

Institut für Geodäsie und Geoinformation

Professur für Theoretische Geodäsie

Berechnung von Gradienten-Feldern und deren
Unsicherheiten aus einer vorgegebenen
Oberflächenapproximation mit lokalen Basisfunktionen

Bachelorarbeit

im Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

an der Landwirtschaftlichen Fakultät

der Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität

Bonn

vorgelegt am ?? . ?? 2016 von

Ansgar Dreier

aus Schwabmünchen

Bonn 2016



Erster Prüfer: Prof. Dr. techn. W.-D. Schuh

Zweiter Prüfer: Dr.-Ing. J. M. Brockmann

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Bonn, ??????. August 2016

Ansgar Dreier

Berechnung von Gradienten-Feldern und deren Unsicherheiten aus einer vorgegebenen Oberflächenapproximation mit lokalen Basisfunktionen

Zusammenfassung

Durch langjährige Missionen von Altimetersatelliten erfolgt eine kontinuierliche Messung der gesamten Meeresoberfläche. Eine Mittelung dieser Messungen über mehrere Jahre führt zu der gemittelten Meereshöhe, die als *Mean Sea Surface* - MSS bezeichnet wird. Aus weiteren Satellitenmissionen wie beispielsweise der GOCE (*Gravity field and steady-state ocean circulation explorer*) Mission erfolgt eine Messung des Schwerefeldes der Erde. Während eines Vorverarbeitungsprozesses (?) wird durch die Differenzbildung aus mittlerer Meereshöhe und Schwerefeld, die mittlere dynamische Topographie - MDT bestimmt. Die Neigung dieser Oberfläche ist proportional zu den Strömungsgeschwindigkeiten des Ozeans. Ziel dieser Bachelorarbeit ist es, aus der mittleren dynamischen Topographie signifikante Ozeanströmungen abzuleiten. Grundlage für die Berechnungen bildet ein Modell der MDT, welches auch bei ? verwendet wurde. Zu einer entsprechenden Parametrisierung der MDT werden Unsicherheitsinformationen in Form einer Kovarianzmatrix der Beobachtung bereitgestellt.

Im ersten Schritt dieser Bachelorarbeit wird ein Verfahren gesucht, mit dem Gradienten aus einer gegebenen Oberfläche berechnet werden können. Es soll eine Lösung mit Hilfe einer sinnvollen Interpolationsmethode gefunden werden. Zwar verhindert die Wahl der Interpolation eine weitere Approximation an das MDT Modell, allerdings verspricht sie auch eine gute Anpassung an die gegebenen Datensätze. Die Berechnung erfolgt dabei durch die Anwendung einer Spline-Interpolation. Durch diesen Ansatz der Interpolation resultieren die gesuchten Gradienten direkt als Parameter und müssen nicht nachträglich bestimmt werden. Der nächste Abschnitt dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Umrechnung der Gradienten in Ozeanströmungen. Diese Umrechnung enthält einerseits physikalische Einflüsse wie die Corioliskraft und die Erdbeschleunigung, andererseits aber auch weitere Umrechnungsfaktoren um letztendlich Geschwindigkeiten in entsprechender Einheit zu erhalten. Die dargestellten Berechnungsmethoden werden zunächst an einem stark geglätteten Modell der mittleren dynamischen Topographie evaluiert und daraufhin auf ein raueres Modell angewendet. Grundsätzlich liegt der Schwerpunkt der Betrachtung auf dem Bereich des Golfstroms bzw. dem Nordatlantik. Dieser ist insbesondere für Europa von großem Interesse und dient daher als Hauptanwendungsbeispiel dieser Arbeit.

Zusätzlich wird neben der Berechnung von Ozeanströmungen auch eine entsprechende Varianzfortpflanzung hergeleitet. Mit dieser lassen sich die Ungenauigkeiten der ermittelten Strömungen bestimmen und analysieren. Für die weitere Berechnung ergibt sich hier eine vollständige Kovarianzmatrix der Parameter.

Mit diesen Unsicherheitsinformationen können im weiteren Verlauf die berechneten Strömungen einem Hypothesentest unterzogen werden. Durch dieses Vorgehen sollen insbesondere signifikante Strömungen für ein folgendes Strömungsmodell identifiziert werden. Für diese Form des stochastischen Tests werden unterschiedliche Methoden dargestellt und verglichen. Dabei handelt es sich in erster Linie um einen Parametertest und im Folgenden um das Testen von Restriktionen.

Abschließend werden die berechneten Ozeanströmungen der mittleren dynamischen Topographie in Form einer geostrophischen Strömung bestimmt und anschaulich dargestellt. Für dieses Strömungsmodell wurden die zuvor erarbeiteten Hypothesentests angewendet, um nicht signifikante Strömungen aus dem Modell zu eliminieren. Des Weiteren wird die Korrelation zwischen den Ozeanströmungen berechnet und veranschaulicht. Es verdeutlicht, wie relevant benachbarte Knotenpunkte für die Berechnung einer Strömungsgeschwindigkeit sind.

Estimation of gradient fields and their uncertainties from a preprocessed surface approximation with local basic functions

Abstract

A continuous measurement of the entire ocean results from long-standing missions of altimeter satellites. The average of these measurements over several years is called the mean sea surface - MSS. Other satellite missions like GOCE (*Gravity field and steady-state ocean circulation explorer*) are measuring the gravity field of the world. During a preprocessing process (?) the mean dynamic topography (MDT) will be estimated by the subtraction of the mean sea surface and the gravity field. The slope of this surface is proportional to the ocean currents. The objective of this bachelor thesis is to derive significant ocean currents from the mean dynamic topography (MDT). The basis for all calculations is a model of the MDT, which was also used in ?. To obtain an appropriate parameterization of the MDT uncertainty information is provided in the form of a covariance matrix of the observations.

In the first step of this bachelor thesis a method is sought, which calculates the gradients of a given surface. A solution shall be found by means of a suitable interpolation method. The choice of the interpolation prevents a further approximation to the model of the MDT, however, it promises a good adaptation to the given data sets. This estimation is performed by applying a spline interpolation. This approach of interpolation provides the gradients directly as parameters and thus they must not be determined subsequently. The next section of this thesis deals with the conversion of the gradients into ocean currents. On the one hand, this conversion includes physical factors such as the Coriolis force and the acceleration of gravity, but on the other hand additional conversion factors to finally obtain current velocities in the corresponding unit. Firstly, the depicted calculation methods shall be evaluated by using an extremely smooth model of the mean dynamic topography. In a second step these methods of calculation will be applied to a rougher model. Basically the focus is on the area of the Gulf Stream and the North Atlantic. This is particularly of great interest for Europe and will mainly be presented area in this work.

In addition to the calculation of ocean currents it will be derived the propagation of uncertainty. With this method the inaccuracy of the ocean currents can be determined and analyzed. For the further calculation the propagation of uncertainty results in a full covariance matrix of the parameters.

In the further process this uncertainty information is used to perform a hypothesis test with the ocean currents. This procedure should particularly identify significant currents for a resulting ocean current model. For this form of stochastic testing different methods are described and compared. These are primarily a parameter test and in the following the testing of restrictions.

To conclude, the computed ocean currents of the mean dynamic topography are determined and illustrated in the form of geostrophic currents. The different hypothesis tests are used to identify and eliminate not significant ocean currents. Furthermore, the correlation between the ocean currents are calculated and demonstrated. It underlines the importance of neighboring nodes to calculate the ocean current velocity.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Datengrundlage	2
2.1	Meereshöhenbestimmung durch Altimetrie	2
2.2	Schwerefeldbestimmung durch GRACE und GOCE	3
2.3	Modellbildung der mittleren dynamischen Topographie	3
2.4	Finite Elemente zur Prozessierung der MDT	5
3	Mathematische Grundlagen	7
3.1	Strömungsberechnung durch das geostrophische Gleichgewicht	7
3.2	Gradientenberechnung des MDT Modells	10
3.2.1	Methode der Spline-Interpolation	10
3.2.2	Varianzfortpflanzung für die Spline-Interpolation	13
3.2.3	Optimiertes Berechnungsverfahren der Spline-Interpolation	14
3.3	Hypothesentest für die Strömungsgeschwindigkeiten	17
3.3.1	Hypothesenüberprüfung durch einen Parametertest	17
3.3.2	Hypothesenüberprüfung durch das Testen von Restriktionen	19
4	Anwendung des Verfahrens	22
4.1	Implementierung der Strömungsberechnung	22
4.2	Anwendung auf Datengrundlage nach ?	27
4.3	Implementierung der Varianzfortpflanzung für die Spline-Interpolation	28
4.4	Anwendung der Hypothesentests	29
4.4.1	Parametertest mit einer Strömung	30
4.4.2	Parametertest mit zwei Strömungskomponenten	31
4.4.3	Testen von Restriktionen	32
4.5	Vergleich der angewendeten Hypothesentests	34
4.6	Untersuchung der Korrelationen zwischen den Strömungen	35

5	Schlussbemerkung	38
5.1	Fazit	38
5.2	Ausblick	38
A	Bezeichnungen	i
B	Abkürzungen	iii
	Verzeichnisse	iv
	Abbildungsverzeichnis	iv
	Literatur	vi
	Oberseminar	vii

1. Einleitung

Die weltweite Meeresoberfläche wird seit einigen Jahren durch unterschiedliche Altimetersatelliten vermessen. Aus diesen Zeitreihen ergibt sich eine mittlere Meereshöhe, die als *Mean Sea Surface* - MSS bezeichnet wird. Durch Differenzbildung dieser Meereshöhe und einem durch weitere Satellitenmissionen bestimmten Geoidmodells folgt die mittlere dynamische Topographie - MDT. Aufgrund der Proportionalität zwischen den Neigungen dieser Oberfläche und den Strömungsgeschwindigkeiten der Ozeane, lassen sich aus der mittleren dynamischen Topographie letztendlich Meeresströmungen für ein gewünschtes Gebiet ableiten. Nach einem Vorverarbeitungsprozess (?), wie in Kapitel 2 beschrieben, resultiert eine Parametrisierung dieser mittleren dynamischen Topographie durch lokale Basisfunktionen auf einem vorher festgelegten Gitter. Sowohl für die angesetzten Basisfunktionen als auch für das verwendete Gitter sind diverse Realisierungen möglich. Die verwendeten Grundlagen werden in Kapitel 2 kurz erläutert.

Die Parametrisierung der mittleren dynamischen Topographie - mit zugehörigen Unsicherheitsinformationen in Form einer Kovarianzmatrix der Parameter - erfolgt über den gesamten Ozean. Durch die hohe Relevanz des Golfstroms für die Ozeanzirkulation soll insbesondere der Bereich des Nordatlantiks untersucht werden. Als Ausgangspunkt für diese Bachelorarbeit dient daher die Parametrisierung mit einer entsprechenden Kovarianzmatrix wie sie auch von ? verwendet wird.

Auf Grundlage der Parametrisierung soll eine Berechnung der Gradienten bzw. Neigung der Flächen in einem beliebigen Punkt erfolgen. Diese Gradienten sind grundsätzlich proportional zu den Ozeanströmungen und können durch weitere Umrechnungen in diese überführt werden. Dazu zählen einerseits die Einflüsse von physikalischen Größen wie der Erdbeschleunigung und Corioliskraft, andererseits aber auch die Umrechnung der Gradienten in entsprechende Geschwindigkeiten. Dieses Vorgehen wird in Kapitel 3 verdeutlicht. Für die Berechnung der Gradienten soll zunächst eine geeignete Berechnungsmethode gesucht werden. Der Schwerpunkt liegt hier bei der Anwendung einer Interpolationsmethode, um zusätzliche Approximationen an das Modell der mittleren dynamischen Topographie zu vermeiden. Die hier erarbeitete Berechnungsmethode soll zunächst für einen eindimensionalen Fall überprüft und daraufhin auf die zweidimensionale Problemstellung übertragen werden. Für die Evaluation dieser Methode wird ein stark geglättetes und höher aufgelöstes Modell der MDT verwendet. Mit Hilfe einer Varianzfortpflanzung kann dann eine Berechnung der Ungenauigkeit für diese Gradienten durchgeführt werden. Mit der daraus resultierenden Kovarianzmatrix der Parameter können die Strömungen anschließend auf ihre Signifikanz überprüft werden. Die Überprüfung der zuvor ermittelten Strömungsgeschwindigkeiten wird mit einem Hypothesentest durchgeführt. Für diesen stochastischen Test soll ein entsprechendes Testverfahren aufgestellt und mit anderen Verfahren verglichen werden (Kapitel 3).

Zum Abschluss werden die berechneten Ozeanströmungen der mittleren dynamischen Topographie in Form einer geostrophischen Strömung bestimmt und anschaulich dargestellt (Kapitel 4). Durch die zuvor erarbeiteten Signifikanztests können diese Ozeanströmungen im Hinblick auf ihre Relevanz überprüft werden. Die dabei als nicht signifikant getesteten Strömungen können infolgedessen aus dem Strömungsmodell eliminiert werden. Außerdem soll abschließend die Korrelation zwischen den signifikanten Strömungen berechnet und dargestellt werden.

2. Datengrundlage

Zur Bestimmung eines Ozeanzirkulationsmodells und damit den Strömungen im Ozean werden für die Berechnung zunächst unterschiedliche physikalische und geometrische Bezugsflächen benötigt. Eine Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes bildet das Geoid. Dies ist eine Fläche mit gleichbleibendem Potential und dient als Referenzfläche für alle physikalischen Höhen. Falls es keine Bewegungen in den Ozeanen geben würde, entspräche ein Geoidmodell der Meeresoberfläche. Die Differenz zwischen Meeresoberfläche und Geoid entspricht $\pm 1m$ (? , S. 156) und wird als mittlere dynamische Topographie MDT (*Mean Dynamic Topography*) bezeichnet (Abb. 2.1). Mit einem Modell dieser mittleren dynamischen Topographie ist es möglich, Rückschlüsse auf die Strömungen im Ozean zu ziehen. Um diese zu erhalten, gibt es seit einigen Jahren mehrere Satellitenmissionen (z.B. GRACE oder GOCE), die das Schwerefeld der Erde - und damit das Geoid - vermessen. Zusätzlich erfolgt durch weitere Altimetersatelliten die Bestimmung der weltweiten Meereshöhe. Der Zusammenhang zwischen Bezugsflächen und Satelliten ist in Abbildung 2.1 veranschaulicht.

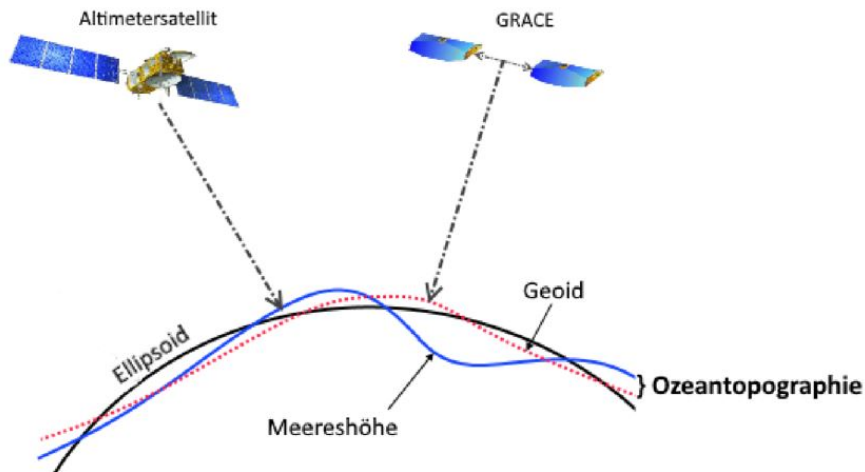


Abbildung 2.1: Darstellung der Bezugsflächen und Satelliten

2.1 Meereshöhenbestimmung durch Altimetrie

Seit den 1970er Jahren ermöglicht die Satellitenaltimetrie eine weltweite Bestimmung der Höhe der Meeresoberfläche. Jeder Satellit der unterschiedlichen Missionen fliegt auf einem sich wiederholenden Orbit und ist mit einem Radaraltimeter ausgestattet. Diese senden einen kurzwelligen Radioimpuls im Mikrowellenbereich Richtung Erdoberfläche. Wenn das Signal an der (Meeres-)Oberfläche reflektiert wird, kann die Laufzeit des Signals durch den Satelliten erfasst werden. Mit Hilfe der gemessenen Signallaufzeit lässt sich zunächst die Distanz zwischen Satellit und Meeresoberfläche ableiten (?). Durch die bekannten Bahninformationen des Satelliten lässt sich dann die Meereshöhe bzw. die Position zu einem festgelegten Referenzellipsoids bestimmen. Da letztendlich die Bestimmung der stationären Ozeanströmung erfolgen soll, werden die Messungen aus der Satellitenaltimetrie über mehrere Jahre zu einer gemittelten Meeresoberfläche zusammengefasst. Für das Modell von ? wurden insbesondere Messungen aus den Missionen Jason-1 und Envisat verwendet.

2.2 Schwerefeldbestimmung durch GRACE und GOCE

Neben den Meereshöhen aus Altimetrie wird ein Geoidmodell bzw. das Schwerefeld der Erde benötigt. Speziell für die Bestimmung des Erdschwerefeldes wurden weitere Satellitenmissionen gestartet. Die Missionen GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*) aus dem Jahre 2002 und GOCE (*Gravity field and steady-state ocean circulation explorer*) aus dem Jahre 2009 ermöglichen eine Berechnung des Erdschwerefeldes und damit eine Schätzung eines Geoidmodells.

Die Messungen der beiden Satellitenmissionen erfolgen allerdings durch zwei unterschiedliche Methoden. Der GOCE Satellit misst das Erdschwerefeld mit Hilfe von hoch präzisen Beschleunigungssensoren und einer zusätzlichen Bahnbestimmung des Satelliten über GPS und Laserentfernungsmessungen. Dagegen beruht die Messung bei der GRACE Mission auf einem anderen Prinzip. Hier fliegen zwei Satelliten auf dem gleichen Orbit hintereinander her. Da ein erhöhtes Schwerepotential eine Beschleunigung der Satelliten verursacht, werden die Satelliten zu unterschiedlichen Zeitpunkten beschleunigt. Diese unterschiedliche Beschleunigung ergibt sich aus dem Abstand zueinander. Durch eine Entfernungsmessung zwischen den beiden Satelliten kann daher auf das Erdschwerefeld geschlossen werden (? , Kap. 3). Aus den Beobachtungen des Erdschwerefeldes wird für die weitere Berechnung ein Geoidmodell durch eine Kugelfunktionsreihenentwicklung geschätzt.

2.3 Modellbildung der mittleren dynamischen Topographie

Grundlage für die Schätzung der mittleren dynamischen Topographie sind nun die beiden unkorrelierten Beobachtungsgruppen aus Altimetrie und Schwerefeldmessung. Die im Folgenden aufgezeigten Schritte orientieren sich streng an der Vorgehensweise von ?, Kap. 4 und werden nur kurz zusammengefasst. Ziel ist die Herleitung der Normalgleichungen und damit eine Parametrisierung zur Berechnung der MDT. Für den funktionalen Zusammenhang wird die Beziehung in Gleichung 2.1 zwischen dem Geoid N und der MDT genutzt, welche zusammen die mittlere Meeresoberfläche MSS ergeben.

$$MSS(\varphi, \lambda) = N(\varphi, \lambda) + MDT(\varphi, \lambda) \quad (2.1)$$

Diese Beziehung hängt allein von den geographischen Koordinaten der Länge und Breite ab. Das aufgeführte Geoid $N(\varphi, \lambda)$ wird mit Hilfe einer Reihenentwicklung der Kugelflächenfunktion approximiert.

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{GM}{R\gamma(B)} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \varphi) (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (2.2)$$

Des Weiteren wird die mittlere dynamische Topographie $MDT(\varphi, \lambda)$ durch eine Linearkombination von K finiten Elementen Basisfunktionen $b_k(\varphi, \lambda)$, $k \in K$ repräsentiert.

$$MDT(\varphi, \lambda) = \sum_{k \in K} a_k b_k(\varphi, \lambda) \quad (2.3)$$

Diese finiten Elemente werden nun so gewählt, dass diese bei der Parametrisierung direkt den Knotenpunkten der mittleren dynamischen Topographie entsprechen. Die Wahl der Basisfunktionen für die finiten Elemente wird im Kapitel 2.4 näher betrachtet. Um im Folgenden die Beobachtungsgleichungen aufzustellen, werden

die unbekannt Parameter in den Vektor \mathbf{x}_{cs} für die Potentialkoeffizienten \bar{C}_{nm} und S_{nm} und den Vektor \mathbf{x}_{FE} für die Parameter a_k der finiten Elemente aufgeteilt.

$$\ell_{MSS} + \mathbf{v}_{MSS} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cs} \mathbf{A}_{FE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cs} \\ \mathbf{x}_{FE} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Durch Hinzunahme der Kovarianzmatrizen für Meereshöhe und Erdschwerefeld können nun die Normalgleichungen aufgestellt werden.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cs}^T \boldsymbol{\Sigma}_{MSS}^{-1} \mathbf{A}_{cs} & \mathbf{A}_{cs}^T \boldsymbol{\Sigma}_{MSS}^{-1} \mathbf{A}_{FE} \\ \mathbf{A}_{FE}^T \boldsymbol{\Sigma}_{MSS}^{-1} \mathbf{A}_{cs} & \mathbf{A}_{FE}^T \boldsymbol{\Sigma}_{MSS}^{-1} \mathbf{A}_{FE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cs} \\ \mathbf{x}_{FE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cs}^T \boldsymbol{\Sigma}_{MSS}^{-1} \ell_{MSS} \\ \mathbf{A}_{FE}^T \boldsymbol{\Sigma}_{MSS}^{-1} \ell_{MSS} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Diese lassen sich in verkürzter Form schreiben als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{cs}^{MSS} & \mathbf{N}_{cs,FE}^{MSS} \\ \mathbf{N}_{FE,cs}^{MSS} & \mathbf{N}_{FE}^{MSS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cs} \\ \mathbf{x}_{FE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{cs}^{MSS} \\ \mathbf{n}_{FE}^{MSS} \end{bmatrix} . \quad (2.6)$$

Da es sich um unkorrelierte Beobachtungsgruppen handelt, kann das Additionstheorem für Normalgleichungen angewendet werden (? , S. 192).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{cs}^G + \mathbf{N}_{cs}^{MSS} & \mathbf{N}_{cs,FE}^{MSS} \\ \mathbf{N}_{FE,cs}^{MSS} & \mathbf{N}_{FE}^{MSS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{cs} \\ \mathbf{x}_{FE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{cs}^G + \mathbf{n}_{cs}^{MSS} \\ \mathbf{n}_{FE}^{MSS} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Mit Hilfe einer Elimination aus den Normalgleichungen erfolgt die direkte Berechnung der Parameter und einer zugehörigen Kovarianzmatrix der MDT.

$$\bar{\mathbf{N}}_{FE} \mathbf{x}_{FE} = \bar{\mathbf{n}}_{FE} \quad (2.8)$$

Zur Darstellung des Ansatzes der Berechnung der mittleren dynamischen Topographie soll diese Zusammenfassung ausreichen. Für eine detailliertere Erklärung und Hinzunahme von weiteren Beobachtungsgruppen wie Argo Drifter oder In-situ-Daten siehe ?, Kap. 3 und 4. Eine berechnete MDT, die durch Messdaten des Zeitraumes von 1993-2012 ermittelt wurde, ist in Abbildung 2.2 zu sehen. Zur Anschauung entspricht dies einer globalen Darstellung des Modells MDT CNES-CLS13.

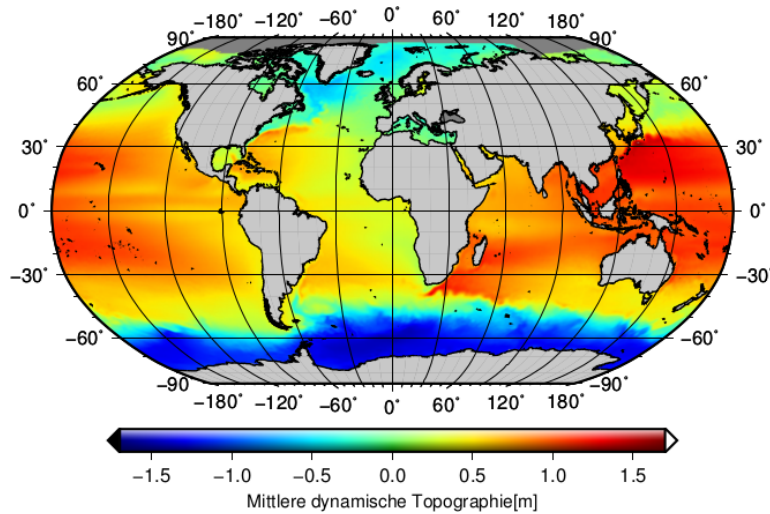
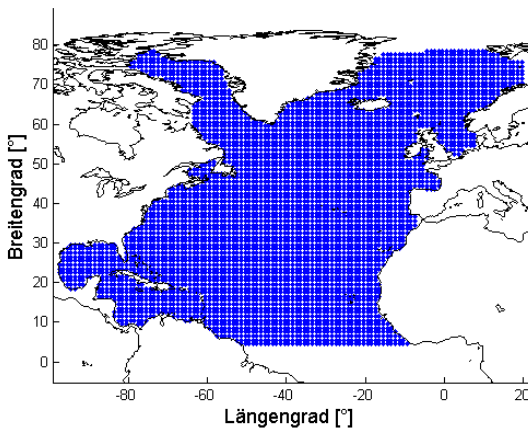


Abbildung 2.2: Darstellung des globalen MDT Modells CNES-CLS13

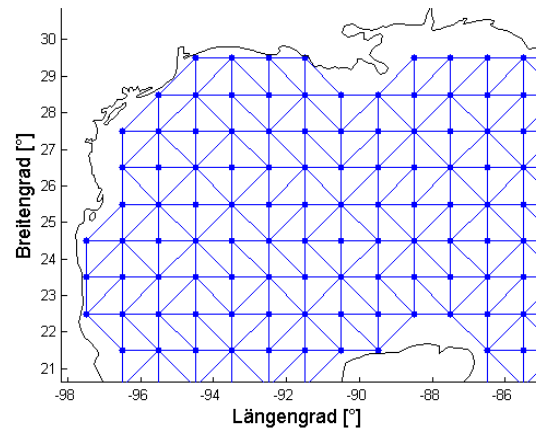
2.4 Finite Elemente zur Prozessierung der MDT

Für die, bei der Parametrisierung der mittleren dynamischen Topographie verwendeten, finiten Elemente müssen sowohl die angesetzten Basisfunktionen als auch das Gitter für die Knotenpunkte definiert werden. Das Gitter für die Berechnung der finiten Elemente wird mit regelmäßigen, gleichgroßen Abständen über den Ozean verteilt. In dieser Arbeit beschränkt sich das Gebiet der Beobachtungen auf den Bereich des Nordatlantiks und erstreckt sich im Breitengrad von 4.5° bis 78.5° und im Längengrad von -97.5° bis 19.5° . In diesem Intervall werden die Knotenpunkte mit einem 1° Abstand festgelegt. Eine Darstellung des verwendeten Gitters ist in Abbildung 2.3a zu sehen.

Zur Bildung der finiten Elemente wird des Weiteren eine Triangulation vorgenommen. Diese wird für einen Ausschnitt beispielhaft in Abbildung 2.3b dargestellt.



(a) Knotenpunkte für die finiten Elemente



(b) Triangulation für einen Ausschnitt des Gitters

Abbildung 2.3: Darstellung von Knotenpunkten und Triangulation der finiten Elemente

Im Folgenden wird nun auf die Triangulation des Gitters eingegangen. Für die Berechnung der MDT werden die Funktionswerte der Knotenpunkte als Parameter angesetzt. Um diese direkt zu erhalten, empfiehlt sich die Verwendung von Polynomen als Basisfunktionen für ein Dreieck. Im Rahmen dieser Arbeit beschränkt sich die Anwendung zunächst nur auf die linearen Polynome. Vorteil bei der Verwendung von linearen Polynomen als Funktion für ein Dreieck ist, dass dieses bereits durch die Funktionswerte in den Knotenpunkten eindeutig definiert ist.

Alternativ wäre auch eine Rechteckvermaschung realisierbar, welche in diesem Fall aber nicht näher betrachtet wird. Durch die Wahl einer anderen Vermaschung wären die finiten Elemente nicht mehr allein durch die Funktionswerte in den Knotenpunkten gegeben, was in einer aufwendigeren Parametrisierung resultiert.

Lineare Polynome Die Berechnung erfolgt hier auf einem Einheitsdreieck mit den Punkten $\bar{P}_1(0,0)$, $\bar{P}_2(1,0)$ und $\bar{P}_3(0,1)$. Die Knotenpunkte sind durch eine affine Transformation auf diese Koordinaten im Einheitsdreieck umzurechnen (?, S. 77 ff.).

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\varphi_3 - \varphi_1) - (\lambda_3 - \lambda_1)(\varphi_2 - \varphi_1)} \begin{bmatrix} (\varphi_3 - \varphi_1)(\lambda_1 - \lambda_3) \\ (\varphi_1 - \varphi_2)(\lambda_2 - \lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda} - \lambda_1 \\ \bar{\varphi} - \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Die Koordinaten der einzelnen Dreiecke $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$ werden somit zu (φ, λ) transformiert (?, S. 47-48). Die verwendeten Werte für (φ_i, λ_i) entsprechen den jeweiligen Eckpunkten eines Dreiecks. Die Transformation ist

in Abbildung 2.4 verdeutlicht, bei der eine Umrechnung von einem allgemeinen Dreieck T_i auf ein Einheitsdreieck T_0 erfolgt.

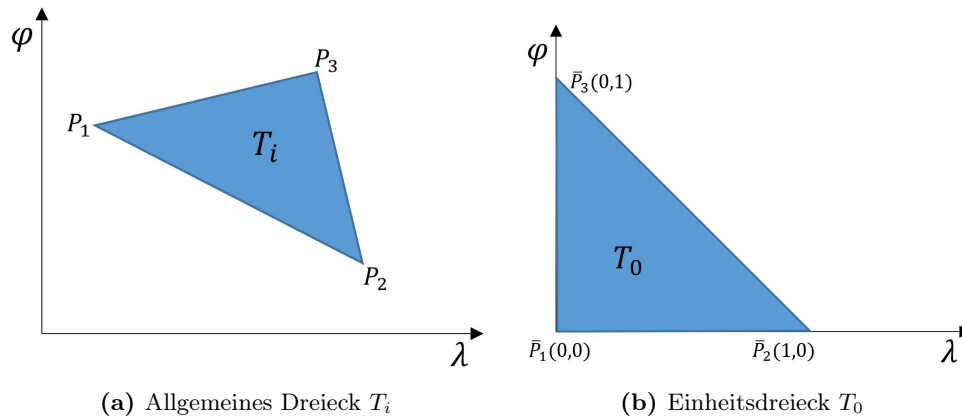


Abbildung 2.4: Darstellung von einem allgemeinen Dreieck T_i und dem Einheitsdreieck T_0 für die finiten Elemente

Grundlage ist das zweidimensionale lineare Polynom

$$f(\varphi, \lambda) = a + b\lambda + c\varphi \quad . \quad (2.10)$$

Durch die Wahl der Knotenpunkte ergeben sich die Funktionswerte zu

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= a \\ f(0, 1) &= a + b \\ f(1, 0) &= a + c \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Parametrisierung der Funktion in den Knotenpunkten ergibt sich mit den Koeffizienten zu

$$f(\varphi, \lambda) = f(0, 0)(1 - \lambda - \varphi) + f(0, 1)\lambda + f(1, 0)\varphi \quad . \quad (2.12)$$

3. Mathematische Grundlagen

Die Berechnung der Ozeanströmungen gliedert sich in mehrere aufeinanderfolgende Arbeitsschritte. Dazu gehört zunächst die Strömungsberechnung (siehe Kapitel 3.1) bei der insbesondere die physikalischen Einflussfaktoren berücksichtigt werden. Es folgt die Gradientenberechnung mit einer Darstellung der angewendeten Interpolationsmethode (siehe Kapitel 3.2.1) und die dazugehörige Varianzfortpflanzung (siehe Kapitel 3.2.2). In Kapitel 3.2.3 wird des Weiteren ein optimiertes Verfahren zur Berechnung der Interpolation aufgezeigt.

3.1 Strömungsberechnung durch das geostrophische Gleichgewicht

Mit der Datengrundlage der mittleren dynamischen Topographie lassen sich die geostrophischen Strömungen bestimmen. Diese resultieren aus dem Gleichgewicht zwischen Corioliskraft und Druckgradient. Die MDT wurde zuvor durch die Ausgleichung der mittleren Meeresoberfläche und einem gemittelten Geoidmodell erstellt, wodurch bei der folgenden Berechnung auch von stationären Strömungen gesprochen werden kann. Für die Ermittlung dieser Strömungen sind nun die Oberflächengeschwindigkeiten in v Nord- und u Ostrichtung von Interesse.

Neben den jeweiligen Gradienten der MDT in Nord- und Ostrichtung sind die Einflüsse von Corioliskraft f und Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ zu berücksichtigen. Die Größe der Corioliskraft ergibt sich in Abhängigkeit des Breitengrades φ und der Erdrotation Ω (? , S. 49).

$$f = 2\Omega \sin \varphi, \quad \Omega = 7.27e^{-5} \frac{1}{s} \quad (3.1)$$

Die Oberflächenströmungen können nun aus dem geostrophischen Gleichgewicht berechnet werden. Dieses setzt die Corioliskraft mit dem Druckgradienten gleich. Aus diesem Gleichgewicht lassen sich dann die Oberflächenströmungsgeschwindigkeiten bestimmen. Diese Geschwindigkeiten stehen senkrecht zu der wirkenden Corioliskraft und dem Druckgradient wie in Abbildung 3.1 angedeutet.

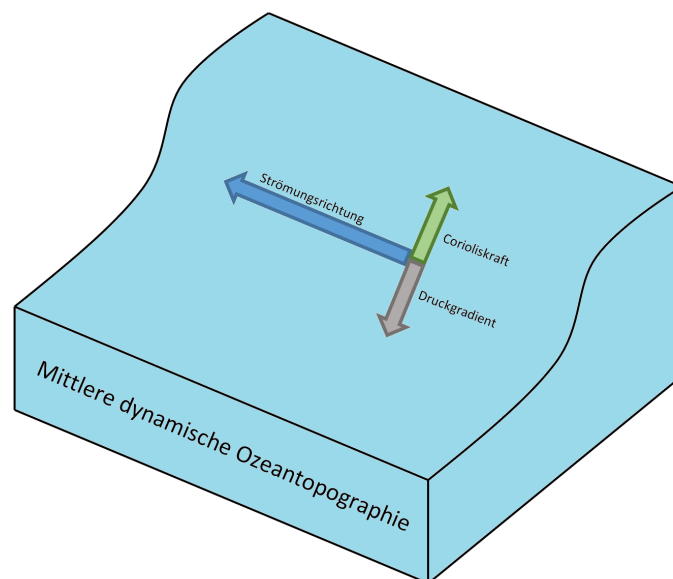


Abbildung 3.1: Modell des geostrophischen Gleichgewichts

Oberflächenströmungsgeschwindigkeiten in Nord- und Ostrichtung:

$$v = \frac{g}{f} \frac{\partial MDT}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial MDT}{\partial y} \quad (3.3)$$

Hierdurch wird deutlich, dass die aus der mittleren dynamischen Topographie bestimmbaren Gradienten proportional zu den Oberflächenströmungsgeschwindigkeiten sind.

Anpassung der Einheiten Die Datengrundlage für die nachstehenden Berechnungen sind Längen- und Breitengrade mit den zugehörigen Werten der mittleren dynamischen Topographie. Da die Geschwindigkeiten in der passenden Einheit [ms^{-1}] resultieren sollen, müssen weitere Umrechnungen erfolgen. Konkret handelt es sich hier um die Transformation der Gitterabstände in *Grad* zu *Gitterabständen in Metern*. Diese Umrechnung kann auf die berechneten Gradienten angewendet werden und wird daher erst nach Durchführung der Interpolation berücksichtigt.

Bei der Umrechnung der Gitterabstände bzw. der Auflösung des Gitters ist eine separate Betrachtung der Breiten- und Längengrade notwendig. Für die Bestimmung der Gitterabstände in Nordrichtung entlang der Meridianstreifen wird die Berechnung vereinfacht, da hier ein konstanter Abstand zwischen den Breitengraden vorliegt. Eine geometrische Darstellung mit zwei eingezeichneten Breitengraden φ_1 und φ_2 ist in Abbildung 3.2a zu sehen. Der Abstand zwischen diesen beiden Breitengraden soll in die metrische Einheit Meter umgerechnet werden.

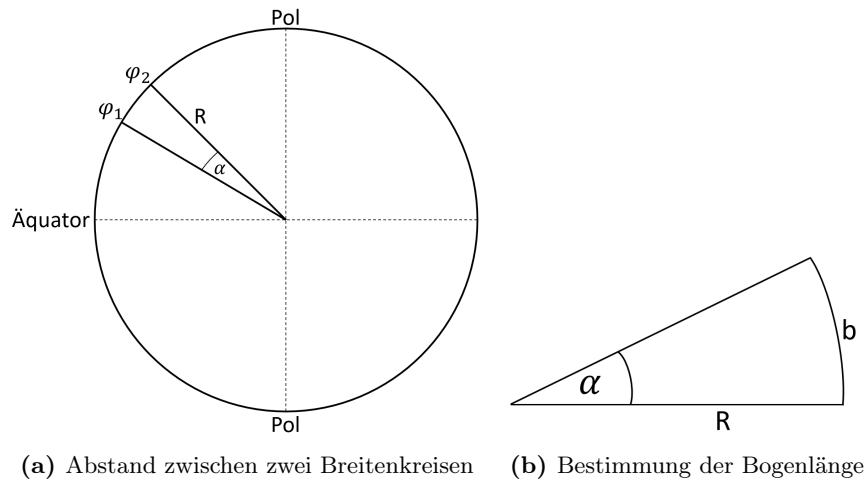


Abbildung 3.2: Berechnung des Abstandes zwischen zwei Breitenkreisen durch die Bestimmung der Bogenlänge

Grundlage für diese Umrechnung ist die Gleichung 3.4 zur Berechnung einer Bogenlänge b , wie auch in Abbildung 3.2b veranschaulicht.

$$b_{\Delta\varphi} = R \frac{\alpha}{\rho} = R \frac{\Delta\varphi}{\rho} \quad (3.4)$$

Dabei entspricht $\Delta\varphi$ der Differenz zwischen den Breitengraden, R dem Erdradius mit $6371km$ und der Faktor ρ der Umrechnung von Radiant in Grad. Damit können alle Abstände zwischen den Gitterpunkten in

Nord-Südrichtung bestimmt werden. Die damit mögliche Anpassung der Gradienten wird in Gleichung 3.7 gezeigt. Für die Berechnung der Abstände zwischen den Längengraden muss ein weiterer Aspekt beachtet werden. Mit steigendem Breitengrad verkleinern sich die parallelen Breitenkreise, wodurch auch der Abstand zwischen benachbarten Längengraden stetig kleiner wird. Um diesen Abstand zu erhalten, wird zunächst der Parallelkreishalbmesser für den entsprechenden Breitengrad ermittelt (Abbildung 3.3b). Dieser lässt sich mit

$$p = \sin(90^\circ - \varphi) R = \cos(\varphi) R \quad (3.5)$$

bestimmen.

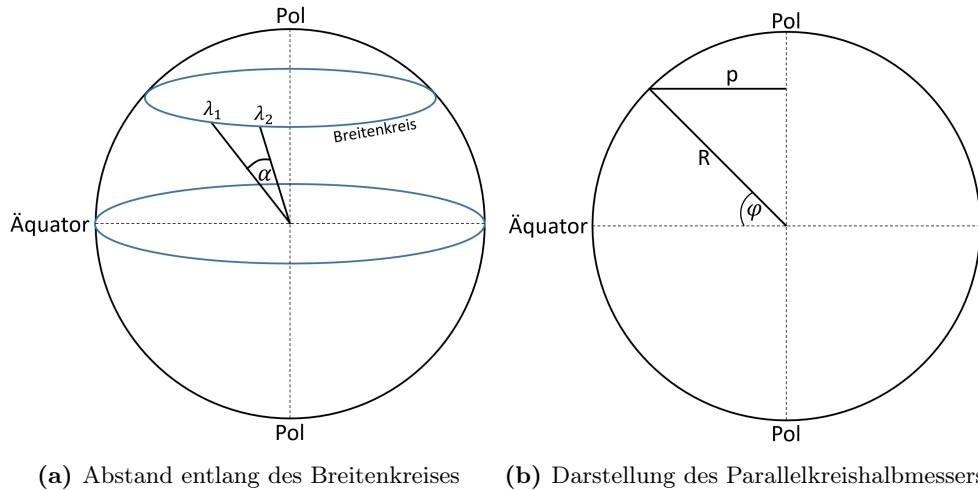


Abbildung 3.3: Berechnung des Abstandes entlang der geographischen Länge mit Hilfe des Parallelkreishalbmessers

Daraufhin ist eine analoge Bestimmung des Abstandes zwischen λ_1 und λ_2 entlang des Breitenkreises (Abbildung 3.3a) wie in Gleichung 3.4 möglich.

$$b_{\Delta\lambda} = p \frac{\Delta\lambda}{\rho} = \cos(\varphi) R \frac{\Delta\lambda}{\rho} \quad (3.6)$$

Mit Hilfe der Abstände zwischen den Gitterpunkten können die Gradienten in die entsprechende Einheit umgerechnet werden. Grundlage für diese Umrechnung sind die Formeln zur Berechnung der Oberflächenströmungsgeschwindigkeit 3.2 und 3.3. Da es sich um eine analoge Umrechnung der Einheiten handelt, wird hier nur die Umrechnung des Gradienten in Nordrichtung dargestellt.

$$v = \frac{g}{f} \cdot \frac{\partial MDT}{\partial x} \cdot \frac{\text{Gitterauflösung in } ^\circ}{\text{Gitterauflösung in } m} \quad (3.7)$$

$$\text{Einheiten:} \quad \left[\frac{m}{s} \right] = \left[\frac{\frac{m}{s^2}}{\frac{1}{s}} \right] \cdot \left[\frac{m}{^\circ} \right] \cdot \left[\frac{^\circ}{m} \right] \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{m}{s} \right] = \left[\frac{m}{s} \right] \cdot \left[\frac{-}{-} \right] \quad (3.9)$$

Es muss lediglich beachtet werden, dass die Gitterauflösung in Metern für den Gradienten in x -Richtung der Bogenlänge $b_{\Delta\lambda}$ und in y -Richtung der Bogenlänge $b_{\Delta\varphi}$ entspricht.

3.2 Gradientenberechnung des MDT Modells

Die Berechnung der Gradienten an die MDT soll als Interpolationsaufgabe gelöst werden. Dies bedeutet konkret, dass eine Funktion gefunden werden soll, bei der die diskreten Knotenpunkte mit bekannten Funktionswerten exakt reproduziert werden. Für beliebige Zwischenstellen können die passenden Funktionswerte im Nachhinein berechnet werden (? , S.266). Grund für dieses Vorgehen ist die bereits durchgeführte Ausgleichung zur Bestimmung der MDT, bei der eine kleinste Quadrate Schätzung angewendet wird. Um nun keine weitere Glättung der Oberfläche bzw. der Gradienten durch eine Approximation zu erhalten, wird eine Interpolation mit den gegebenen Knotenpunkten angesetzt. Außerdem muss für die Genauigkeiten der Gradienten eine Varianzfortpflanzung berechnet werden. Als Methode zur Lösung des Interpolationsproblems wird eine Spline-Interpolation betrachtet.

3.2.1 Methode der Spline-Interpolation

Die Idee der Spline-Interpolation besteht darin, für jedes Intervall zwischen den gegebenen Stützstellen, einzelne Polynome für die Berechnung anzusetzen. Daher wird diese Methode auch als Aneinanderreihung stückweiser Basisfunktionen bezeichnet. Die Wahl des Polynomgrades kann hier flexibel gestaltet werden. Durch die Wahl von kubischen Polynomen ergibt sich allerdings eine ideale Anpassung der Basisfunktionen an die gegebenen Werte. Des Weiteren wird im folgenden Vorgehen eine Berechnung aufgezeigt, um insbesondere in den Stützstellen eine zweifach stetig differenzierbare Funktion zu erhalten.

Grundlage für die Herleitung sind dementsprechend die Stützstellen mit ihren Funktionswerten und als Basisfunktion wird ein kubisches Polynom gewählt. Um eine zweifach stetig differenzierbare Funktion zu erhalten, sind zunächst die ersten beiden Ableitungen aufzustellen. Der Ansatz entspricht dem Vorgehen von ?, Kap. 8.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_0 & + a_1(x - x_A) & + a_2(x - x_A)^2 & + a_3(x - x_A)^3 \\
 f'(x) &= & a_1 & + 2a_2(x - x_A) & + 3a_3(x - x_A)^2 \\
 f''(x) &= & & 2a_2 & + 6a_3(x - x_A)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Durch eine Aneinanderreihung der Polynome über alle Intervalle ergeben sich für die Intervallübergänge zusätzliche Forderungen an die Stetigkeiten. Diese dienen hauptsächlich zur endgültigen Berechnung der Interpolationsparameter. Das weitere Vorgehen orientiert sich an ?, Kap. 2.5. Die resultierenden Forderungen werden durch die Abbildung 3.4 verdeutlicht.

Die Forderungen für einen stetigen Übergang sind:

$$\begin{aligned}
 x_A^{(i)} &= x_E^{(i-1)} & f(x_A^{(i)}) &= f(x_E^{(i-1)}) & f'(x_A^{(i)}) &= f'(x_E^{(i-1)}) \\
 x_A^{(i+1)} &= x_E^{(i)} & f(x_A^{(i+1)}) &= f(x_E^{(i)}) & f'(x_A^{(i+1)}) &= f'(x_E^{(i)})
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Es folgt eine Umparametrisierung von 3.12 zu 3.13 welche eine geometrisch bessere Vorstellung über die zu berechnenden Koeffizienten bringt.

$$f(x) = \underline{a_0} + (x - x_A)\underline{a_1} + (x - x_A)^2\underline{a_2} + (x - x_A)^3\underline{a_3} \tag{3.12}$$

$$f(x) = c_0(x)\underline{f(x_A)} + c_1(x)\underline{f'(x_A)} + c_2(x)\underline{f(x_E)} + c_3(x)\underline{f'(x_E)} \tag{3.13}$$

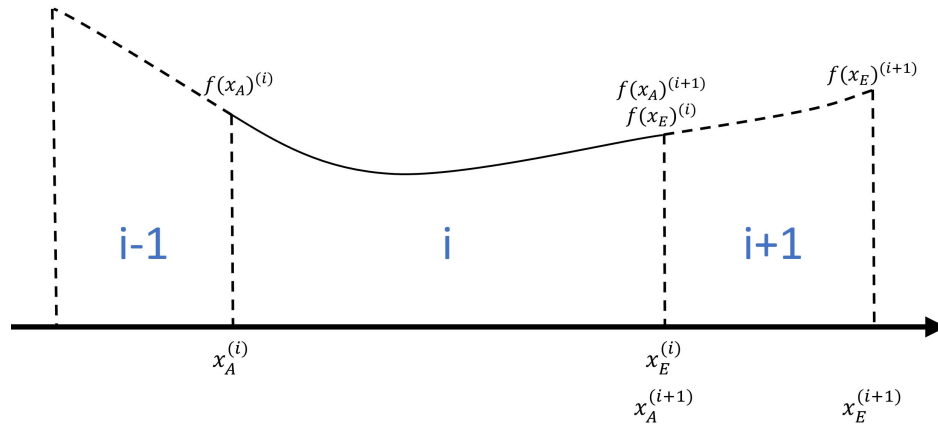


Abbildung 3.4: Darstellung mehrerer Intervalle für die Spline-Interpolation

Als Parameter werden die Funktionswerte $f(x_A)$, $f(x_E)$ und Ableitungen $f'(x_A)$, $f'(x_E)$ angesetzt. Daher müssen die Koeffizienten $c_i(x)$ wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned}
 f(x_A) &= a_0 \\
 f'(x_A) &= a_1 \\
 f(x_E) &= a_0 + a_1(x_E - x_A) + a_2(x_E - x_A)^2 + a_3(x_E - x_A)^3 \\
 f'(x_E) &= a_1 + 2a_2(x_E - x_A) + 3a_3(x_E - x_A)^2
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der aufgeführten Zusammenhänge in 3.13 und Umformung der jeweiligen Gleichungen ergeben sich die Koeffizienten $c_i(x)$.

$$\begin{aligned}
 c_0(x) &= 1 - 3 \left(\frac{x - x_A}{x_E - x_A} \right)^2 + 2 \left(\frac{x - x_A}{x_E - x_A} \right)^3 \\
 c_1(x) &= (x - x_A) \left(1 - 2 \left(\frac{x - x_A}{x_E - x_A} \right) + \left(\frac{x - x_A}{x_E - x_A} \right)^2 \right) \\
 c_2(x) &= 3 \left(\frac{x - x_A}{x_E - x_A} \right)^2 - 2 \left(\frac{x - x_A}{x_E - x_A} \right)^3 \\
 c_3(x) &= (x - x_A) \left(- \left(\frac{x - x_A}{x_E - x_A} \right) + \left(\frac{x - x_A}{x_E - x_A} \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

Damit können auch die zweiten Ableitungen aus Gleichung 3.11 mit den Koeffizienten für ein Intervall aufgestellt werden.

$$f''(x_A) = \frac{2}{(x_E - x_A)^2} \left[- (2f'(x_A) + 2f'(x_E))(x_E - x_A) + 3(f(x_E) - f(x_A)) \right] \quad (3.14)$$

$$f''(x_E) = \frac{2}{(x_E - x_A)^2} \left[(f'(x_A) + 2f'(x_E))(x_E - x_A) - 3(f(x_E) - f(x_A)) \right] \quad (3.15)$$

Um das Interpolationsproblem lösen zu können, wird eine Verallgemeinerung auf mehrere Intervalle, wie in Abbildung 3.4 zu sehen, betrachtet.

Da insbesondere an den Stützstellen eine zweifach stetig differenzierbare Funktion resultieren soll, werden die zweiten Ableitungen der beiden angrenzenden Intervalle gleichgesetzt. Nach entsprechender Umformung (siehe 3.16) erhält man die Gleichung 3.17.

$$\underbrace{\frac{1}{(x_i - x_{i-1})}}_{\alpha_i} f'(x_{i-1}) + 2 \underbrace{\left(\frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right)}_{\beta_i} f'(x_i) + \underbrace{\frac{1}{x_{i+1} - x_i}}_{\gamma_i} f'(x_{i+1}) \quad (3.16)$$

$$= 3 \underbrace{\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2} \right)}_{\delta_i}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i f'(x_{i-1}) + \beta_i f'(x_i) + \gamma_i f'(x_{i+1}) = \delta_i \quad \text{mit } i = 1 \dots N - 2 \quad (3.17)$$

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs lässt sich ein Gleichungssystem aufstellen, das zur Bestimmung der benötigten Parameter dient.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & & \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{N-2} & \beta_{N-2} & \gamma_{N-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(x_0) \\ f'(x_1) \\ \vdots \\ f'(x_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{N-2} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Das Gleichungssystem enthält nun insgesamt N unbekannte Parameter aber nur $N - 2$ Gleichungen, wodurch keine direkte Lösung möglich ist. Diese Unterbestimmung wird mit Hilfe von zusätzlichen Randbedingungen - in Form von zwei weiteren Gleichungen - gelöst.

Natürlicher Spline Als eine mögliche Randbedingung werden die zweiten Ableitungen an Anfangs- und Endpunkt des untersuchten Bereichs gleich Null gesetzt (siehe 3.19). Die Interpolation mit dieser Randbedingung wird als natürlicher Spline bezeichnet.

$$f''(x_E) = f''(x_A) = 0 \quad (3.19)$$

Mit dieser Annahme kann das Gleichungssystem erweitert und damit eindeutig gelöst werden. Die dazu nötigen Umformungen werden nachfolgend erläutert. Aus dem Zusammenhang 3.14 und 3.15 ergeben sich für das erste und letzte Intervall die Gleichungen:

$$f''(x_A)_0 = 0$$

$$= \frac{2}{(x_1 - x_0)^2} \left[- (2f'(x_0) + 2f'(x_1))(x_1 - x_0) + 3(f(x_1) - f(x_0)) \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)^2}}_{\delta_0} = \underbrace{\frac{4}{(x_1 - x_0)}}_{\beta_0} f'(x_0) + \underbrace{\frac{2}{(x_1 - x_0)}}_{\gamma_0} f'(x_1) \quad (3.20)$$

und

insbesondere an Kreuzungspunkten für die Berechnung der Splines in Nord- und Ostrichtung dieselben Funktionswerte genutzt werden, ergibt sich hier eine Überlappung. In der gezeigten Darstellung werden für einen Kreuzungspunkt die entsprechenden Koeffizienten mit den zugehörigen Funktionswerten hervorgehoben. In diesem Fall wird für den Stützpunkt x_0 der zugehörige Funktionswert $f(x_0)$ sowohl für die Berechnung eines Splines in Nordrichtung als auch für die Berechnung eines Splines in Ostrichtung verwendet. Diese Situation wird zusätzlich durch die Darstellung 3.6 verdeutlicht.

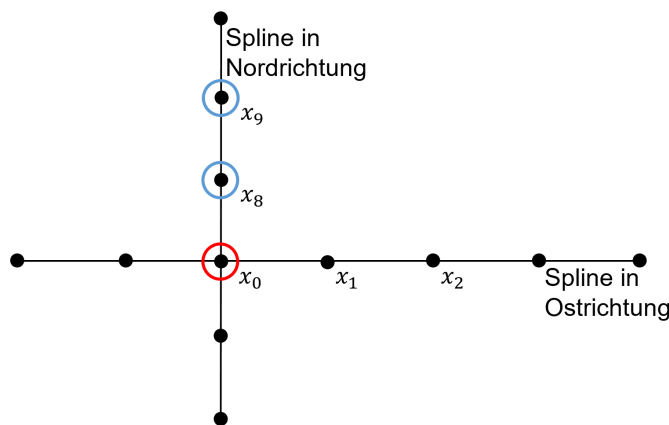


Abbildung 3.6: Darstellung eines Kreuzungspunktes aus Spline in Nord- und Ostrichtung

Die Aufstellung dieser Matrizen kann des Weiteren durch eine Dimensionsüberlegung überprüft werden. Da es sich um N Knotenpunkte bzw. N zugehörige Funktionswerte $f(x_i)$ handelt, resultieren insgesamt $2 \cdot N$ Gradienten. Insbesondere müssen die Dimensionen der aufgestellten Matrizen auch für die folgende Varianzfortpflanzung stimmen. Für diese ist aus der Datengrundlage eine Kovarianzmatrix mit einer Dimension von $N \times N$ gegeben. Die Dimensionen der Matrizen sehen daher wie folgt aus.

Dimensionen:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline f'(x_i) \\ \hline 2N \end{array} = \begin{array}{c} 2N \\ \hline B^{-1} \\ \hline 2N \end{array} \cdot \begin{array}{c} N \\ \hline A \\ \hline 2N \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \\ \hline f(x_i) \\ \hline N \end{array} \quad (3.36)$$

Durch diese Anschauung wird deutlich, dass auch die Dimensionen der Matrizen für die Varianzfortpflanzung stimmen. Daher entsteht mit dieser Berechnungsmethode kein weiteres Problem für die Berechnung einer Kovarianzmatrix, die somit direkt für alle Gradienten berechnet werden kann.

3.3 Hypothesentest für die Strömungsgeschwindigkeiten

Ein statistischer Test dient der Überprüfung von einer vorgegebenen Behauptung bzw. Vermutung über die Verteilung eines Parameters. In diesem Fall wird diese Vermutung auch als Hypothese bezeichnet. Speziell durch einen Hypothesentest kann beispielweise getestet werden, ob ein unbekannter Erwartungswert μ einer Zufallsvariable mit einem vorgegebenen Sollwert μ_0 zusammenfällt. Durch den in Kapitel 3.2 aufgezeigten Berechnungsprozess liegen für den Hypothesentest einerseits die resultierenden Ozeanströmungen, andererseits aber auch entsprechende Unsicherheitsinformationen in Form einer Kovarianzmatrix der Parameter vor. Für die in Kapitel 2 beschriebene Datengrundlage wird für die geschätzten Parameter von einer normalverteilten Größe ausgegangen. Daraus folgt, dass auch die berechneten Ozeanströmungen einer Normalverteilung entsprechen. Mit Hilfe dieser Grundlage kann ein Hypothesentest vollständig durchgeführt werden. Die Überprüfung der Strömungen durch einen Hypothesentest soll hier auf drei verschiedenen Wegen geschehen. Zunächst besteht die Möglichkeit, durch einen Parametertest die Strömungen in den separaten Komponenten in Nord- und Südrichtung zu testen. Des Weiteren soll eine Umrechnung der zwei Komponenten in eine Strömung mit entsprechender Varianzfortpflanzung erfolgen. Diese kann daraufhin auch mit einem Parametertest überprüft werden. Als letzte Möglichkeit dient das Testen von Restriktionen als alternative Testmethode, bei der ein Globaltest zur Überprüfung von signifikanten Strömungen Anwendung findet. Die oben angesprochenen Methoden sollen im Folgenden zunächst kurz erläutert werden.

3.3.1 Hypothesenüberprüfung durch einen Parametertest

Die Überprüfung von Hypothesen über die numerischen Werte von unbekanntem Parametern entspricht genauer einem Parametertest. Mit diesem kann im weiteren Verlauf überprüft werden, ob ein Parameter signifikant von einem festgelegten Sollwert abweicht. Im konkreten Fall der Ozeanströmungen ist das Ziel des Hypothesentests, eine Aussage darüber zu treffen, welche Strömungen signifikant sind und damit in ein Strömungsmodell eingehen sollten. Eine solche Testentscheidung muss immer mit einer vorher festgelegten Irrtumswahrscheinlichkeit erfolgen. Getestet wird daher auf einem Signifikanzniveau von α (? , Kap. 7). Falls für die angesetzte Irrtumswahrscheinlichkeit eine Abweichung erkannt wird, entspricht dies einer signifikanten Abweichung des getesteten Parameters vom Sollwert. Ein solcher Parametertest gliedert sich in sechs aufeinander folgende Schritte und wird nachfolgend mit Verweis auf (?) dargestellt.

Ablauf des Parametertests:

1. Nullhypothese

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad \mathbf{E}\{\mathcal{X}_k\} = c \\ H_A : & \quad \mathbf{E}\{\mathcal{X}_k\} \neq c \end{aligned}$$

2. Festlegung der Testgröße τ

$$\tau := \frac{\mathcal{X}_k - c}{\sigma_{\mathcal{X}_k}} \quad \tau \sim N(0, 1)$$

3. Festlegung des Wahrscheinlichkeitsniveaus

$$\text{z.B.} \quad \gamma = 95\% = 0.95$$

4. Festlegung der Testgröße als spezielle Realisierung

$$t = \frac{x_k - c}{\sigma_{x_k}}$$

5. Berechnung der Quantilwerte

$$K_u = K_{\alpha/2}^{N(0,1)} = K_{0.025}^{N(0,1)} = -1.96$$

$$K_o = K_{1-\alpha/2}^{N(0,1)} = K_{0.975}^{N(0,1)} = 1.96$$

6. Entscheidung

$$\begin{aligned} K_u \leq t < K_o &\Rightarrow H_0 \text{ kann nicht wiederlegt werden} \\ |t| > K_o &\Rightarrow H_A \text{ wird angenommen} \end{aligned}$$

Grundlage für jeden Hypothesentest ist zunächst die Nullhypothese H_0 . Diese gibt Aufschluss darüber, was überhaupt getestet werden soll. Im Fall des vorliegenden Parametertests wird mit der Nullhypothese behauptet, dass der Erwartungswert der Strömungsgeschwindigkeit $E\{\mathcal{X}_k\}$ dem Sollwert von c entspricht. Da keine entsprechenden Sollwerte für die Strömungsgeschwindigkeiten vorhanden sind, werden die Parameter gegen $c = 0$ getestet. Die Alternativhypothese H_A deckt den Fall ab, bei dem der zu testende Parameter signifikant vom Sollwert abweicht.

Nachdem eine Realisierung der Testgröße bestimmt und die Quantilwerte entsprechend dem gewählten Wahrscheinlichkeitsniveau berechnet wurden, kann die Entscheidung des Parametertests getroffen werden. Falls die Nullhypothese H_0 für den entsprechenden Parameter angenommen wird, entspricht dies keiner signifikanten Strömung. Mit Annahme der Alternativhypothese H_A wird dagegen von signifikanten Strömungsgeschwindigkeiten ausgegangen. Diese gehen daraufhin mit in das resultierende Strömungsmodell ein. Alle anderen Strömungen werden nach diesem Test verworfen.

Wahrscheinlichkeitsniveau des Parametertests Das erläuterte Vorgehen des Parametertests wird mit einem Wahrscheinlichkeitsniveau von 95% durchgeführt. Für den Fall, dass die Strömungskomponenten in Nord- und Ostrichtung in eine Strömung umgerechnet wurden, kann für die Festlegung des Wahrscheinlichkeitsniveaus ein γ von 0.95 gewählt werden. Falls die Parameter mit den einzelnen Strömungskomponenten getestet werden, müssen allerdings die Konfidenzregionen für multivariate Normalverteilungen berücksichtigt werden (?). Dies sei an dem konkreten Beispiel der Nord- und Ostströmung dargestellt. Für diese gelten separat zunächst die folgenden Festlegungen des Wahrscheinlichkeitsniveaus.

Das Wahrscheinlichkeitsniveau der Strömung in Nordrichtung ergibt sich mit

$$P\{v_u < \mathcal{V} < v_o\} = \gamma_{\mathcal{V}} \quad (3.37)$$

und das Wahrscheinlichkeitsniveau der Strömung in Ostrichtung mit

$$P\{u_u < \mathcal{U} < u_o\} = \gamma_{\mathcal{U}} \quad . \quad (3.38)$$

Da sich eine Strömung letztendlich immer aus den Komponenten in Nord- und Ostrichtung zusammensetzt, müssen auch die Wahrscheinlichkeiten zusammen betrachtet werden. Durch Anwendung der Multiplikationsregeln für unabhängige Ereignisse ergibt sich daraufhin der folgende Zusammenhang.

$$P\{v_u < \mathcal{V} < v_o \cap u_u < \mathcal{U} < u_o\} = \gamma_{\mathcal{V}} \cdot \gamma_{\mathcal{U}} = \gamma_{\text{Strömung}} \quad (3.39)$$

Dieser Zusammenhang für die Wahrscheinlichkeit der zusammengesetzten Strömungen spiegelt das Wahrscheinlichkeitsniveau des gesamten Parametertests wider. Um die gesamte Strömung auf einem gewünschten Wahrscheinlichkeitsniveau zu testen, müssen die einzelnen Wahrscheinlichkeitsniveaus für Nord- und Ostrichtung entsprechend angepasst werden. Falls für $\gamma_{\text{Strömung}}$ ein Wert von 95% erreicht werden soll, ergeben sich für die einzelnen Komponenten die folgenden Werte.

$$\gamma_{\text{Strömung}} = \gamma_{\mathcal{V}} \cdot \gamma_{\mathcal{U}} = 0.902 \cdot 0.902 = 0.95 \quad (3.40)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\gamma_{\text{Strömung}}} = \gamma_{\mathcal{V}} = \gamma_{\mathcal{U}} \quad (3.41)$$

Um für die gesamte Strömung ein Wahrscheinlichkeitsniveau von 95% zu erreichen, müssen die einzelnen Komponenten in Nord- und Ostrichtung mit einem Wahrscheinlichkeitsniveau von 90.2% getestet werden.

3.3.2 Hypothesenüberprüfung durch das Testen von Restriktionen

Eine weitere Möglichkeit für einen statistischen Test ist das Testen von Restriktionen. Der Ansatz dieses Verfahrens besteht darin, Restriktionen an die resultierenden Parameter zu stellen. Durch dieses Vorgehen ist im weiteren Verlauf die Durchführung eines Globaltests an das Modell möglich. Entscheidender Unterschied durch dieses Verfahren ist, dass die Möglichkeit besteht, eine unterschiedlich große Anzahl von Parametern gleichzeitig zu testen.

Das Testen von Restriktionen gliedert sich grundsätzlich in zwei aufeinanderfolgende Stufen. In der ersten Stufe findet zunächst ein Vorausgleich statt. Ergebnis des Ausgleichs sind die zu testenden Parameter mit einer Kovarianzmatrix. In diesem Fall entspricht dies der Berechnung der Spline-Interpolation mit den Gradienten als Parametern (? , Kap. 5).

1. Stufe Vorausgleich

$$\ell + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.42)$$

$$\Sigma\{\mathcal{L}\} = \Sigma = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (3.43)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \ell \quad (3.44)$$

$$\Sigma\{\hat{\mathcal{X}}\} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad (3.45)$$

Darauf folgt die zweite Stufe in der Restriktionen an die zuvor berechneten Parameter gestellt werden.

2. Stufe Bedingungsgleichungen zum Ausgleichungsmodell

$$\mathbf{B}^T (\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{r}) = \mathbf{b} \quad (3.46)$$

$$\Sigma\{\hat{\mathcal{X}}\} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}\{\hat{\mathcal{X}}\} \quad (3.47)$$

Mit dieser Grundlage kann ein Globaltest durchgeführt werden. Der Ablauf ähnelt hier stark dem des zuvor gezeigten Parametertests und gliedert sich ebenfalls in sechs Schritte. Da in diesem Fall immer nur zwei Parameter gleichzeitig getestet werden, ergibt sich der Freiheitsgrad von $p = 2$ (?).

Ablauf des Globaltests:

1. Nullhypothese

$$\begin{aligned} H_0 : \quad \mathbf{B}^T \mathbf{E}\{\boldsymbol{\mathcal{X}}\} &= \mathbf{b} && \text{„Das Restriktionsmodell ist korrekt“} \\ H_A : \quad \mathbf{B}^T \mathbf{E}\{\boldsymbol{\mathcal{X}}\} &\neq \mathbf{b} && \text{„Das Restriktionsmodell enthält einen Modellfehler“} \end{aligned}$$

2. Festlegung der Testgröße τ

$$\tau := p \frac{\widehat{S}_2^2}{\sigma_0} = \mathcal{R} \boldsymbol{\Sigma}\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\}^{-1} \mathcal{R} \quad \tau \sim \chi_p^2$$

3. Festlegung des Wahrscheinlichkeitsniveaus

$$\text{z.B.} \quad \gamma = 95\% = 0.95$$

4. Festlegung der Testgröße als spezielle Realisierung

$$\begin{aligned} t &= \mathbf{r} \boldsymbol{\Sigma}\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\}^{-1} \mathbf{r} \\ \text{mit} \quad \mathbf{r} &= -\boldsymbol{\Sigma}\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} \mathbf{B}(\mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}\{\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{B}^T \widehat{\boldsymbol{x}} - \mathbf{b}) \quad \dots \text{Verbesserungen der 2. Stufe} \end{aligned}$$

5. Berechnung der Quantilwerte

$$K_o = K_\alpha^{\chi_2^2} = K_{0.05}^{\chi_2^2} = 5.9915$$

6. Entscheidung

$$\begin{aligned} t \leq K_o & \Rightarrow H_0 \text{ kann nicht wiederlegt werden} \\ t > K_o & \Rightarrow H_A \text{ wird angenommen} \end{aligned}$$

Um den Globaltest durchführen zu können, müssen für die Nullhypothese die Restriktionen in \mathbf{B} und \mathbf{b} festgelegt werden. In diesem Fall soll wieder getestet werden, ob die einzelne Strömung signifikant von Null abweicht. Für den Test von zwei Strömungen soll dieser Fall kurz dargestellt werden. Zur Aufstellung der Matrix \mathbf{B} wird zu einer Strömung v in Nordrichtung die korrespondierende Strömung u in Ostrichtung getestet. Daher sei für dieses Beispiel angenommen, dass die zwei ausgewählten Parameter die entsprechenden Strömungen in einem Punkt darstellen. Die Matrix \mathbf{B} ist in diesem Fall eine dünnbesetzte Matrix, da nur die zwei entsprechenden Strömungen abgegriffen werden.

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Durch einsetzen in das Modell folgt damit

$$\mathbf{B}^T (\widehat{\boldsymbol{x}} + \mathbf{r}) = \mathbf{b} \quad (3.49)$$

$$\Rightarrow \widehat{x}_5 + r_5 = 0 \quad (3.50)$$

$$\widehat{x}_6 + r_6 = 0 \quad (3.51)$$

und entsprechend als Testgröße

$$t = \mathbf{r} \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\mathcal{X}}\}^{-1} \mathbf{r} \quad (3.52)$$

$$= \begin{bmatrix} r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}^T \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\mathcal{X}}\}^{-1} \begin{bmatrix} r_5 \\ r_6 \end{bmatrix} \sim \chi_2^2 \quad . \quad (3.53)$$

Mit dieser Testgröße kann daraufhin die Entscheidung getroffen werden, ob die Nullhypothese angenommen oder abgelehnt wird. Hier gilt analog zum Parameterstest, dass falls die Nullhypothese angenommen wird, keine signifikante Strömung vorliegt. Dementsprechend muss für eine signifikante Strömung die Alternativhypothese gelten. Auch hier fließen die so bestimmten Strömungen abschließend in ein Strömungsmodell ein.

4. Anwendung des Verfahrens

Im ersten Schritt für die Berechnung der Ozeanströmungen erfolgt die Implementierung der Spline-Interpolation. Diese wird zunächst in einer eindimensionalen Variante überprüft und daraufhin auf den zweidimensionalen Fall übertragen (siehe Kapitel 4.1). Die resultierenden Gradienten können anschließend durch Integration der Varianzfortpflanzung mit einer entsprechenden Kovarianzmatrix erweitert werden. Zusätzlich wird in diesem Kapitel die Umrechnung der Gradienten entsprechend Kapitel 3.1 dargelegt.

Die Datengrundlage für die Überprüfung des Verfahrens bildet in diesem Kapitel das Modell MDT CNES-CLS13 der mittleren dynamischen Topographie. Dieses wurde bereits in Abbildung 2.2 veranschaulicht. Die sehr starke Glättung und Auflösung dieses Modells bildet gute Voraussetzungen zur Evaluierung der Berechnungsverfahren. Insbesondere die gesuchten geostrophischen Ozeanströmungen sollten sich in diesem Modell deutlich abzeichnen.

4.1 Implementierung der Strömungsbrechung

Die im Kapitel 3 aufgezeigte Methode der Spline-Interpolation kann mit Hilfe des gegebenen Datensatzes der MDT auf ihre Funktionalität überprüft werden. Um diese zu testen, wird die Interpolation zunächst nur für den eindimensionalen Fall bestimmt. Für die Berechnung dieses Beispiels werden für den ausgewählten Breitengrad von $17,875^\circ$ alle vorhandenen Längengrade mit ihren Funktionswerten der MDT genutzt.

Zunächst geht es um die Überprüfung der angesetzten Basisfunktionen und die Betrachtung der resultierenden Gradienten. Um die stückweise berechneten Basisfunktionen darstellen zu können, werden Funktionswerte für die Zwischenstellen auf Grundlage von Gleichung 3.13 bestimmt und dargestellt. Für einen Ausschnitt des Breitenkreises ist die Spline-Interpolation in Abbildung 4.1 dargestellt.

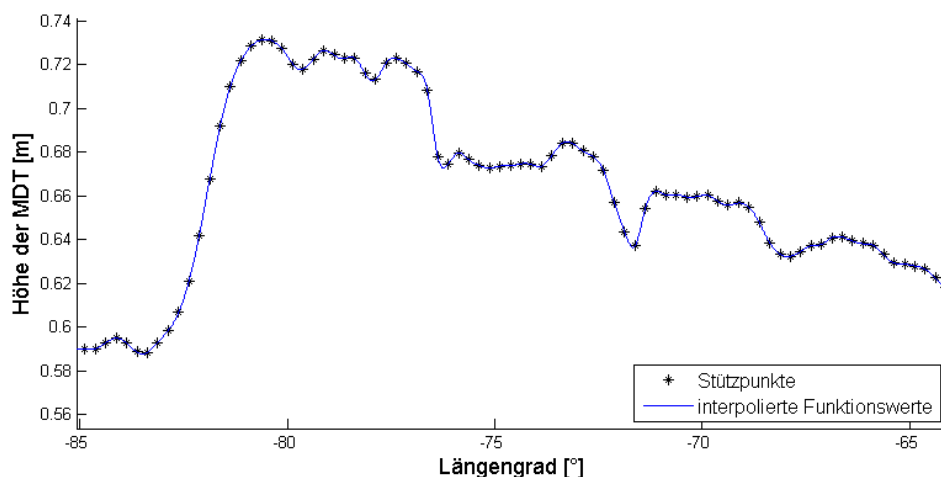


Abbildung 4.1: Darstellung der eindimensionalen Spline-Interpolation für den Breitenkreis von 17.875°

Aus dieser Darstellung wird ersichtlich, dass die Spline-Interpolation und damit die angesetzten Basisfunktionen eine sinnvolle Variante der Interpolation darstellen. Durch die in Kapitel 3.2.1 gewählte Vorgehensweise auf Grundlage von kubischen Polynomen resultiert über den gesamten Bereich der Interpolation eine zweifach stetig differenzierbare Funktion. Insbesondere ist hier die Berechnung von zusätzlichen Funktionswerten für beliebige Stellen innerhalb des gegebenen Intervalls möglich.

Gradienten Die resultierenden Parameter der Spline-Interpolation entsprechen den gesuchten Gradienten bzw. Ableitungen in den gegebenen Stützstellen. Die Umrechnungen für diese Parameter, wie in Kapitel 3.1 aufgezeigt, wurden allerdings noch nicht beachtet. In Abbildung 4.2 ist für einen kleineren Ausschnitt des Breitenkreises mit $17,875^\circ$ sowohl die Interpolation analog zu Abbildung 4.1, als auch die berechneten Gradienten dargestellt. Zur Veranschaulichung werden die Gradienten leicht überzeichnet visualisiert.

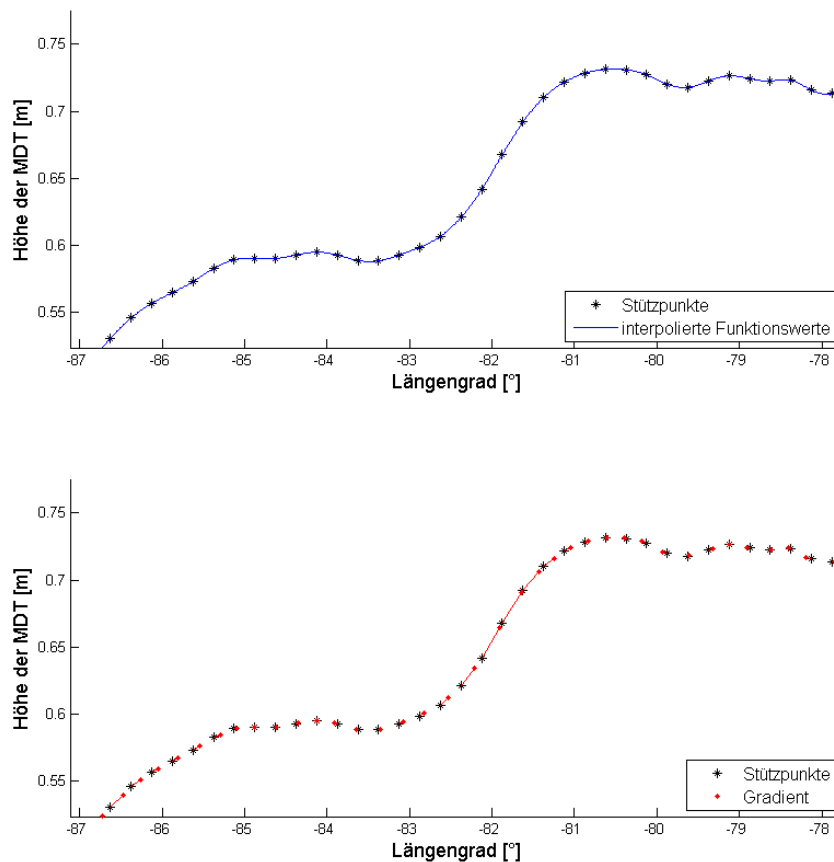


Abbildung 4.2: Darstellung der eindimensionalen Interpolation mit eingezeichneten Gradienten

Für die offensichtlich größeren Steigungen, entlang des Breitenkreises, zeigen sich dementsprechend größere Gradienten. Da diese bis jetzt allerdings nur in der Einheit *Meter pro Grad* angegeben sind, ist keine direkte Interpretation im Bezug auf die gesuchten Ozeanströmungen möglich. Es zeigt allerdings, dass durch die angesetzten Berechnungen sinnvolle Ergebnisse für die Steigungen resultieren.

Nun folgt die Übertragung der Spline-Interpolation von der eindimensionalen auf die gesuchte zweidimensionale Problemstellung. Die Berechnung erfolgt hier separat entlang der Breiten- und Längengrade. Zunächst werden alle Gradienten entlang der Breitenkreise berechnet. Dazu wird für jeden Breitenkreis eine neue Spline-Interpolation entsprechend Kapitel 3.2.1 angesetzt und ausgerechnet. Dieser Vorgang wird analog für alle Meridianstreifen wiederholt.

Nach dieser Berechnung resultieren daher für jeden Knotenpunkt des Datensatzes ein Gradient in Richtung der geographischen Länge und ein weiterer in Richtung der geographischen Breite. Diese sind in Abbildung

4.3 veranschaulicht. In diesem Fall wurden die Gradienten nicht zusätzlich skaliert. Es zeigen sich hier bereits starke Variationen in den Ergebnissen.

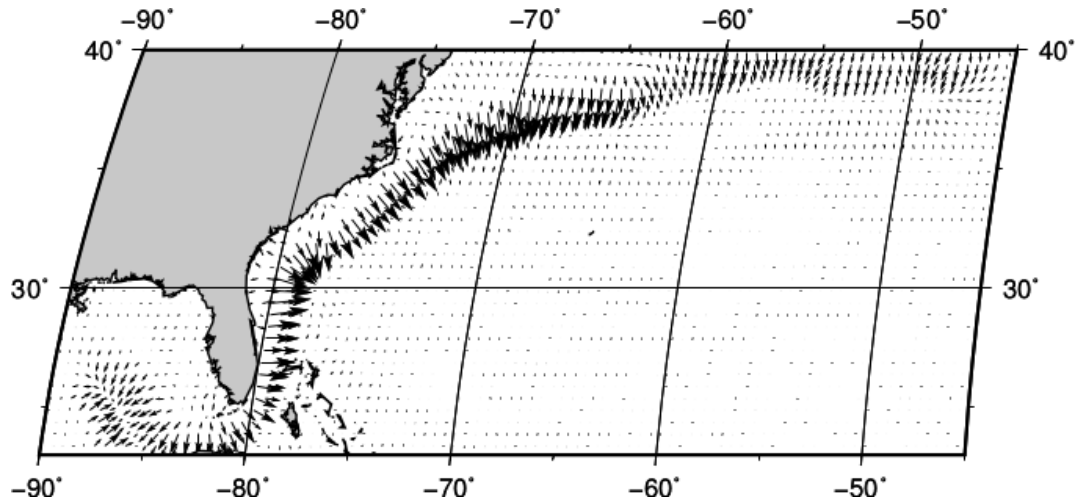


Abbildung 4.3: Ausschnitt eines Gradienten-Feldes aus der zweidimensionalen Spline-Interpolation

Durch die in Abbildung 4.4 dargestellte mittlere dynamische Topographie des Nordatlantiks ist ein direkter Bezug zu den Gradienten möglich. Sehr deutlich sind hier bereits die Gradienten entlang des Golfstroms sichtbar. Durch die sehr großen Differenzen der MDT in kleinräumigen Bereichen entlang des Golfstroms resultieren hier entsprechende Gradienten. In großen Bereichen des Nordatlantiks, wie zum Beispiel im südlichen Bereich, sind die Variationen der MDT relativ gering. Dieser Sachverhalt spiegelt sich auch in den Gradienten aus Abbildung 4.3 wieder. Die Gradienten sind hier, relativ zu den Gradienten des Golfstroms, minimal.

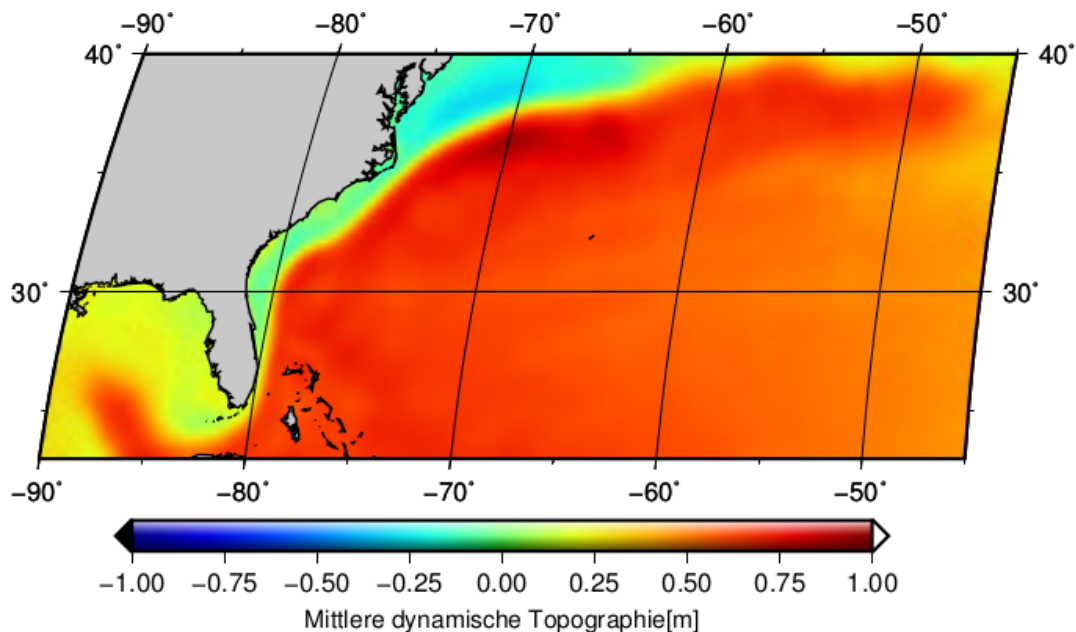


Abbildung 4.4: Ausschnitt des Modells der mittleren dynamischen Topographie

Durch die zweidimensionale Spline-Interpolation ergeben sich daher sinnvolle Gradienten an die dargestellte Oberfläche der MDT. Offensichtlich entsprechen diese allerdings noch nicht den gewünschten Ozeanströmungen. Besonders die Richtung der Gradienten sollte sich durch die weitere Verarbeitung stark ändern.

Strömungsberechnung Die dargestellten Gradienten müssen für die gesuchten Ozeanströmungen nun nach Kapitel 3.1 umgerechnet werden. Hier werden insbesondere die Erdbeschleunigung und die wirkende Corioliskraft berücksichtigt. Anschließend erfolgt noch die Umrechnung in die entsprechende Einheit einer Ozeanströmung. Nach Anbringung der weiteren Umrechnungen an die Gradienten ergeben sich sinnvolle Größen und Richtungen für die Ozeanströmungen. Ein Vergleich zwischen den Gradienten aus der Interpolation und den daraus berechneten Ozeanströmungen ist in Abbildungen 4.5 und 4.6 veranschaulicht.

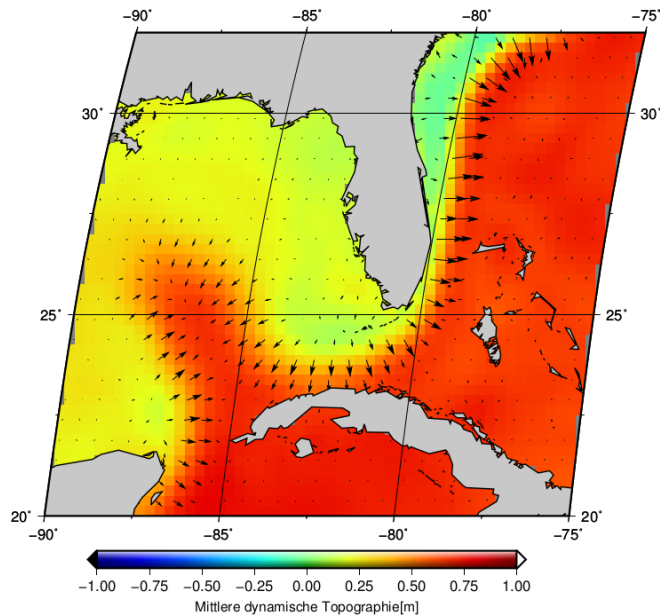


Abbildung 4.5: Ausschnitt des Gradienten-Feldes aus Spline-Interpolation entlang der Küste Floridas

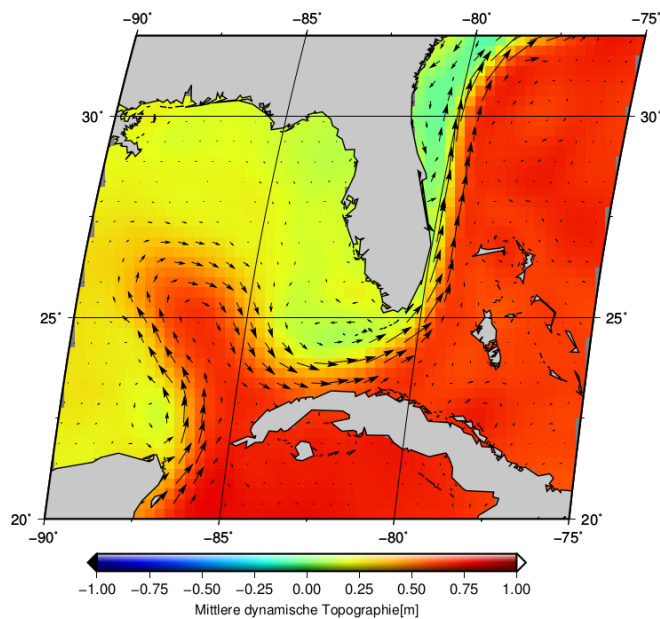
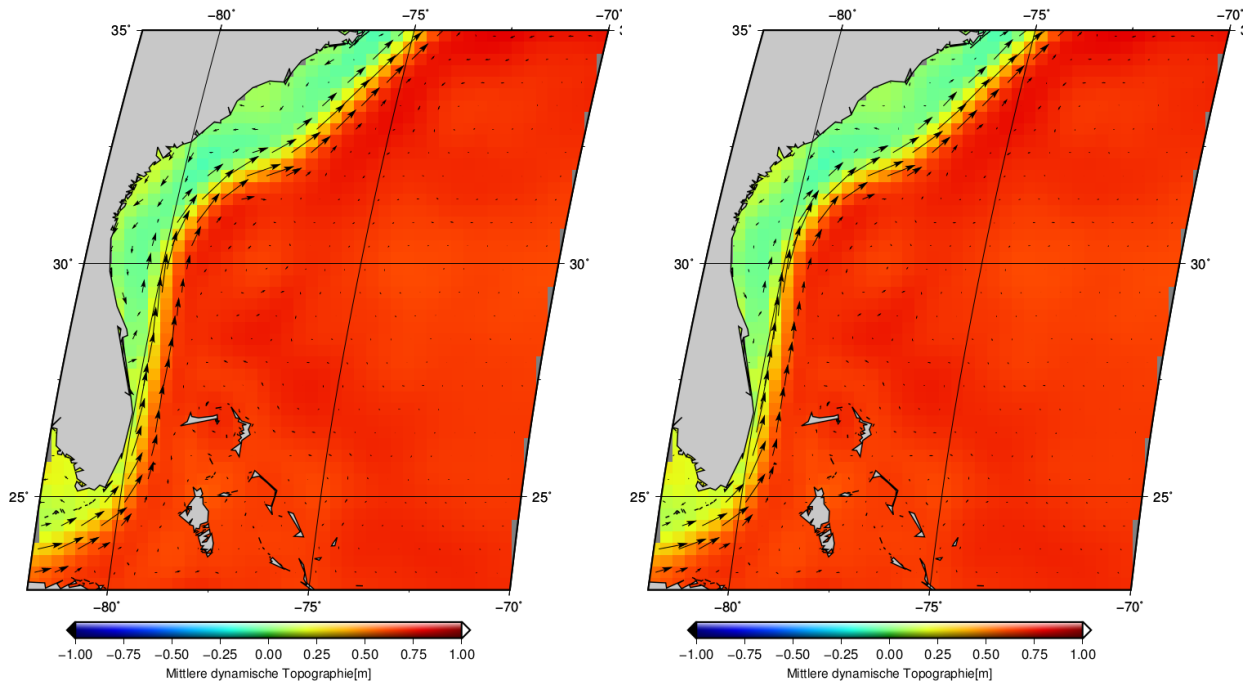


Abbildung 4.6: Ausschnitt des umgerechneten Gradientenfeldes entlang der Küste Floridas

Durch die Umrechnung haben sich insbesondere die Richtungen der Gradienten stark verändert. Bereits in diesem kleinräumigen Bereich ist der Golfstrom entlang der Küste Floridas Richtung Norden sehr gut zu erkennen. Die resultierenden Ozeanströmungen liegen in der passenden Einheit [$m s^{-1}$] vor.

Neben den Funktionswerten der MDT werden auch Strömungsgeschwindigkeiten durch das Modell CNES-CLS13 der mittleren dynamischen Topographie bereitgestellt. Für diese ist allerdings unbekannt, durch welche Berechnungsmethoden sie ermittelt wurden. Die Oberflächenströmungen dieses MDT Modells sind auch durch die jeweiligen Geschwindigkeiten in Nord- und Ostrichtung gegeben. Daher bieten sich hier gute Vergleichswerte für die zuvor berechneten Strömungen. Für beide Strömungsmodelle ist ein Ausschnitt in Abbildung 4.7 veranschaulicht.



(a) Ausschnitt des Strömungsmodells aus Interpolation (b) Ausschnitt des Strömungsmodells aus MDT CNES-CLS13

Abbildung 4.7: Vergleich der Strömungen zwischen Spline-Interpolation und CNES Modell

Der Vergleich zwischen den berechneten Strömungen aus der Interpolation und denen des gegebenen Modells zeigt eine große Übereinstimmung. Insbesondere die Beträge und Richtungen der Strömungen des gezeigten Golfstroms stimmen deutlich überein. Unterschiede wiederum zeigen sich in Küstennähe. Hier wird im Zuge der Spline-Interpolation durch zusätzliche Annahmen die Randwertproblematik überwunden. In diesem Fall wird dies durch den natürlichen Spline gelöst. Daher könnten durch die Wahl von anderen Randbedingungen deutlich unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten resultieren. Da die Berechnungsmethoden der Strömungen des gegebenen Modells allerdings unbekannt sind, kann hier kein direkter Vergleich gezogen werden.

4.2 Anwendung auf Datengrundlage nach ?

Im folgenden Kapitel soll nun die bereits theoretisch beschriebene Varianzfortpflanzung implementiert werden. Durch die daraus folgenden Unsicherheitsinformationen ist die Anwendung der Hypothesentests möglich. Für diese Anwendung wird nun ein Modell von ?, wie in Kapitel 2.3 beschrieben, genutzt. Dieses stellt im Vergleich zum Modell MDT CNES-CLS13 eine Kovarianzmatrix der Beobachtungen bereit. Da für dieses Modell ein wesentlich kürzerer Zeitraum verwendet wird, entsteht hier ein erheblich raueres Modell, welches weniger stark geglättet ist. Die Auflösung und der untersuchte Bereich entsprechen den Beschreibungen aus Kapitel 2.3. Zur Berechnung einer mittleren Meeresoberfläche wurden für dieses Modell Daten aus insgesamt 6 Jahren der Altimetermissionen Jason-1 und Envisat verwendet. Die MDT wurde daraufhin mit Hilfe des Schwerefeld Modells GOCE RL05 (?) nach den Berechnungen aus 2.3 bestimmt. Zunächst wurden für diese Datengrundlage die Gradienten bzw. Ozeanströmungen berechnet und dargestellt. Diese werden in Abbildung 4.8 für das gesamte Gebiet veranschaulicht.

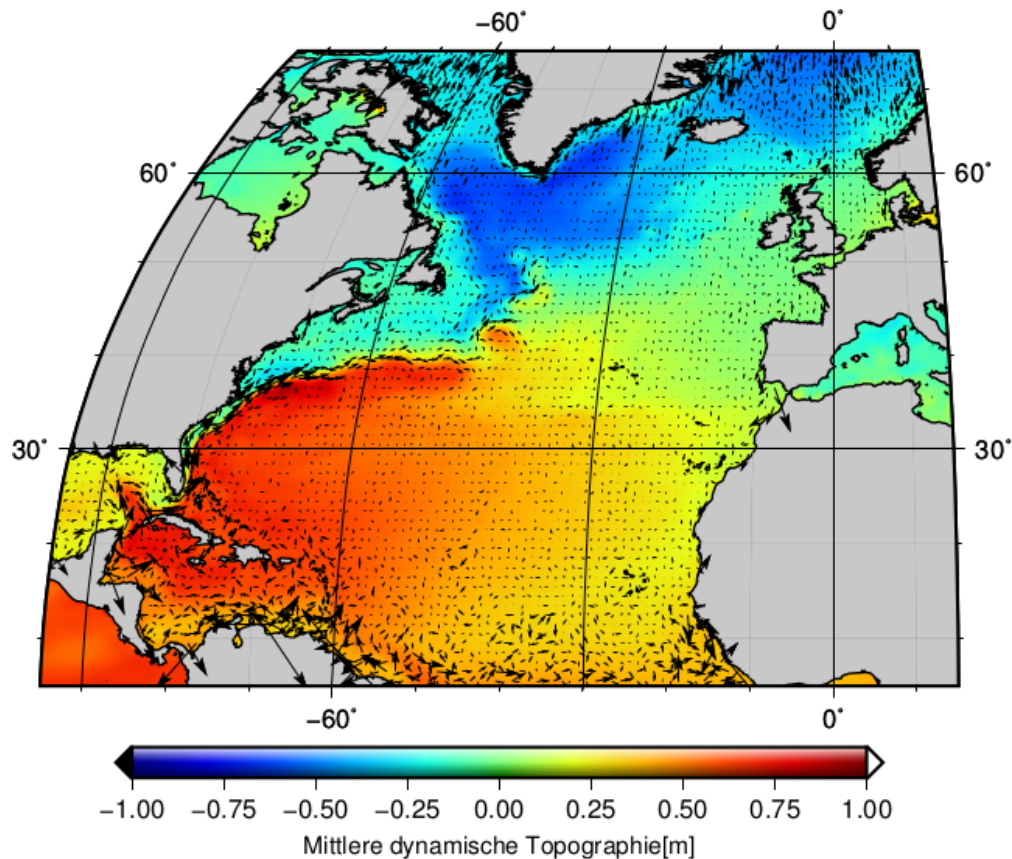


Abbildung 4.8: Ungefiltertes Strömungsmodell aus Datengrundlage nach ?

Bei den dargestellten Ozeanströmungen zeigt sich ein deutlicher Unterschied zum zuvor verwendeten Modell. Durch den wesentlich kürzeren Zeitraum der Datengrundlage entstehen teilweise recht starke Ausreißer in den Ozeanströmungen. Insbesondere im südlichen und nördlichen Randgebiet sind Strömungen dargestellt, die nicht in einem Strömungsmodell verwendet werden können.

Um diese Ausreißer zu eliminieren, wird aus den Strömungskomponenten in Nord- und Ostrichtung ein Betrag für die Strömungsgeschwindigkeit berechnet. Daraufhin werden alle Strömungen, welche den Grenzwert von $2 [ms^{-1}]$ überschreiten, aus dem Strömungsmodell entfernt. Es resultieren die in Abbildung 4.9 dargestellten Strömungen.

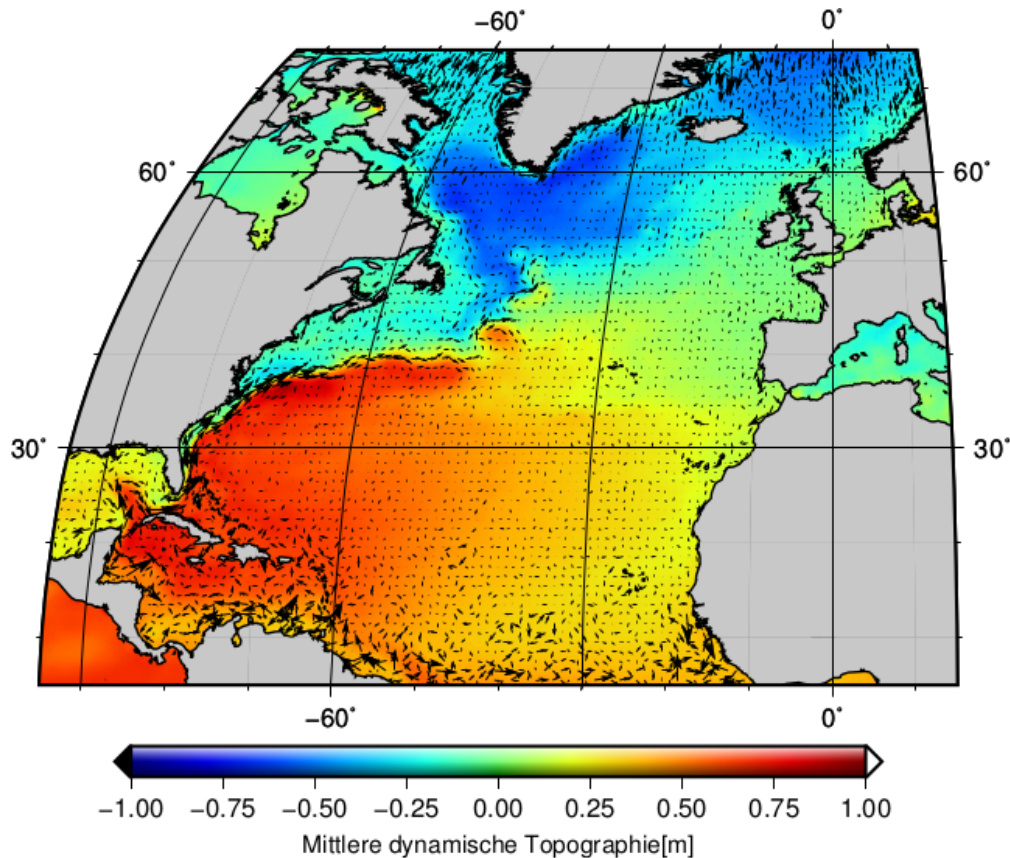


Abbildung 4.9: Strömungsmodell aus Datengrundlage nach Ausreißereliminierung

Mit diesem Strömungsmodell als Grundlage werden im späteren Verlauf die Hypothesentests durchgeführt. Dabei wird ein besonderes Augenmerk auf den Bereich des Golfstroms gelegt.

4.3 Implementierung der Varianzfortpflanzung für die Spline-Interpolation

Während der bis jetzt dargestellten Berechnung der Ozeanströmungen sind durch das gewählte Vorgehen zunächst keine Probleme aufgetreten. Bis hierhin wurden allerdings lediglich die Gradienten und Ozeanströmungen berechnet. Im darauffolgenden Schritt sollen die bestimmten Strömungen mit der in Kapitel 3.2.2 aufgezeigten Varianzfortpflanzung durch eine Kovarianzmatrix ergänzt werden. In einem ersten Schritt werden diese analog zu dem zuvor beschriebenen Vorgehen bestimmt. Dies bedeutet konkret, dass für jeden Breitenkreis und entlang jedes Meridianstreifens ein eigener Spline und damit auch eine eigene Varianzfortpflanzung berechnet wird. Dementsprechend resultieren für jeden Gradienten Unsicherheitsinformationen. Eine vollständige Kovarianzmatrix, mit entsprechenden Korrelationen zwischen den Gradienten, ist nur für jeden separat angesetzten Spline vorhanden. Als eine erste Lösung ist dies ausreichend, da sich für jeden Gradienten auch eine entsprechende Standardabweichung bestimmen lässt. Sowohl für die angestrebten Hypothesentests, als auch die Zuverlässigkeit der resultierenden Kovarianzmatrix, ist dies nicht zufriedenstellend. Durch die Berechnung über separate Splines gehen zahlreiche Korrelationen, welche durch die Kovarianzmatrix der Beobachtungen gegeben sind, verloren. Um dieses Problem zu lösen, wird im weiteren Verlauf auf eine optimierte Berechnungsmethode, wie in Kapitel 3.2.3 beschrieben, zurückgegriffen.

Durch dieses Verfahren werden alle Gradienten in Nord- und Ostrichtung in einem Schritt berechnet. Des Weiteren lässt sich auch eine Kovarianzmatrix für alle Parameter gleichzeitig bestimmen. Die resultierenden Parameter stimmen hier exakt mit denen aus der vorangegangenen Berechnung überein. Dies ist allerdings auch zu erwarten, da sich an der eigentlichen Berechnung des Splines nichts ändert. Ein unterschiedliches Ergebnis folgt allerdings bei der Varianzfortpflanzung. Insbesondere an den Kreuzungspunkten (siehe Kapitel 3.2.3) entstehen durch die Varianzfortpflanzung Korrelationen zwischen den Gradienten in einem Punkt. Des Weiteren resultiert aber auch eine vollständige Kovarianzmatrix für die gesamten Parameter.

Nachdem die Gradienten mit zugehöriger Kovarianzmatrix bestimmt wurden, folgt die Umrechnung in Ozeanströmungen. Diese Umrechnung wurde für die Gradienten zuvor ausführlich dargestellt. Um auch eine Kovarianzmatrix für die Ozeanströmungen zu erhalten, muss für die durchgeführte Umrechnung erneut eine entsprechende Varianzfortpflanzung angesetzt werden. Da die Umrechnung allerdings ausschließlich durch konstante Werte erfolgt, vereinfacht sich die Varianzfortpflanzung stark und wird hier nicht detailliert dargestellt. Für den darauffolgenden Hypothesentest resultieren durch diese Berechnung die Ozeanströmungen mit einer vollständigen Kovarianzmatrix. Die entsprechenden Standardabweichungen werden im Folgenden in Abbildung 4.10 für die Ozeanströmung in Ostrichtung und die mittlere dynamische Topographie veranschaulicht.

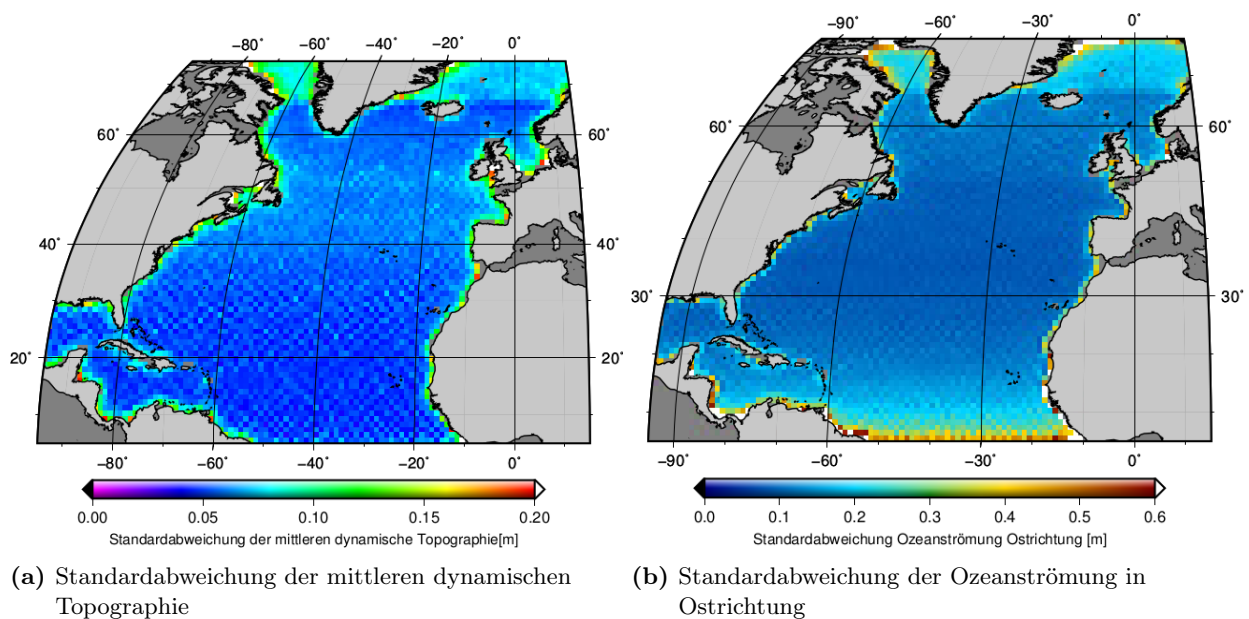


Abbildung 4.10: Darstellung der Standardabweichungen von Ozeanströmung und MDT

Es zeigt sich ein deutlicher Zusammenhang zwischen den Genauigkeiten der mittleren dynamischen Topographie und denen der berechneten Ozeanströmungen. Wie zuvor erwähnt, ist das MDT Modell insbesondere in den Küstengebieten und in den nördlichen bzw. südlichen Randgebieten wesentlich ungenauer. Diese Ungenauigkeiten spiegeln sich nach der Varianzfortpflanzung auch in den Ungenauigkeiten der Strömungen wieder. Für die Standardabweichungen der Strömung in Nordrichtung resultiert daher eine ähnliche Darstellung.

4.4 Anwendung der Hypothesentests

Die Idee des folgenden Hypothesentests ist es, signifikante Strömungen aus dem berechneten Modell zu bestimmen. Dazu werden die in Kapitel 3.3 dargestellten stochastischen Tests verwendet. Insgesamt sollen

drei verschiedene Varianten des Hypothesentests erfolgen. Zunächst werden die zwei Strömungskomponenten eines Knotenpunktes in eine Strömung umgerechnet und daraufhin mit einem Parametertest auf ihre Signifikanz überprüft. Des Weiteren wird ein Parametertest der einzelnen Strömungskomponenten durchgeführt. Als letztes folgt ein Globaltest durch das Testen von Restriktionen.

4.4.1 Parametertest mit einer Strömung

Um einen Parametertest mit einer einzigen Strömungsgeschwindigkeit durchzuführen, müssen diese zunächst bestimmt werden. Da die beiden Strömungskomponenten in Nord- und Ostrichtung senkrecht aufeinander stehen, ist die Berechnung sehr einfach. Um den Betrag der Strömung x_s in einem Knotenpunkt zu bestimmen, müssen daher lediglich die Beträge der Strömungskomponenten v und u addiert werden.

$$x_s = |v| + |u| \quad (4.1)$$

Mit Hilfe der Kovarianzmatrix der Ozeanströmungen Σ_{ss} kann wieder eine Varianzfortpflanzung auf die einzelnen Strömungen berechnet werden. Daraus resultiert eine Kovarianzmatrix für die zusammengerechnete Strömung.

$$\Sigma_{x_s x_s} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{ss} \cdot \mathbf{F}^T \quad (4.2)$$

Mit dieser Grundlage kann der Parametertest nach Kapitel 3.3.1 durchgeführt werden. Dabei wird als Nullhypothese angenommen, dass der zu testende Parameter Null ist. Das Wahrscheinlichkeitsniveau des Tests entspricht 95% für eine normalverteilte Testgröße. Alle Parameter bei denen die Nullhypothese zutrifft, stellen keine signifikanten Strömungsgeschwindigkeiten dar. Dementsprechend gehen nur Strömungen mit geltender Alternativhypothese in das resultierende Strömungsmodell (siehe Abbildung 4.11) ein.

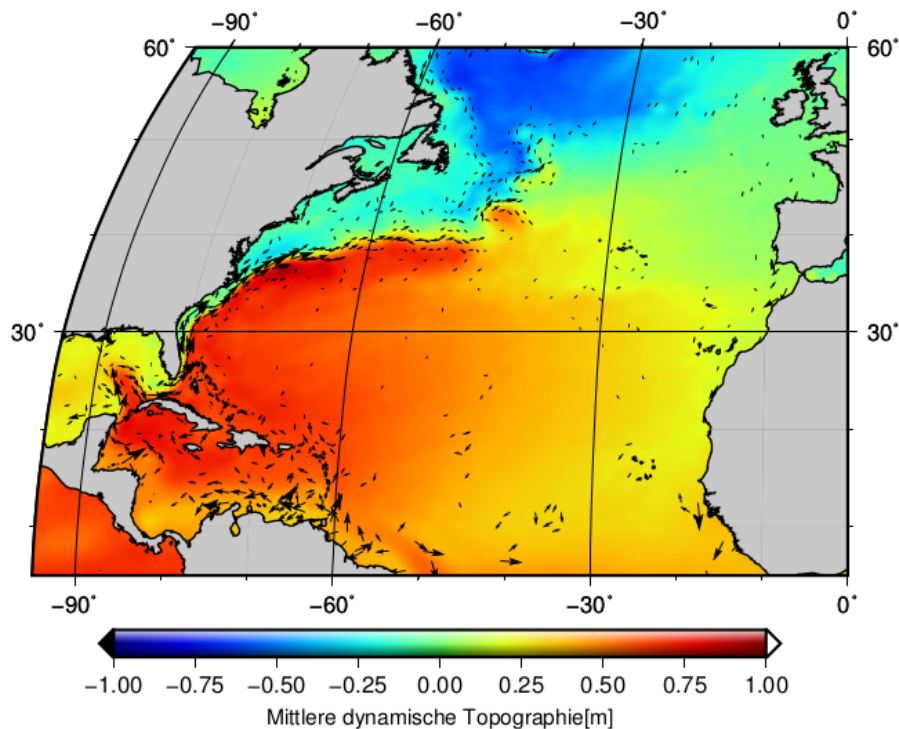


Abbildung 4.11: Strömungsmodell nach Hypothesentest mit einer Strömung

Es wird deutlich, dass einige Strömungen - vor allem solche in Randbereichen - durch den Parametertest aus dem Modell genommen werden. Sehr gut ersichtlich ist, dass die berechneten Strömungsgeschwindigkeiten des Golfstroms fast vollständig in das Strömungsmodell übernommen werden. Für eine bessere Darstellung wird ein kleinerer Ausschnitt des Nordatlantiks verwendet (siehe Abbildung 4.13).

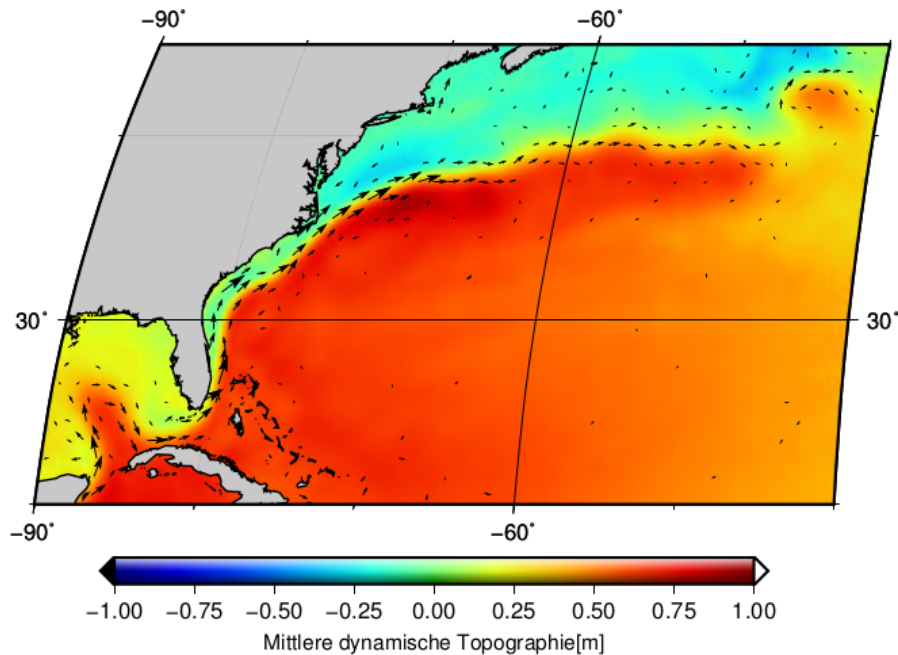


Abbildung 4.12: Ausschnitt des Strömungsmodells nach Hypothesentest mit einer Strömung

4.4.2 Parametertest mit zwei Strömungskomponenten

Um die Ozeanströmungen mit den einzelnen Strömungskomponenten in Nord- und Ostrichtung zu testen, wird ebenfalls ein Parametertest angewendet. Dieser hält sich strikt an das Vorgehen aus Kapitel 3.3.1. Dabei muss das Wahrscheinlichkeitsniveau allerdings entsprechend angepasst werden. Die einzelnen Komponenten werden mit einem Wahrscheinlichkeitsniveau von 90.2% getestet, um daraufhin für die gesamte Strömung ein Wahrscheinlichkeitsniveau von 95% zu erhalten. Das resultierende Strömungsmodell wird in Abbildung 4.13 veranschaulicht.

Auch für diesen Parametertest wurden die Parameter analog gegen Null getestet. Dementsprechend resultiert die gleiche Nullhypothese für den Testablauf. In diesem Fall wurden Strömungen in das Strömungsmodell aufgenommen, sobald eine der Strömungskomponenten eine angenommene Alternativhypothese erhält. Falls die Strömungen nur in ein Modell aufgenommen werden, sobald beide Strömungen signifikant sind, entsteht ein weiteres Problem. Strömungen, die lediglich eine sehr starke Ausprägung in Nord- bzw. Ostrichtung haben, würden damit als nicht signifikant ermittelt. Daher ist es ausreichend, wenn eine der Strömungskomponenten als signifikant getestet wurde.

Das resultierende Strömungsmodell zeigt sehr hohe Ähnlichkeiten mit dem in Kapitel 4.4.1 berechneten Strömungsmodell. Viele kleine Strömungen werden durch den Test aus dem Modell entfernt. Diese sind aber auch offensichtlich als nicht signifikant anzunehmen. Insbesondere die Ozeanströmungen entlang des Golfstroms werden durch dieses Testverfahren deutlich hervorgehoben. Auch hier bleiben allerdings noch viele Strömungen im Randbereich übrig, welche weniger gut in das Strömungsmodell passen.

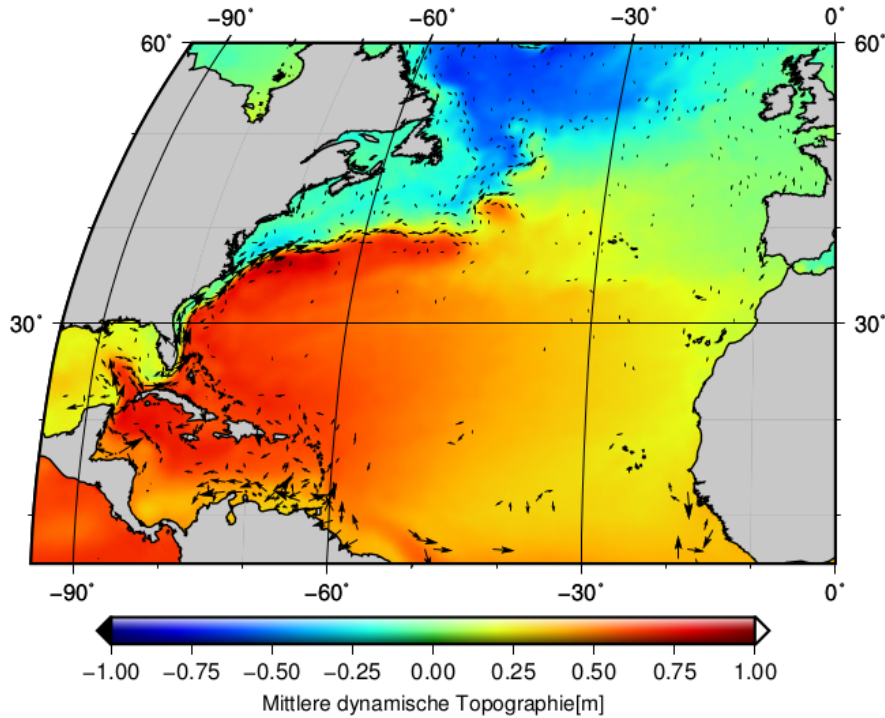


Abbildung 4.13: Strömungsmodell nach Hypothesentest mit zwei Strömungskomponenten

4.4.3 Testen von Restriktionen

Als letzter Hypothesentest erfolgt das Testen von Restriktionen. Grundlegende Idee bei diesem Vorgehen ist, dass Restriktionen an die berechneten Parameter gestellt werden. Das dadurch erstellte Restriktionsmodell wird anschließend durch einen Globaltest überprüft. Dementsprechend ist hier die Nullhypothese, dass ein korrektes Restriktionsmodell gewählt wurde. Daraus ergeben sich zunächst einige Unterschiede im Vergleich zu den zuvor durchgeführten Parametertests. So werden beim Globaltest für die Berechnung der Testgröße auch die Korrelationen zwischen den zwei Strömungskomponenten beachtet. Da diese Strömungskomponenten in einem Knotenpunkt teilweise stark korreliert sind, wird durch diese Berechnung ein etwas anderes Ergebnis erwartet. Des Weiteren besteht durch dieses Testverfahren die Möglichkeit, mehrere Strömungen auf einmal zu testen. Damit wäre es zum Beispiel möglich, ganze Bereiche des Golfstroms mit nur einem Globaltest zu überprüfen. Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens ist, dass keine weitere Varianzfortpflanzung oder Umrechnung der Ozeanströmungen erfolgen muss. Alle benötigten Werte wurden bereits in der vorangegangenen Berechnung ermittelt.

Es erfolgt eine iterative Berechnung der Testgrößen für alle vorhandenen Knotenpunkte. Diese Testgröße ist im Vergleich zu den zuvor gezeigten Parametertests nicht mehr normalverteilt. Durch die berechnete Quadratsumme der Verbesserungen der zweiten Stufe folgt hier eine Chi-Quadrat Verteilung. Dementsprechend wird auch ein einseitiger statt zweiseitiger Test für die Durchführung des Globaltests angesetzt.

Das Testen von Restriktionen erfolgt hier nach Kapitel 3.3.2 und wird immer nur mit zwei korrespondierenden Strömungsgeschwindigkeiten durchgeführt. Diese werden analog zu den Parametertests gegen Null getestet. Dementsprechend sollen auch hier nur signifikante Strömungen in das Modell aufgenommen werden. Im Vergleich zu den zuvor dargestellten Strömungsmodellen, folgt nach Durchführung des Globaltests ein sehr ähnliches Strömungsmodell (siehe Abbildung 4.14).

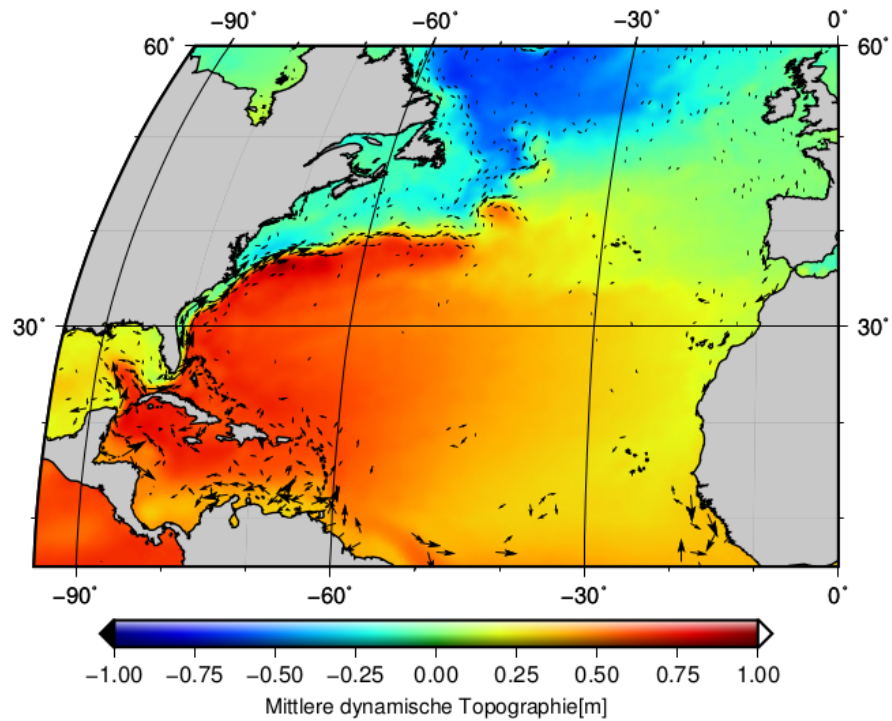


Abbildung 4.14: Strömungsmodell nach dem Testen von Restriktionen

Zur besseren Darstellung der resultierenden Strömungen entlang des Golfstroms wird auch hier ein kleinerer Ausschnitt des Nordatlantiks gewählt, wie in Abbildung 4.15 gezeigt. Hier wird sehr gut deutlich, dass durch den stochastischen Test alle relevanten Strömungen in das Modell einfließen. Kleine Strömungen im Zentrum des Nordatlantiks werden durch ihre sehr geringen Geschwindigkeiten auch hier aus dem Strömungsmodell eliminiert.

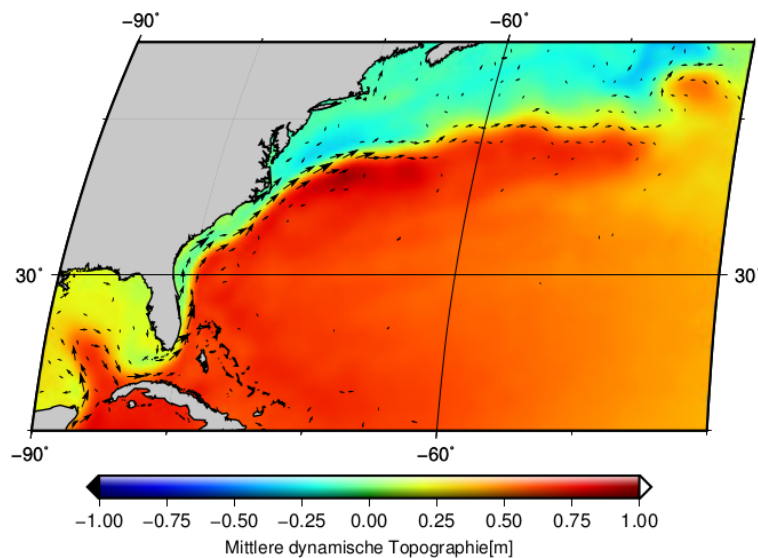


Abbildung 4.15: Ausschnitt des Strömungsmodells nach dem Testen von Restriktionen

4.5 Vergleich der angewendeten Hypothesentests

Nachdem die drei Varianten des Hypothesentests durchgeführt wurden, können die jeweiligen Ergebnisse gegenübergestellt werden. Hierbei ist eine qualitative Bewertung allerdings schwierig. Die resultierenden Ergebnisse und damit die drei bereits dargestellten Strömungsmodelle unterscheiden sich untereinander nur sehr gering. Für einen relativ kleinen Ausschnitt wird dies für alle drei Modelle noch einmal in Abbildung 4.16 verdeutlicht.

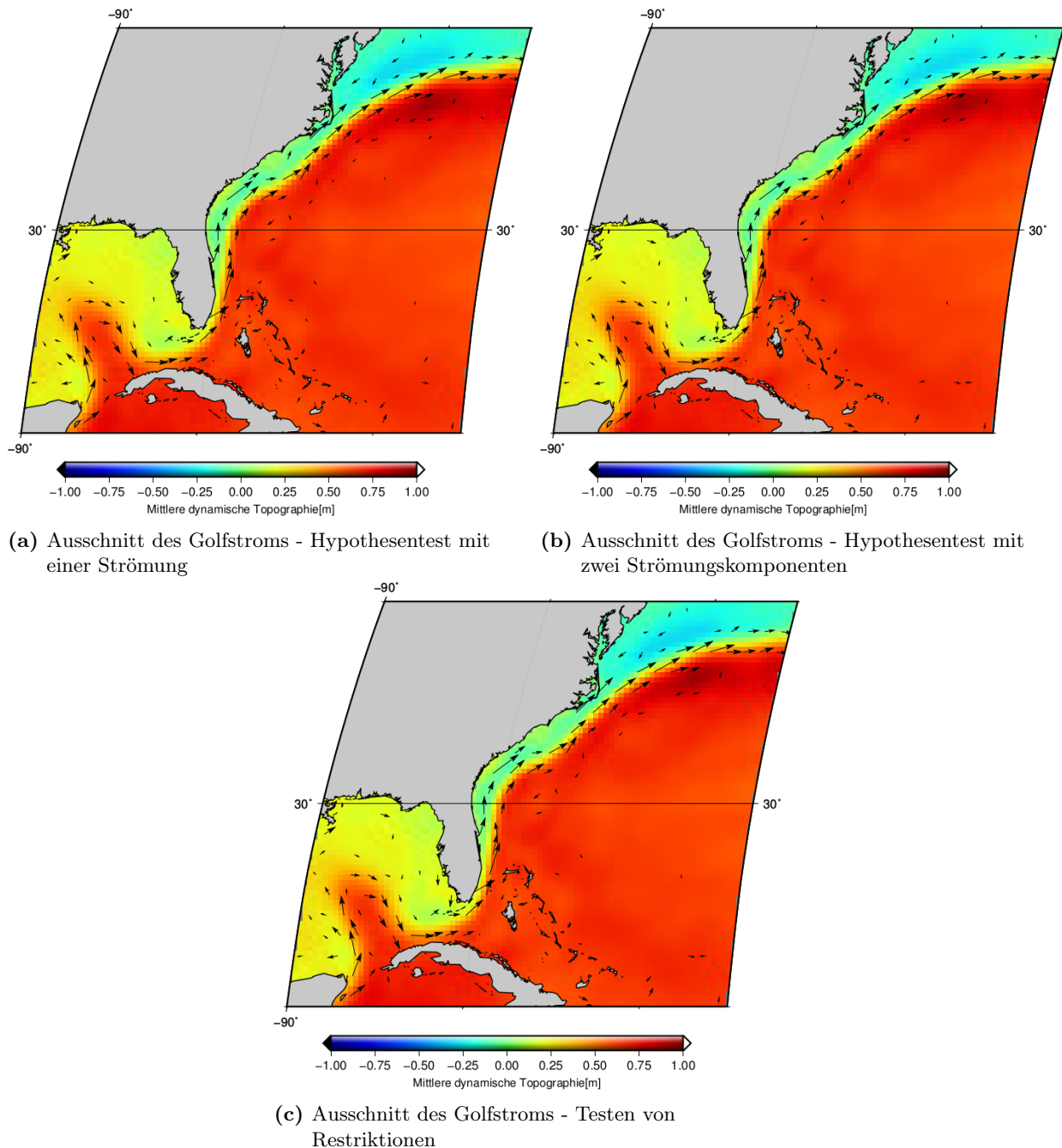


Abbildung 4.16: Vergleich der Strömungsmodelle des Golfstroms nach unterschiedlichen Hypothesentests

In diesen Bildausschnitten ist daher so gut wie kein Unterschied zwischen den resultierenden Modellen ersichtlich. Über den gesamten Bereich der Datengrundlage ergeben sich allerdings größere Unterschiede. Durch den Hypothesentest durchgeführt an einer Strömung folgt die geringste Anzahl an signifikanten Parametern. Aus

den insgesamt 4650 Knotenpunkten bleiben hier lediglich ca. 800 signifikante Strömungen. Dagegen sind die Ergebnisse durch das Testen von Restriktionen bzw. den Hypothesentest mit zwei Strömungskomponenten nahezu identisch. Bei diesen Tests bleiben bei beiden Verfahren ca. 1200 Strömungen erhalten, welche in das Strömungsmodell einfließen. Bei allen drei Testverfahren werden offensichtlich signifikante Strömungen, wie der Golfstrom, auch als solche erkannt. Insgesamt sind daher keine großen Unterschiede zwischen den Ergebnissen zu erkennen. Grundsätzlich bietet das Testen von Restriktionen allerdings die meisten Möglichkeiten und ist als die sinnvollste Methode zu bewerten.

4.6 Untersuchung der Korrelationen zwischen den Strömungen

Eine weitere Größe zur Auswertung der berechneten Strömungen ist die Korrelation. Dazu kann mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten die stochastische Abhängigkeit zwischen zwei Größen bewertet werden. Der Korrelationskoeffizient wird wie folgt definiert (? , Kap. 1)

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad . \quad (4.3)$$

Dieser Korrelationskoeffizient ist auf dem folgenden Wertebereich beschränkt

$$-1 \leq \rho_{12} \leq 1 \quad . \quad (4.4)$$

Werte um Null lassen auf eine sehr geringe bis keine Korrelation schließen. Dagegen lassen Werte mit ± 1 auf eine sehr stark Korrelation schließen und sind damit von wesentlich größerem Interesse. Aus der in Kapitel 3.2.3 dargestellten Kovarianzmatrix der Ozeanströmungen kann daher eine Korrelationsmatrix bestimmt werden. Für diese Korrelationsmatrix ist die folgende Form zu erwarten.

$$K = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}^{\text{Korrelation der Strömung in Ostrichtung}} & \overbrace{\begin{matrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{matrix}}^{\text{Korrelation zwischen Nord- und Ostrichtung}} \\ \overbrace{\begin{matrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{matrix}}^{\text{Korrelation zwischen Nord- und Ostrichtung}} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}^{\text{Korrelation der Strömung in Nordrichtung}} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Die Hauptdiagonale dieser Korrelationsmatrix muss komplett mit Einsen gefüllt sein. Für die Korrelationskoeffizienten nah zueinander liegender Knotenpunkte sind auch Werte für eine hohe Korrelation ($\rho \geq 0.5$) zu erwarten. Des Weiteren sollten in den eingezeichneten Blockmatrizen rechts oben und links unten die Korrelationen zwischen den Strömungen in Nord- und Ostrichtung erkennbar sein. Für die daraufhin berechnete Korrelationsmatrix sind die Matrixeinträge in Abbildung 4.17 dargestellt.

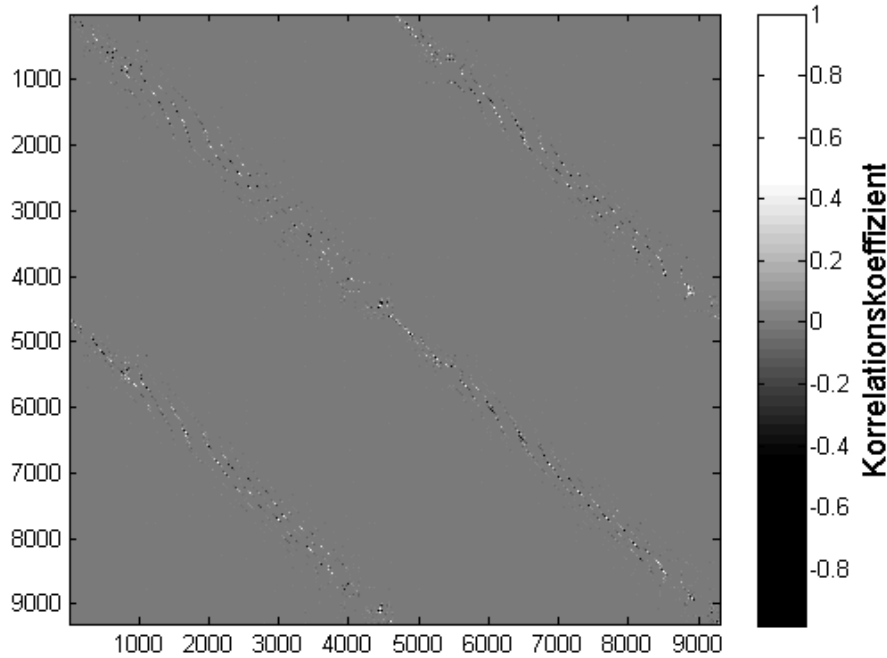
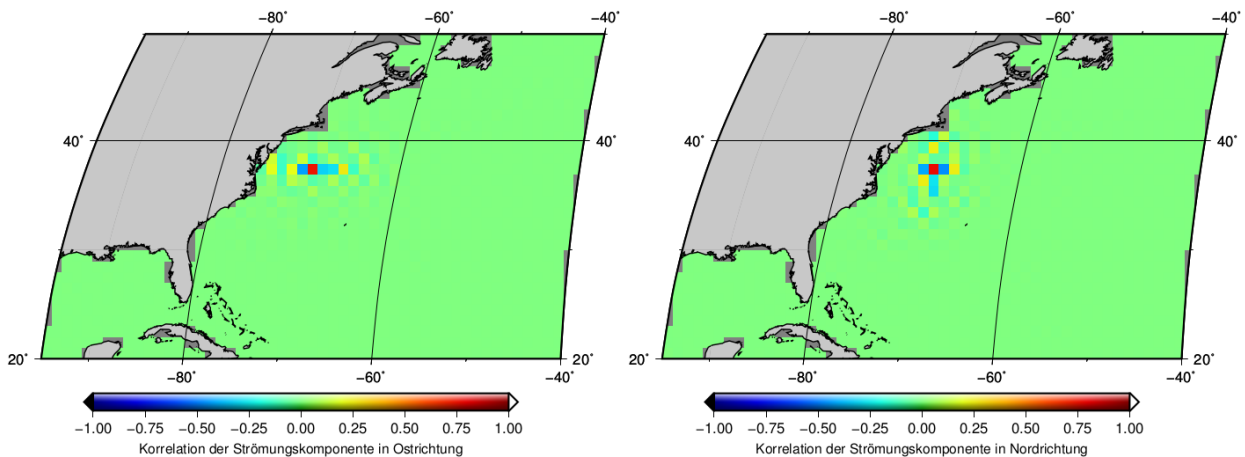


Abbildung 4.17: Darstellung der Matrixeinträge der berechneten Korrelationsmatrix

Die erwartete Darstellung spiegelt sich in der berechneten Korrelationsmatrix gut wieder. Insbesondere besteht eine Korrelation zwischen den Strömungen in Nord- und Ostrichtung eines Knotenpunktes. Da für beide Richtungen der Berechnung des Splines und der Varianzfortpflanzung dieselben Funktionswerte verwendet werden, ist dies auch ein sinnvolles Ergebnis. Für einen ausgewählten Knotenpunkt sind in Abbildung 4.18 die Korrelation der Strömungen in Nord- und Ostrichtung veranschaulicht.



(a) Korrelation der Strömungen in Ostrichtung

(b) Korrelation der Strömungen in Nordrichtung

Abbildung 4.18: Darstellung der Korrelationen der Strömungskomponenten für einen Knotenpunkt

Auch in diesen Darstellungen ist eine Systematik zu erkennen. Die berechneten Strömungen in Ostrichtung sind auch in dieser Richtung stärker mit den nahegelegenen Strömungen korreliert. Ähnliches ist bei den Strömungen in Nordrichtung ersichtlich. In beiden Darstellungen wird deutlich, dass die Strömungen nicht ausschließlich in die jeweilige Richtung der Berechnung korreliert sind. Nach Umrechnung und Varianzfortpflanzung der Strömungskomponenten zu einer Strömung kann analog zur dargestellten Berechnung eine Korrelationsmatrix für eine Strömung bestimmt werden. Daraufhin lässt sich für den gleichen Ausschnitt die Korrelation einer Strömung darstellen (siehe Abbildung 4.19).

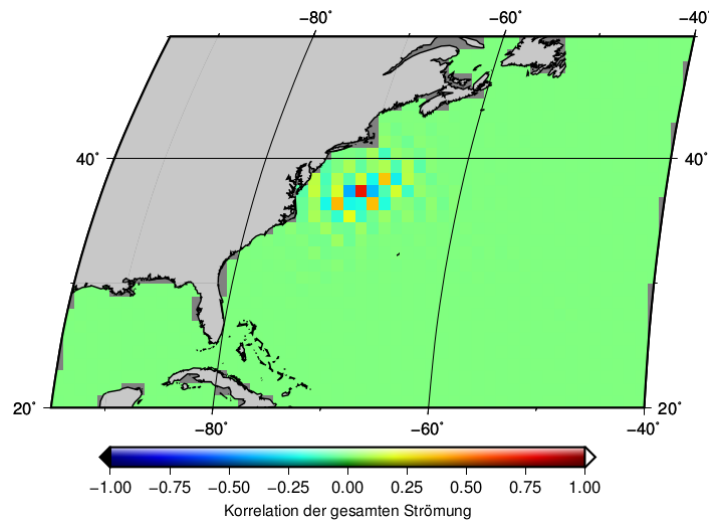


Abbildung 4.19: Darstellung der Korrelationen der Strömung für einen Knotenpunkt

Die Darstellung der Korrelation der gesamten Strömung in einem Knotenpunkt verdeutlicht, dass die umliegenden Knotenpunkte einen starken Einfluss auf die Berechnung haben. Insbesondere für die Berechnung der Varianzfortpflanzung sollte die Korrelation nicht vernachlässigt werden. Des Weiteren kann die Korrelation zwischen den Strömungskomponenten in Nord- und Ostrichtung betrachtet werden (Abbildung 4.20). Dies entspricht den gut ersichtlichen Nebendiagonalen in der Matrix 4.17. Es wird deutlich, dass die beiden Strömungskomponenten in großen Teilen korreliert und in wenigen Knotenpunkten sogar stark korreliert sind.

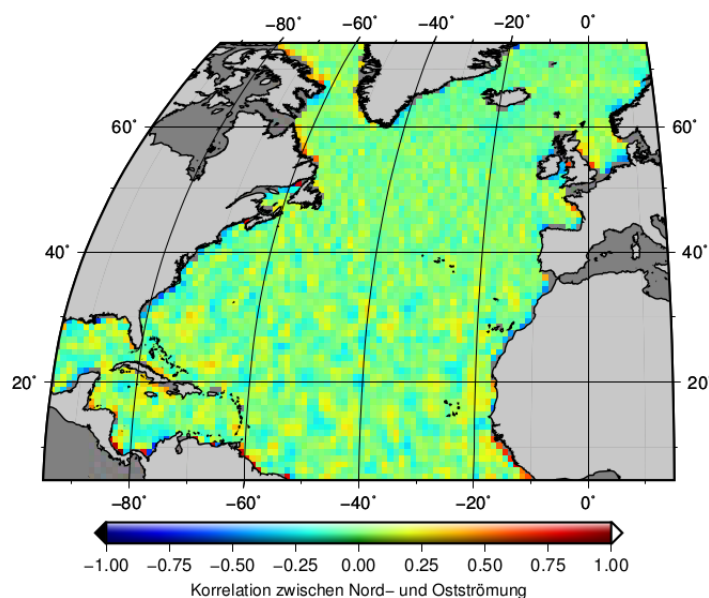


Abbildung 4.20: Darstellung der Korrelationen zwischen den Strömungskomponenten in allen Knotenpunkten

5. Schlussbemerkung

5.1 Fazit

Zur Lösung des ersten Aufgabenteils dieser Arbeit sollte eine geeignete Interpolationsmethode für die Berechnung der Gradienten gefunden werden. Diese ist mit Hilfe der eingesetzten Spline-Interpolation sehr gut durchführbar. Die daraus folgenden Gradienten in Nord- und Ostrichtung bilden durch den Ansatz von kubischen Basisfunktionen eine entsprechend sinnvolle Anpassung an die Datensätze. Die hier entwickelte Varianzfortpflanzung ermöglicht die Bestimmung von Genauigkeiten für die resultierenden Gradienten. Entscheidender Punkt ist die Wahl des in Kapitel 3 aufgezeigten optimierten Berechnungsverfahrens. Dieses ermöglicht einerseits die Berechnung von allen Gradienten gleichzeitig, andererseits aber auch die Berechnung der Varianzfortpflanzung unter Berücksichtigung aller gegebenen Unsicherheitsinformationen. Insbesondere an Kreuzungspunkten darf die Korrelation zwischen den Gradienten in Nord- und Ostrichtung nicht vernachlässigt werden. Als ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Umrechnung der Gradienten in Strömungsgeschwindigkeiten zu sehen. Durch diese Berechnung ändern sich Richtung und Betrag der Gradienten sehr stark und ergeben daraufhin erst sinnvolle Ozeanströmungen. Auch die Umrechnung der Einheiten in entsprechende Geschwindigkeiten ist von hoher Relevanz (Kapitel 4). Insgesamt konnte die verwendete Spline-Interpolation sehr gut an einem stark geglätteten Modell der mittleren dynamischen Topographie verifiziert werden. Leider ist ein direkter Vergleich zu anderen Strömungsmodellen nur durch die Bewertung der resultierenden Strömungsgeschwindigkeiten möglich. Da für die meisten Modelle keine Informationen über die Berechnungsmethoden bekannt sind, ist ein Vergleich zur hier verwendeten Spline-Interpolation nicht möglich.

Die folgenden Hypothesentests variieren unerwartet wenig in den Ergebnissen. Durch einen Parametertest können die Strömungsgeschwindigkeiten sowohl einer Strömung als auch beider Strömungskomponenten getestet werden. Das Testen einer einzigen Strömung führt hier zur geringsten Anzahl von signifikanten Strömungen, welche später in ein Modell eingebunden werden. Als weiteres Verfahren bringt das Testen von Restriktionen diverse Vorteile. Dazu gehört die Möglichkeit, mehrere Strömungen auf einmal zu testen oder die sehr einfache Berechnung der Testgrößen. Des Weiteren werden im Gegensatz zu den gezeigten Parametertests die Korrelationen zwischen den beiden Strömungskomponenten nicht vernachlässigt. Trotz alledem sind die Unterschiede der verwendeten Testverfahren relativ gering und können daher nur sehr schwer verglichen werden (Kapitel 4). Grundsätzlich zeigt sich nach Durchführung der stochastischen Tests, dass die mit der Datengrundlage gegebene Kovarianzmatrix der MDT eine realistische Schätzung der Genauigkeiten ist. Küstengebiete und Randgebiete im Norden und Süden sind dabei allerdings als weniger genau zu bewerten. Insgesamt kann durch die aufgezeigten Berechnungsmethoden ein sinnvolles Strömungsmodell ermittelt werden. Insbesondere sehr signifikante Strömungen wie der Golfstrom werden vollständig in das Modell übernommen. Die Betrachtung der Korrelation zwischen den Strömungen zeigt, dass der Einfluss von benachbarten Strömungen sehr groß ist. Für die Berechnung sollten daher insbesondere die Korrelationen zwischen Strömungen in einem Knotenpunkt nicht vernachlässigt werden (Kapitel 4).

5.2 Ausblick

Der wichtigste Aspekt für die Bewertung der Ergebnisse ist zunächst die Datengrundlage. Hier werden durch unterschiedliche Datensätze stark variierende Resultate erreicht. Durch ein über mehrere Jahre gemitteltes

MDT Modell ist daher eine wesentlich bessere Anpassung der Strömungsgeschwindigkeiten möglich. Das hier verwendete Modell hat insbesondere im Randbereich noch sehr hohe Ungenauigkeiten, wodurch berechnete Strömungen teilweise sehr schlecht zu bewerten sind. Eine Anwendung der aufgezeigten Berechnungsmethoden auf andere MDT Modelle wäre daher zunächst sehr sinnvoll. Des Weiteren besteht in diesem Zusammenhang auch die Möglichkeit, die Parametrisierung der mittleren dynamischen Topographie zu ändern. Hier wäre ein anderes Gitter oder auch andere Basisfunktionen mit einem höheren Grad möglich. Die Komplexität der Berechnung würde sich, insbesondere durch die Wahl von höheren Basisfunktionen, stark erhöhen. Für die eigentliche Berechnung der Gradienten wäre im Zuge der Spline-Interpolation die Wahl von unterschiedlichen Randbedingungen möglich. Die Auswirkung auf das resultierende Modell ist aber als minimal zu erwarten, weshalb die Methode des natürlichen Splines bereits eine sinnvolle Variante darstellt. Die im letzten Abschnitt von Kapitel 4 dargestellten Korrelationen zwischen den Ozeanströmungen bieten ebenfalls zahlreiche Informationen. Es zeigt sich, dass Strömungen nur in einem gewissen Radius miteinander korreliert sind. Diese Informationen könnten wiederum für eine weitere Optimierung des Berechnungsverfahrens genutzt werden. Um Strömungen für wesentlich größere Bereiche des Ozeans zu berechnen, bietet dieses Verfahren allerdings eine relativ schlechte Kondition und müsste daraufhin angepasst werden. Eine Aufteilung in kleinere Regionen, bei denen die Korrelation zwischen Knotenpunkten trotzdem nicht vernachlässigt wird, wäre vorstellbar.

A. Bezeichnungen

Zufallszahlen

\mathcal{X}	Zufallsvektor
$E\{\mathcal{X}\}$	Erwartungswert eines Zufallsvektors
$\Sigma\{\mathcal{X}\}$	Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors

Matrizen und Vektoren

c, α	Skalar
ℓ	Beobachtungsvektor
v	Verbesserungsvektor
x	Parametervektor
\hat{x}	ausgeglicher Parametervektor
\mathbf{A}	Matrix
\mathbf{B}^T	Bedingungsmatrix

Verwendete Formelsymbole

Allgemeines

λ	Geographischer Längengrad eines Punktes
ϕ	Geographischer Breitengrad eines Punktes
v	Oberflächenströmungsgeschwindigkeit in Nordrichtung
u	Oberflächenströmungsgeschwindigkeit in Ostrichtung

Datengrundlage

\bar{P}_i	Punktkoordinaten im Einheitsdreieck
T_i	Allgemeines Dreieck
T_0	Einheitsdreieck

Strömungsberechnung

g	Erdbeschleunigung
f	Corioliskraft
Ω	Erdrotation
R	Erdradius
b	Bogenlänge
ρ	Umrechnungsfaktor zwischen Grad und Radiant
$\Delta\phi, \Delta\lambda$	Differenz zwischen zwei Breiten- bzw. Längengraden

Gradientenberechnung

x_A, x_E	Stützstellen eines Intervalls
$f(x_A), f(x_E)$	Funktionswerte an den Stützstellen eines Intervalls
$c_i(x)$	Koeffizienten für umparametrisierte Formulierung der Spline-Interpolation
N	Anzahl der Intervalle
$\Sigma_{\mathbf{xx}}$	Kovarianzmatrix der Beobachtungen
$\Sigma_{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}$	Kovarianzmatrix der Parameter

Hypothesentest

τ	Testgröße
c	Sollwert des Hypothesentests
σ_{x_k}	Standardabweichung des Parameters k
t	Testgröße als spezielle Realisierung
γ	Wahrscheinlichkeitsniveau
K_u, K_o	Oberer und unterer Quantilwert
$N(0, 1)$	Standardnormalverteilung
σ_0^2	A priori Varianzfaktor der Gewichtseinheit
Q	Kofaktormatrix
r	Verbesserungen der 2. Stufe
χ_p^2	Chi-Quadrat Verteilung

B. Abkürzungen

GOCE	Gravity field and steady-state ocean circulation explorer
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
MDT	Mittlere dynamische Topographie
MSS	Mittlere Meeresoberfläche (Mean Sea Surface)
N	Geoid

Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung der Bezugsflächen und Satelliten	2
2.2	Darstellung des globalen MDT Modells CNES-CLS13	4
2.3	Darstellung von Knotenpunkten und Triangulation der finiten Elemente	5
2.4	Darstellung von einem allgemeinen Dreieck T_i und dem Einheitsdreieck T_0 für die finiten Elemente	6
3.1	Modell des geostrophischen Gleichgewichts	7
3.2	Berechnung des Abstandes zwischen zwei Breitenkreisen durch die Bestimmung der Bogenlänge	8
3.3	Berechnung des Abstandes entlang der geographischen Länge mit Hilfe des Parallelkreishalbmessers	9
3.4	Darstellung mehrerer Intervalle für die Spline-Interpolation	11
3.5	Gesamte Gradientenberechnung durch Spline-Interpolation mit einem Gleichungssystem	15
3.6	Darstellung eines Kreuzungspunktes aus Spline in Nord- und Ostrichtung	16
4.1	Darstellung der eindimensionalen Spline-Interpolation für den Breitenkreis von 17.875°	22
4.2	Darstellung der eindimensionalen Interpolation mit eingezeichneten Gradienten	23
4.3	Ausschnitt eines Gradienten-Feldes aus der zweidimensionalen Spline-Interpolation	24
4.4	Ausschnitt des Modells der mittleren dynamischen Topographie	24
4.5	Ausschnitt des Gradienten-Feldes aus Spline-Interpolation entlang der Küste Floridas	25
4.6	Ausschnitt des umgerechneten Gradientenfeldes entlang der Küste Floridas	25
4.7	Vergleich der Strömungen zwischen Spline-Interpolation und CNES Modell	26
4.8	Ungefiltertes Strömungsmodell aus Datengrundlage nach ?	27
4.9	Strömungsmodell aus Datengrundlage nach Ausreißereliminierung	28
4.10	Darstellung der Standardabweichungen von Ozeanströmung und MDT	29
4.11	Strömungsmodell nach Hypothesentest mit einer Strömung	30
4.12	Ausschnitt des Strömungsmodells nach Hypothesentest mit einer Strömung	31
4.13	Strömungsmodell nach Hypothesentest mit zwei Strömungskomponenten	32
4.14	Strömungsmodell nach dem Testen von Restriktionen	33
4.15	Ausschnitt des Strömungsmodells nach dem Testen von Restriktionen	33

4.16 Vergleich der Strömungsmodelle des Golfstroms nach unterschiedlichen Hypothesentests . . .	34
4.17 Darstellung der Matrixeinträge der berechneten Korrelationsmatrix	36
4.18 Darstellung der Korrelationen der Strömungskomponenten für einen Knotenpunkt	36
4.19 Darstellung der Korrelationen der Strömung für einen Knotenpunkt	37
4.20 Darstellung der Korrelationen zwischen den Strömungskomponenten in allen Knotenpunkten	37

Oberseminar

Plakative Darstellung