{x})$
$\Sigma\{\mathcal{L}\}$	positiv definite Kovarianzmatrix der Beobachtungen
$\tilde{\ell}$	Schätzwerte der Beobachtungen
$\tilde{\mathbf{x}}$	Schätzwerte der Parameter

## Approximationsmodell

$\ell_{ijk}$	Eintrag des Beobachtungsvektors $\ell$ an den Stützstellen $i, j$ und $k$
$\ell\{i\}$	Beobachtungsblock des Beobachtungsvektors $\ell$ zum Bild $i$
$\mathbf{x}\{i\}, \mathbf{y}\{i\}$	Stützstellen der Beobachtungen in x- und y-Richtung
$\mathbf{t}$	Stützstellen der Beobachtungen in der Zeit, absolute Zeitpunkte der Bilder
$J, K$	Anzahl der Pixel in x- und y-Richtung
$\sigma_0^2$	a priori Varianzfaktor
$v_{ijk}$	Eintrag des Verbesserungsvektors $\mathbf{v}$ an den Stützstellen $i, j$ und $k$
$f(t_i, x_j, y_k)$	funktionaler Zusammenhang des Deformationssignals
$g^{(i)}(x_j, y_k)$	funktionaler Zusammenhang des Atmosphärensignals
$b_{ijk}$	Koeffizient zur Skalierung der B-Splines des Deformationssignals zu den Stützstellen $i, j$ und $k$
$a_{jk}^{(i)}$	Koeffizient zur Skalierung der B-Splines des Atmosphärensignals zum Bild $i$ und zu den Stützstellen $j$ und $k$
$I_{\text{Defo}}, J_{\text{Defo}}, K_{\text{Defo}}$	Anzahl der angesetzten Knoten für die Deformation in der Zeit, der x- und y-Richtung
$J_{\text{Atmo}}, K_{\text{Atmo}}$	Anzahl der angesetzten Knoten für die Atmosphäre in der x- und y-Richtung
$\{\boldsymbol{\theta}_{\text{Defo}}\}, \{\boldsymbol{\kappa}_{\text{Defo}}\}, \{\boldsymbol{\lambda}_{\text{Defo}}\}$	Knotenmenge für die Stützstellen der B-Splines der Deformation in der Zeit, der x- und y-Richtung
$\{\boldsymbol{\kappa}_{\text{Atmo}}\}, \{\boldsymbol{\lambda}_{\text{Atmo}}\}$	Knotenmenge für die Stützstellen der B-Splines der Atmosphäre in der x- und y-Richtung
$\mathbf{A}_x$	1D-Designmatrix in x-Richtung
$n$	Anzahl der Beobachtungen pro Bild
$\mathbf{A}_{\text{Defo},t}, \mathbf{A}_{\text{Defo},x}, \mathbf{A}_{\text{Defo},y}$	1D-Designmatrizen für die Deformation in der Zeit, in x- und y-Richtung
$\mathbf{A}_{\text{Atmo},x}, \mathbf{A}_{\text{Atmo},y}$	1D-Designmatrizen für die Atmosphäre in x- und y-Richtung
$\mathbf{A}_{\text{Atmo},xy}$	flächenhafte Kombination der 1D-Designmatrizen für die Atmosphäre
$\mathbf{A}_{\text{Atmo}}$	Designmatrix der Atmosphäre
$\mathbf{A}_{\text{Defo},xy}$	flächenhafte Kombination der 1D-Designmatrizen für die Deformation
$\mathbf{A}_{\text{Defo}}$	Designmatrix der Deformation
$\mathbf{A}_{jk}$	Parametermatrix der Atmosphäre
$\mathbf{A}_{jk}^{(i)}$	Parametermatrix der Atmosphäre für das Bild $i$
$\mathbf{A}_{jk}^{(i)}(\cdot)$	Parametervektor der Atmosphäre für das Bild $i$
$a_{jk}^{(i)}$	Eintrag der Parametermatrix der Atmosphäre für das Bild $i$
$\mathbf{B}_{ijk}$	3D-Parametermatrix der Deformation
$\mathbf{B}_{(i)jk}$	Parametermatrix der Deformation für einen zeitlichen B-Spline $B_i^3(t)$
$b_{ijk}$	Eintrag der Parametermatrix der Deformation für einen zeitlichen B-Spline $B_i^3(t)$
$\mathbf{x}_{\text{Atmo}}, \mathbf{A}_{jk}(\cdot)$	Parametervektor der Atmosphäre
$\mathbf{x}_{\text{Defo}}, \mathbf{B}_{ijk}(\cdot)$	Parametervektor der Deformation

**Gauß-Markov-Modell mit Restriktionen**

$\mathbf{H}^T$	Bedingungsmatrix für die Parameter
$\mathbf{b}$	Bedingungsvektor
$\tilde{\mathbf{k}}$	Korrelaten
$\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$	Teilmatrizen der Gesamtinverse der Normalgleichungsmatrix mit Nebenbedingungen
$m$	Anzahl der Parameter
$r$	Anzahl der Restriktionsgleichungen
$\mathbf{H}_t, \mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y$	1D-Restriktionsmatrizen in der Zeit, in x- und y-Richtung
$\mathbf{H}_{xyt}$	Block der Restriktionsmatrix als Kombination aus den 1D-Restriktionsmatrizen $\mathbf{H}_t, \mathbf{H}_x$ und $\mathbf{H}_y$

**Prädiktion der geschätzten Signale**

$\bar{\mathbf{A}}_{\text{Atmo},xy}$	flächenhafte Kombination der 1D-Designmatrizen für die Atmosphäre
$\bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo},xy}$	flächenhafte Kombination der 1D-Designmatrizen für die Deformation
$\bar{\mathbf{A}}_{\text{Atmo},x}, \bar{\mathbf{A}}_{\text{Atmo},y}$	1D-Designmatrizen für die Atmosphäre in x- und y-Richtung
$\bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo},x}, \bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo},y}$	1D-Designmatrizen für die Deformation in x- und y-Richtung
$\bar{\mathbf{A}}$	Designmatrix zur Bestimmung der prädizierten Beobachtungen
$\bar{\mathbf{A}}_{\text{Atmo}}$	Designmatrix der Atmosphäre zur Bestimmung der prädizierten Beobachtungen
$\bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo}}$	Designmatrix der Deformation zur Bestimmung der prädizierten Beobachtungen
$\bar{\mathbf{A}}_{\text{Defo},t}$	1D-Designmatrix für die Atmosphäre in der Zeit
$\bar{\ell}_{\text{Atmo}}$	prädizierte Beobachtungen der Atmosphäre
$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{Atmo}}$	Schätzung der Parameter der Atmosphäre
$\bar{\ell}_{\text{Defo}}$	prädizierte Beobachtungen der Deformation
$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{Defo}}$	Schätzung der Parameter der Deformation

**Problematik des Approximationsmodells**

$t$	Periodendauer in Tagen
$T$	Periodendauer in Jahren
$f$	maximal aufzulösende Frequenz
$\Delta\kappa$	Mindestabstand der B-Splines für ein Jahr
$J_x, K_y$	Anzahlen der B-Splines in x- und y-Richtung für die Atmosphäre und die Deformation
$\mathbf{A}_{xy}$	flächenhafte Kombination der 1D-Designmatrizen aus x- und y-Richtung für die Atmosphäre und die Deformation
$\mathbf{N}$	Normalgleichungsmatrix

## B. Abkürzungen

B-Spline	Basisspline
DHM	Digitales Höhenmodell
D-InSAR	Differentielle SAR Interferometrie
SAR	Synthetic Aperture Radar (Radar mit synthetischer Apertur)

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Simulation der ortsabhängigen Deformation . . . . .	6
2.2	Auswirkungen verschiedener Wetterlagen . . . . .	7
2.3	Deformationsraten zweier Deformationsgebiete . . . . .	9
2.4	Modell der Deformation . . . . .	9
2.5	Modell der Atmosphäre . . . . .	9
2.6	Modell der Beobachtungen als Summe der Deformation und der Atmosphäre . . . . .	10
2.7	Pixelweise Beobachtungen als Summe der Deformation, der Atmosphäre und des Rauschens . . . . .	10
3.1	Verschiedene B-Spline Basisfunktionen zu gleichabständigen Knoten . . . . .	12
3.2	Linearer Anteil bei der Kombinationen von kubischen B-Splines . . . . .	14
3.3	Schematische Darstellung der Schätzung eines B-Splines . . . . .	14
4.1	Erweiterte Knotenmenge . . . . .	19
4.2	Ansetzen der B-Splines an erweiterter Knotenmenge . . . . .	19
4.3	Darstellung verschiedener Gittertypen bei der Approximation mit B-Splines . . . . .	20
4.4	Struktur der 1D-Designmatrizen der $y$ -Richtung $A_{\text{Defo},y}$ und $A_{\text{Atmo},y}$ . . . . .	21
4.5	Struktur der Designmatrix $A$ . . . . .	23
4.6	Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix des GM-Modells mit gleichabständigen Knoten . . . . .	30
5.1	Approximation der Beobachtungen . . . . .	31
5.2	Differenzbilder aus den simulierten und approximierten Beobachtungen . . . . .	32
5.3	Approximation der Deformation . . . . .	32
5.4	Approximation der Atmosphäre . . . . .	32
5.5	Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix der Ausgleichung nach GM . . . . .	33
5.6	Approximation der Beobachtungen mit Restriktionen . . . . .	34
5.7	Differenzbilder aus den simulierten und approximierten Beobachtungen mit Restriktionen . . . . .	35
5.8	Differenzen der Approximationen mit und ohne Restriktionen . . . . .	35
5.9	Approximation der Deformation mit Restriktionen . . . . .	35
5.10	Approximation der Atmosphäre mit Restriktionen . . . . .	36



---

5.11	Eigenwerte der Normalgleichungsmatrix der Ausgleichung nach GM mit Restriktionen . . . . .	37
5.12	Modell der Beobachtungen, Beobachtungszeitraum 1 Jahr . . . . .	38
5.13	Deformationsraten zweier Deformationsgebiete, Beobachtungszeitraum 1 Jahr . . . . .	39
5.14	Modell der Deformation, Beobachtungszeitraum 1 Jahr . . . . .	39
5.15	Approximation der Beobachtungen, Beobachtungszeitraum 1 Jahr . . . . .	40
5.16	Approximation der Beobachtungen mit Restriktionen, Beobachtungszeitraum 1 Jahr . . . . .	40
5.17	Approximation der Deformation, Beobachtungszeitraum 1 Jahr . . . . .	41
5.18	Approximation der Deformation mit Restriktionen, Beobachtungszeitraum 1 Jahr . . . . .	41
5.19	Approximation der Atmosphäre, Beobachtungszeitraum 1 Jahr . . . . .	42
5.20	Approximation der Atmosphäre mit Restriktionen, Beobachtungszeitraum 1 Jahr . . . . .	42
5.21	Approximation der Deformationsraten, Beobachtungszeitraum 1 Jahr . . . . .	43
5.22	Approximation der Deformation als Beobachtungen mit Restriktionen, 1 Jahr . . . . .	44
5.23	Verbesserungen der Ausgleichung der Deformation mit Restriktionen, 1 Jahr . . . . .	45
5.24	Differenz der Beobachtungen und der ausgeglichenen Deformation mit Restriktionen, 1 Jahr .	45
5.25	Approximation der Deformationsraten für den Ausgleich der Deformation, 1 Jahr . . . . .	46

# Literaturverzeichnis

- BIUCAS-DIAS, J. UND G. VALADÃO (2007): *Phase Unwrapping via Graph Cuts*. IEEE Transactions on Image Processing 16(3), S. 698–709.
- CASU, F. (2009): *The Small BAseline Subset technique: performance assessment and new developments for surface deformation analysis of very extended areas*. Dissertation, Universität Cagliari, Cagliari, Italien.
- DING, X.-L., Z.-W. LI, J.-J. ZHU, G.-C. FENG UND J.-P. LONG (2008): *Atmospheric Effects on InSAR Measurements and Their Mitigation*. Sensors 8(9), S. 5426–5448.
- FAHRMEIR, L., T. KNEIB UND S. LANG (2009): *Regression: Modelle, Methoden und Anwendungen*. Springer, Berlin, 2. Auflage.
- FERRETTI, A., C. PRATI UND F. ROCCA (2001): *Permanent Scatterer in SAR Interferometry*. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing 39(1), S. 8–20.
- KÖHLER, J. (2013): *Ermittlung des atmosphärischen Phasenanteils in interferometrischen SAR-Daten und Vergleich mit in situ Wetterdaten*. Bachelorarbeit, Institut für Geodäsie und Geoinformation der Universität Bonn, Bonn.
- KOCH, K.-R. (1997): *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. Dümmler, Bonn, 3. Auflage.
- MEISSL, P. (1982): *Least square adjustment: a modern approach*, Band 43 von *Mitteilungen der Geodätischen Institute der TU Graz*. Geodätischen Institute der Universität Graz, Graz, Österreich.
- MOGHTESED-AZAR, K., A. MIRZAEI, H. R. NANKALI UND F. TAVAKOLI (2012): *Investigation of correlation of the variations in land subsidence (detected by continuous GPS measurements) and methodological data in the surrounding areas of Lake Urmia*. Nonlinear Processes in Geophysics 19, S. 675–683.
- SCHÄFER, M. (2012): *Atmosphäre als Phasenbestandteil der differentiellen Radarinterferometrie und ihr Einfluss auf die Messung von Höhenänderungen*. Dissertation, Fakultät für Energie- und Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Clausthal, Clausthal.
- SÜNKEL, H. (1985): *Fourier Analysis of Geodetic Networks*. In: E. Grafarend und F. Sansò (Hg.), *Optimization and Design of Geodetic Networks*, S. 257–300. Springer, Berlin Heidelberg.