

Institut für Geodäsie und Geoinformation

---

Professur für Theoretische Geodäsie

Flächenhafte Modellierung  
orts- und zeitabhängiger  
Höhenänderungen

Bachelorarbeit

im Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

an der Hohen Landwirtschaftlichen Fakultät

der Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität

zu Bonn

vorgelegt am 25. Juli 2012 von

Jessica Franken

aus Geilenkirchen

Bonn 2012



Zum Druck freigegebene Version.

14. November 2012

Erster Prüfer: Prof. Dr. techn. W.-D. Schuh

Zweiter Prüfer: Dipl.-Ing. L. Roese-Koerner

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Bonn, 25. Juli 2012

---

Jessica Franken



## Zusammenfassung

Im Westen von NRW konnte seit Jahrzehnten durch das Leitnivellement ein kontinuierliches Absinken von 25% der Landesfläche durch das Senken des Grundwasserspiegels für den dortigen Braunkohleabbau bestätigt werden (BOJE et al. 2008). Aus dem Leitnivellement lassen sich Höhendifferenznetze ableiten in denen Deformationen sichtbar werden.

Inhaltlich beschäftigt sich diese Bachelorarbeit mit der Approximation eines Höhendifferenznetzes mittels stückweise bikubischer Polynome. Die Größe oder Lagerung des regelmäßigen Rechteckgitters, das aufgespannt wird, um das Netz flächenhaft zu approximieren, soll beliebig gehalten werden. Durch diese Freiheit müssen Vorkehrungen getroffen werden, damit auch Bereiche mit zu wenigen oder keinen Beobachtungen approximiert werden können. Dies geschieht durch die sogenannte Krümmungsminimierung (EBNER et al. 1980). Diese verhindert die Unterbestimmung des zur Approximation angesetzten Ausgleichsmodells indem Pseudobeobachtungen eingeführt werden. Somit ist es möglich eine aus Rechteckelementen zusammengesetzte Fläche zu approximieren, deren Stetigkeit an den sie verbindenden Knotenpunkten von besonderem Interesse sein soll. Die Stetigkeit in der ersten Ableitung der Knotenpunkte soll dabei immer gewährleistet sein. Dies wird durch einen Parameterübergang in die Funktionswerte der Knotenpunkte und deren Ableitungen realisiert. Sie sind die Basis des Bogner-Fox-Schmit-Elements (BOGNER et al. 1965).

Die Stetigkeit in der zweiten Ableitung wird wahlweise durch eingeführte Restriktionen implementiert. Durch einen Ausgleich in zwei Stufen kann so effektiv in erster Stufe nur die Krümmungsminimierung angebracht werden und eventuell nach Sichtung der approximierten Fläche in einer zweiten Stufe zusätzlich die gewünschten Restriktionen angewendet werden. Eine Untersuchung der Stetigkeit der durch den entsprechenden Modellansatz für das Ausgleichsmodell generierten Fläche wird im Anschluss durchgeführt.

Die Untersuchung anhand einer synthetischen Fläche wird einer Praxisanwendung vorgezogen, da dort die zu approximierende Fläche als wahre Fläche vorliegt. Auf Grund dessen wird eine trigonometrische Fläche durch eine zweidimensionale Fourierreihe erzeugt, die es ermöglicht ein künstliches Höhendifferenznetz zu generieren. Anhand derer ist es möglich, die Eigenschaften der approximierten Fläche zu untersuchen. Durch die synthetische Fläche wird neben der Analyse der Effekte der unterschiedlichen Modellansätze auf die approximierte Fläche auch die Analyse der Auswirkungen eines komplexen stochastischen zu einem einfachen stochastischen Modells auf die Approximation durchführbar.

Zuletzt wird durch die synthetische Fläche eine Zeitreihe von flächenhaften Deformationen simuliert. Durch einen Modellansatz, der eine zeitliche Approximation ermöglicht, soll dann eine Prognose bezüglich der zukünftigen Deformation möglich sein. Der Vergleich mit der synthetischen Fläche zu diesem Zeitpunkt gibt Aufschluss über die Richtigkeit der Prognose.

## Summary

In the last decades 25 percent of the area of NRW are decreasing, which was confirmed by several levelling campaigns (BOJE et al. 2008). Most of it is due to lowering of the groundwater table for the local coal mining. Through the levelling campaign heightdifference-networks derived in which deformations become visible.

The content of this bachelor thesis is concerned with the heightdifference-network approximation using piecewise bicubic polynomials. Size or storage of a regular rectangular mesh, which is clamped to approximate the net, is to be held arbitrarily. In context of this freedom, precautions must be taken to ensure that areas with too few or no observations can also be approximated. This is done by the so-called curvature minimization (EBNER et al. 1980). This prevents an ill-conditioned system by introducing pseudo-observations. Consequently, it is possible to approximate a composite surface of rectangular elements. Its continuity at the interconnecting nodes should be of particular interest. The continuity in the first derivative of the nodes should always be guaranteed. This is realized by a transition of parameters into the function values of the interconnecting nodes and its derivatives. They are the basis of the Bogner-Fox-Schmit element (BOGNER et al. 1965).

The continuity in the second derivative is optionally implemented by introduced restrictions. By an approach in two stages it can be effectively applied the curvature minimization in the first stage and additionally the desired restrictions can be applied after reviewing the approximated surface in a second stage. Subsequent an investigation of the continuity through the corresponding model approach for the approximation generated surface is carried out.

A study based on a synthetic surface is preferred to a practical application, because the approximated surface is known as an ideal surface. Therefore a trigonometric surface by a two-dimensional Fourier series is generated, which enables an artificial heightdifference-network. This allows to examine the characteristics of the approximated surface. Due to the synthetic surface to the analysis of surfaces approximated by the different modeling approaches are possible. Additionally the analysis of the effects of a complex stochastic model to a simple stochastic Model approximation is feasible.

Finally a time series of planar deformations is simulated by the synthetic surface. By a model approach which allows a temporal approximation, then a prognosis regarding future deformation should be possible. At this time a comparison with the synthetic surface gives information about the accuracy of the forecast.

---

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Approximation räumlich festgelegter Höhendifferenzen</b>                   | <b>2</b>  |
| 2.1      | Der finite Elemente Ansatz mit bikubischen Polynomen . . . . .                | 2         |
| 2.1.1    | Das Bogner-Fox-Schmit-Element . . . . .                                       | 2         |
| 2.1.2    | Stückweise bikubische Polynome . . . . .                                      | 3         |
| 2.2      | Formulierung des funktionalen Zusammenhangs . . . . .                         | 4         |
| 2.3      | Krümmungsminimierung . . . . .  | 7         |
| 2.4      | Restriktionen . . . . .   | 9         |
| 2.4.1    | Natürliche Splines . . . . .  | 11        |
| 2.4.2    | Stetiger Übergang in der zweiten Ableitung . . . . .                          | 11        |
| 2.5      | Ausgleichung . . . . .  | 15        |
| <b>3</b> | <b>Stetigkeit der Polynomapproximation</b>                                    | <b>17</b> |
| 3.1      | Vorgehen zur Analyse der Stetigkeit . . . . .                                 | 17        |
| 3.2      | Ergebnisse der Stetigkeitsanalyse . . . . .                                   | 19        |
| 3.3      | Anwendung der Restriktionen auf die Flächen der zweiten Ableitungen . . . . . | 24        |
| <b>4</b> | <b>Approximation eines synthetischen Beispiels</b>                            | <b>26</b> |
| 4.1      | Synthetisches Beispiel . . . . .  | 26        |
| 4.2      | Approximation mit und ohne Restriktionen . . . . .                            | 28        |
| 4.2.1    | Randverlauf der approximierten Fläche . . . . .                               | 28        |
| 4.2.2    | Optimale Gewichtung der Pseudobeobachtungen . . . . .                         | 30        |
| 4.2.3    | Anzahl der Restriktionen . . . . .  | 33        |

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>5</b> | <b>Approximation mit einem komplex stochastischen Modell</b>                | <b>34</b>  |
| 5.1      | Datengenerierung . . . . .  | 34         |
| 5.1.1    | Herleitung eines komplexen stochastischen Modells mit Datumsfestlegung . .  | 36         |
| 5.1.2    | Herleitung eines komplexen stochastischen Modells ohne Datumsfestlegung . . | 37         |
| 5.2      | Ergebnisse . . . . .  | 37         |
| <b>6</b> | <b>Zeitliche Approximation</b>  | <b>42</b>  |
| 6.1      | Modellansatz . . . . .  | 42         |
| 6.2      | Ergebnisse . . . . .  | 43         |
| <b>7</b> | <b>Schlussbemerkungen</b>   | <b>47</b>  |
| 7.1      | Fazit . . . . .   | 47         |
| 7.2      | Ausblick . . . . .  | 47         |
| <b>A</b> | <b>Bezeichnungen</b>  | <b>i</b>   |
|          | <b>Verzeichnisse</b>  | <b>iii</b> |
|          | Abbildungsverzeichnis . . . . .   | iii        |
|          | Tabellenverzeichnis . . . . .   | iv         |
|          | <b>Literatur</b>  | <b>vi</b>  |



# 1. Einleitung

Der im Westen Nordrhein-Westfalens stattfindende Abbau von Braunkohle und das dafür notwendige Absenken des Grundwasserspiegels führt zu einem kontinuierlichen Absinken von 25% der Landesfläche (BOJE et al. 2008). Zur Feststellung und Überwachung der Bodenbewegungen wird seit Jahrzehnten das sogenannte Leitnivellement durchgeführt. Das Ergebnis dieser großangelegten Vermessungsarbeit sind Höhenwerte lagemäßig festgelegter Punkte in den entsprechenden Jahren. Dies ermöglicht die Differenzbildung zwischen den Epochen, sodass Höhendifferenznetze entstehen. In diesen Höhendifferenznetzen werden Deformationen sichtbar. Sie sollen zeitlich approximierbar werden, um einen möglichen Trend abschätzen zu können.

In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur Anwendung auf dieses Problem untersucht. Von Bedeutung ist dabei die Approximation der Fläche, sowie die Einbringung eines komplexen stochastischen Modells. Untersuchungen von EICHBORN (2010) zeigten einen sehr starken Einfluss des stochastischen Modells auf die zu approximierende Fläche auf. In der vorliegenden Arbeit wird daher eine alternative Parametrisierung gewählt, um eine zeitliche Approximation bei gleichzeitiger komplexer stochastischer Modellierung zu ermöglichen.

Grundlage des zur Approximation der Fläche genutzten Modellansatzes ist die Methode der finiten Elemente. Im Besonderen das Bogner-Fox-Schmit-Element (BOGNER et al. 1965), welches flächenhaft zusammengesetzt aus stückweise bikubische Polynomen besteht. Jedes Element, in der Form ein Rechteckelement, ist Teil des beliebig gespannten Gitters über die zur Approximation genutzten Höhenpunkte. Der Modellansatz wird durch die Hinzunahme der sogenannten Krümmungsminimierung (EBNER et al. 1980) in einer ersten Stufe und der Einbindung von mehreren möglichen Restriktionen in einer zweiten Stufe modifiziert, wodurch mehrere Ausgleichsmodelle möglich werden (Kapitel 2). Während die Krümmungsminimierung eine Unterbestimmung des Ausgleichs verhindern soll, dienen die Restriktionen dazu, die Stetigkeit der Fläche in der zweiten Ableitung zu gewährleisten. Die entstehende Fläche soll in ihren Eigenschaften untersucht werden. Besonderes Augenmerk liegt auf der Stetigkeit in erster und zweiter Ableitung (Kapitel 3).

Um eine Referenzfläche zu synthetisieren, wird durch eine zweidimensionale Fourierreihe eine Fläche erzeugt, an der es möglich ist, Höhendifferenzpunkte abzugreifen (Kapitel 4). Die Untersuchung anhand einer synthetischen Fläche wird einer Praxisanwendung vorgezogen, da dort die zu approximierende Fläche als wahre Fläche vorliegt.

Das komplex stochastische Modell soll, um ihm realistische Werte zuweisen zu können, auf Grundlage eines Höhennetzes generiert werden. Dazu wird eine Delaunay-Dreiecksvermaschung (KLEIN 2005) vorgenommen, welche die Strecken beziehungsweise Verbindungen zwischen den Punkten vorgibt, auf welchen die Höhenunterschiede innerhalb der Nivellements gemessen wurden (Kapitel 5).

Nach der Untersuchung der Eigenschaften der Modellansätze und deren Einflussfaktoren ist eine Trendabschätzung von sich zeitlich fortsetzenden Deformationen möglich. Dies wird an einer Zeitreihe synthetischer Flächen und deren Approximation gezeigt (Kapitel 6).

## 2. Approximation räumlich festgelegter Höhendifferenzen

### 2.1 Der finite Elemente Ansatz mit bikubischen Polynomen

#### 2.1.1 Das Bogner-Fox-Schmit-Element

Die im Nachfolgenden beschriebene Approximation basiert auf der Methode der finiten Elemente. Das Anwendungsgebiet ist eine Fläche, die durch ein Nivellementnetz gewonnene Stützstellen aufweist. Diese Stützstellen sind lediglich punktuell gemessene Höhendifferenzen zwischen zwei Epochen, welche wiederum lagemäßig mit den Koordinatenwerten  $x$  und  $y$  bekannt sind. Die tatsächliche Gestalt der zu approximierenden Fläche bleibt dabei unbekannt, sodass eine Approximation mit einer festen Formvorgabe schwierig ist. Durch die Methode der finiten Elemente ist die zu approximierende Fläche beliebig formbar. Die Möglichkeit der Formanpassung wird durch die Freiheitsgrade des Elements und der Größe der sie umspannenden Grenzen festgelegt. Diese Grenzen sollen hier nun Rechtecke sein. Dazu wird das Gebiet in eine beliebige Anzahl von zu den Achsen des Koordinatensystem parallelen regelmäßigen Rechtecken zerteilt. Diese Rechtecke sind in den sogenannten Knotenpunkten zusammenhängend. Das Bogner-Fox-Schmit-Element, welches erstmals von BOGNER et al. (1965) vorgestellt wurde und hier angewandt werden soll, ist ein sogenanntes  $C^1$ -Element (CIARLET 1976, S. 217), also global beziehungsweise zusammengesetzt gesehen, eine in den ersten Ableitungen stetige Fläche, welche durch ein System von endlich vielen Knotenpunktparametern definiert ist (HAHN 1975). Diese Knotenpunktparameter bestehen für jedes Flächenelement aus dem Höhenwert  $b$ , der ersten Ableitung in  $x$  und der in  $y$ -Richtung als Funktionswerte  $b_\xi$  und  $b_\eta$ , sowie der gemischten Ableitung in  $x$ - und  $y$ -Richtung als Funktionswert  $b_{\xi\eta}$ . In Anlehnung an die Form der Darstellung nach BRAESS (1991) soll in Abbildung 2.1 kurz für ein Rechteckelement der Zusammenhang zwischen den im Nachhinein wichtigen Parametern und sonstigen Variablen veranschaulicht werden.

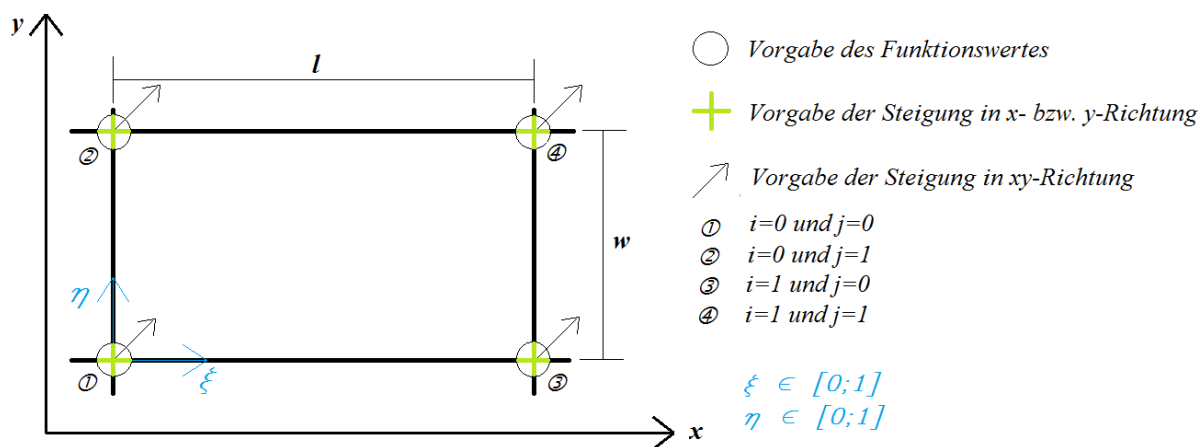


Abbildung 2.1: Das Bogner-Fox-Schmit-Element

### 2.1.2 Stückweise bikubische Polynome

Als Grundlage dient ein Polynom 6. Grades mit insgesamt 16 Koeffizienten. Die Formel für ein unvollständiges, aber die Symmetriebedingung erfüllendes Polynom sechsten Grades (SCHWARZ 1991), welches hier im weiteren verwendet wird, ergibt sich zu

$$b(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \alpha_{ij} \xi^i \eta^j \quad (2.1a)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_{00} + \alpha_{01}\eta + \alpha_{02}\eta^2 + \alpha_{03}\eta^3 \\ &+ \alpha_{10}\xi + \alpha_{11}\xi\eta + \alpha_{12}\xi\eta^2 + \alpha_{13}\xi\eta^3 \\ &+ \alpha_{20}\xi^2 + \alpha_{21}\xi^2\eta + \alpha_{22}\xi^2\eta^2 + \alpha_{23}\xi^2\eta^3 \\ &+ \alpha_{30}\xi^3 + \alpha_{31}\xi^3\eta + \alpha_{32}\xi^3\eta^2 + \alpha_{33}\xi^3\eta^3. \end{aligned} \quad (2.1b)$$

Die Herleitung der gesamtheitlichen Formel um einen funktionalen Zusammenhang auf Grundlage der in Abschnitt 2.1.1 erwähnten Parameter herzustellen, wird im nachfolgenden Abschnitt dargestellt. Durch den Ausgleich nach Parametern (s. Abschnitt 2.5) gewinnt man so eine Schätzung für die tatsächliche Fläche. Vorteil des hier angewandten Elements auf Grund seines kubischen Ansatzes ist, dass es eine Differenzierbarkeit bis zum Grad 2 besitzt, sodass es an die jeweilige Problemstellung in Bezug auf die Stetigkeit angepasst werden kann. In diesem Fall ist die Approximation einer Fläche, die in der Krümmung stetig ist, sicherlich sinnvoll, da von einem kontinuierlichen Absinken der durch ein Nivellementnetz erfassten Region ausgegangen wird, sodass keine sprunghafte Änderung der Steigung innerhalb der Fläche zu erwarten ist. Zudem besitzt die Methode der finiten Elemente eine hohe Adaptivität an den gegebenen Datensatz. Das bedeutet für das hier angesprochene Problem, dass sich die Auflösung auf einfache Weise an die Anforderung des gegebenen Nivellementnetzes anpassen lässt. Ein weiterer Vorteil der finiten Elemente ist die Lokalität. Sie reagieren auf lokale Phänomene nur lokal, also innerhalb eines oder weniger Flächenelementes.

Nachteile der kubischen Polynome ist die Neigung zur Oszillation. Diese tritt dort auf, wo wenige Beobachtungen die Fläche einspannen. Reguliert wird diese bereits durch eine gewisse Steifigkeit der Fläche nach dem Einführen von Restriktionen für die Stetigkeit in der zweiten Ableitung. Aber auch ohne Restriktionen kann ein Weg gefunden werden, durch den die Oszillation begrenzt wird. Die Krümmungsminimierung, welche in Abschnitt 2.3 eingeführt wird, um Datenlücken zu füllen, gibt bereits Beobachtungen für die Knotenpunkte und ihre Ableitungen. Werden diese Beobachtungen, im Weiteren als Pseudobeobachtungen bezeichnet, richtig gewichtet (s. Abschnitt 4.2.2), so kann die Oszillation der Fläche im Bereich von Datenlücken unterdrückt werden.

## 2.2 Formulierung des funktionalen Zusammenhangs

Zur flächenhaften Approximation der durch das synthetische Beispiel aus Abschnitt 4.1 oder ein durch ein reales Nivellement erzeugten dreidimensionalen Stützpunkte sollen finite Elemente mittels stückweise bikubischer Polynome entwickelt werden. Das finite Element soll sich hier über ein rechteckiges Flächenelement erstrecken.

$\xi$  und  $\eta$  sollen zunächst als Koordinaten innerhalb eines Einheitsquadrats (Flächenelement mit den Seitenlängen gleich Eins) angesehen werden. Somit lassen sich die nachfolgenden Umformungen einfacher beschreiben. Später wird dann ein Übergang auf die globalen Koordinaten  $x$  und  $y$  vollzogen (SCHUH 1984, S. 83). Gemäß der dargestellten Formel für ein bikubisches Polynom (2.1b), besitzt dieses somit 16 Koeffizienten  $\alpha_{ij}$ , die für ein Flächenelement bestimmt werden müssen. Nur innerhalb eines Flächenelements approximiert die stückweise definierte Funktion  $b(\xi, \eta)$  die dort enthaltenen Stützpunktwerte, sodass, wie bereits erwähnt, lokale Phänomene auch nur lokale Auswirkungen haben.

Da stückweise Funktionen keinen stetigen Übergang gewährleisten, ist ein Parameterübergang erforderlich. Als Parameter werden die Höhendifferenzwerte an den Gitterpunkten sowie die Ableitung einmal in  $x$ - und einmal  $y$ -Richtung und die kombinierte Ableitung in  $xy$ -Richtung an diesen Stellen gewählt. Durch den Parameterübergang kann so ein stetiger Übergang in der ersten Ableitung in den Knotenpunkten und schließlich auch in der zweiten (s. Abschnitt 2.4) erreicht werden. Um einen Parameterübergang durchführen zu können, muss die Funktion  $b(\xi, \eta)$  einmal nach  $\xi$ , einmal nach  $\eta$  sowie einmal nach  $\xi$  und  $\eta$  abgeleitet werden. Somit ergeben sich die folgenden weiteren drei Gleichungen (SCHUH 1984, S. 79)

$$b_{\xi}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^3 i \alpha_{ij} \xi^{i-1} \eta^j \quad (2.2a)$$

$$b_{\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 j \alpha_{ij} \xi^i \eta^{j-1} \quad (2.2b)$$

$$b_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 ij \alpha_{ij} \xi^{i-1} \eta^{j-1}. \quad (2.2c)$$

Anschließend sind die Gleichungen für die vier Eckpunkte eines jeden Flächenelements aufzustellen. Für jedes Flächenelement  $F_{e,f}$  (definiert durch den Knotenpunkt in der linken unteren Ecke mit  $e$ ...Rechtswert und  $f$ ...Hochwert) ergeben sich aufgrund der oben durchgeführten Reduktion auf ein Einheitsquadrat die Koordinaten der Eckpunkte zu  $\xi = 0$  oder  $\xi = 1$  und  $\eta = 0$  oder  $\eta = 1$ .

Somit lassen sich für jeden Eckpunkt vier Gleichungen, die Polynomfunktion und ihre drei Ableitung, aufstellen. Dadurch ergeben sich 16 Gleichungen. Auf der linken Seite stehen die Unbekannten  $b(0, 0)$ ,  $b(1, 0)$ ,  $b(0, 1)$ , ...,  $b_{\xi\eta}(0, 1)$ ,  $b_{\xi\eta}(1, 1)$  und auf der rechten Seite der funktionale Zusammenhang der dem Flächenelement zugeordneten Unbekannten  $\alpha_{ij}$ . Diese werden anschließend so umgeformt, dass für jede Unbekannte  $\alpha_{ij}$  eine Entsprechung mit  $b(0, 0)$ ,  $b(1, 0)$ ,  $b(0, 1)$ , ...,  $b_{\xi\eta}(0, 1)$ ,  $b_{\xi\eta}(1, 1)$  existiert, sodass sie dann wieder in die Ursprungsgleichung  $b(\xi, \eta)$  eingesetzt werden können.

Die umgeformten 16 Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
\alpha_{00} &= b(0, 0) \\
\alpha_{01} &= b_\eta(0, 0) \\
\alpha_{02} &= 3(b(0, 1) - b(0, 0)) - 2b_\eta(0, 0) - b_\eta(0, 1) \\
\alpha_{03} &= 2(b(0, 0) - b(0, 1)) + b_\eta(0, 0) + b_\eta(0, 1) \\
\alpha_{10} &= b_\xi(0, 0) \\
\alpha_{11} &= b_{\xi\eta}(0, 0) \\
\alpha_{12} &= 3(b_\xi(0, 1) - b_\xi(0, 0)) - 2b_{\xi\eta}(0, 0) - b_{\xi\eta}(0, 1) \\
\alpha_{13} &= 2(b_\xi(0, 0) - b_\xi(0, 1)) + b_{\xi\eta}(0, 0) + b_{\xi\eta}(0, 1) \\
\alpha_{20} &= 3(b(1, 0) - b(0, 0)) - 2b_\xi(0, 0) - b_\xi(1, 0) \\
\alpha_{21} &= 3(b_\eta(1, 0) - b_\eta(0, 0)) - 2b_{\xi\eta}(0, 0) - b_{\xi\eta}(1, 0) \\
\alpha_{22} &= 9(b(0, 0) - b(1, 0) - b(0, 1) + b(1, 1)) + 6(b_\xi(0, 0) + b_\eta(0, 0) - b_\xi(0, 1) - b_\eta(1, 0)) \\
&\quad + 3(b_\xi(1, 0) - b_\eta(0, 1) - b_\xi(1, 1) - b_\eta(1, 1)) + 2(b_{\xi\eta}(1, 0) + b_{\xi\eta}(0, 1)) + 4b_{\xi\eta}(0, 0) + b_{\xi\eta}(1, 1) \\
\alpha_{23} &= 6(b(1, 0) - b(0, 0) + b(0, 1) - b(1, 1)) + 2(b_\xi(1, 1) - b_\xi(1, 0) - b_{\xi\eta}(0, 0) - b_{\xi\eta}(0, 1)) \\
&\quad + 3(b_\eta(1, 0) - b_\eta(0, 1) - b_\eta(0, 0) + b_\eta(1, 1)) + 4(b_\xi(0, 1) - b_\xi(0, 0)) - b_{\xi\eta}(1, 1) - b_{\xi\eta}(1, 0) \\
\alpha_{30} &= 2(b(0, 0) - b(1, 0)) + b_\xi(0, 0) + b_\xi(1, 0) \\
\alpha_{31} &= 2(b_\eta(0, 0) - b_\eta(1, 0)) + b_{\xi\eta}(0, 0) + b_{\xi\eta}(1, 0) \\
\alpha_{32} &= 6(b(1, 0) - b(0, 0) + b(0, 1) - b(1, 1)) + 2(b_\eta(1, 1) - b_\eta(0, 1) - b_{\xi\eta}(0, 0) - b_{\xi\eta}(1, 0)) \\
&\quad + 3(b_\xi(0, 1) - b_\xi(1, 0) - b_\xi(0, 0) + b_\xi(1, 1)) + 4(b_\eta(1, 0) - b_\eta(0, 0)) - b_{\xi\eta}(1, 1) - b_{\xi\eta}(0, 1) \\
\alpha_{33} &= 2(b_\xi(0, 0) + b_\xi(1, 0) - b_\xi(0, 1) - b_\xi(1, 1) + b_\eta(0, 0) - b_\eta(1, 0) + b_\eta(0, 1) - b_\eta(1, 1)) \\
&\quad + 4(b(0, 0) - b(1, 0) - b(0, 1) + b(1, 1)) + b_{\xi\eta}(0, 0) + b_{\xi\eta}(1, 0) + b_{\xi\eta}(0, 1) + b_{\xi\eta}(1, 1).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Führt man nach dem Einsetzen der Koeffizienten  $\alpha_{ij}$  in (2.1b) statt der Variablen  $\xi$  und  $\eta$  die lokalen Variablen  $\xi_i$  und  $\eta_j$  ein und überführt diese in globale Variablen, wie es SCHUH (1984, S. 81-83) ausführlich in seiner Dissertation beschreibt, so erhält man den funktionalen Zusammenhang mit den Parametern  $b, b_\xi, b_\eta$  und  $b_{\xi\eta}$  für jeden Knotenpunkt und den Beobachtungen  $b(x, y)$  als Höhendifferenzwert.

Die Formel ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
b(x, y) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \chi(\xi_i) \chi(\eta_j) b^{m,n} + (-1)^i \psi(\xi_i) \chi(\eta_j) l b_\xi^{m,n} \\
&\quad + (-1)^j \chi(\xi_i) \psi(\eta_j) w b_\eta^{m,n} + (-1)^{i+j} \psi(\xi_i) \psi(\eta_j) l w b_{\xi\eta}^{m,n}, \\
\text{mit } \xi_i &= \left| \frac{x - x_m}{l} \right|, \quad m = e + i \\
\eta_j &= \left| \frac{y - y_n}{w} \right|, \quad n = f + j \\
\chi(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \quad \text{und} \quad \psi(t) = t - 2t^2 + t^3.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$x_m$  ist der Anfangswert für  $m = e$  beziehungsweise der Endwert für  $m = e + 1$  des Flächenelements  $F_{e,f}$  in  $x$ -Richtung,  $y_n$  jener entsprechend in  $y$ -Richtung.  $l$  ist die Länge des Flächenelements in  $x$ -Richtung und  $w$  die Breite dessen in  $y$ -Richtung. Durch die Einbringung dieser innerhalb der Berechnung von  $\xi_i$  und  $\eta_j$ , erreicht man eine Normierung, die den Übergang in globale Koordinaten ermöglicht. Diese Form der Darstellung der Funktion wird im Weiteren verwendet.

Ergänzend soll gesagt sein, dass die hier als Hilfsfunktionen für die Übersichtlichkeit eingebrachten Funktionen  $\chi(t)$  und  $\psi(t)$  den Hermiteschen Interpolationspolynomen (verallgemeinerte Lagrange'sche Grundpolynome) dritten Grades  $H_{00}$  und  $H_{10}$  entsprechen (HAHN 1975, S. 254-256). Auch mit diesen lässt sich die oben dargestellte Funktion auf einfache Weise formulieren. Dazu wird  $\xi_i$  und  $\eta_j$  nun nicht mehr als absolut betrachtet, sondern die Variablen werden bei  $i = 1$  mit  $1 - \xi_i$  und für  $j = 1$  mit  $1 - \eta_i$  in  $\chi(t)$  beziehungsweise  $\psi(t)$  eingesetzt. So ergibt sich  $\chi(1 - t) = 3t^2 - 2t^3$  zu der Hermiten Basisfunktion  $H_{01}$  und  $\psi(1 - t) = t^2 - t^3$  zu  $-H_{11}$ . In Anlehnung an die von BOGNER et al. (1965, S. 441) gewählte Darstellung ergibt sich

$$b(x, y) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 H_{0i}(\xi_i^-) H_{0j}(\eta_j^-) b^{m,n} + H_{1i}(\xi_i^-) H_{0j}(\eta_j^-) l b_{\xi}^{m,n} \\ + H_{0i}(\xi_i^-) H_{1j}(\eta_j^-) w b_{\eta}^{m,n} + H_{1i}(\xi_i^-) H_{1j}(\eta_j^-) l w b_{\xi\eta}^{m,n}, \quad (2.5)$$

$$\text{mit } \xi^- = \frac{x - x_m}{l} \\ \eta^- = \frac{y - y_n}{w}.$$

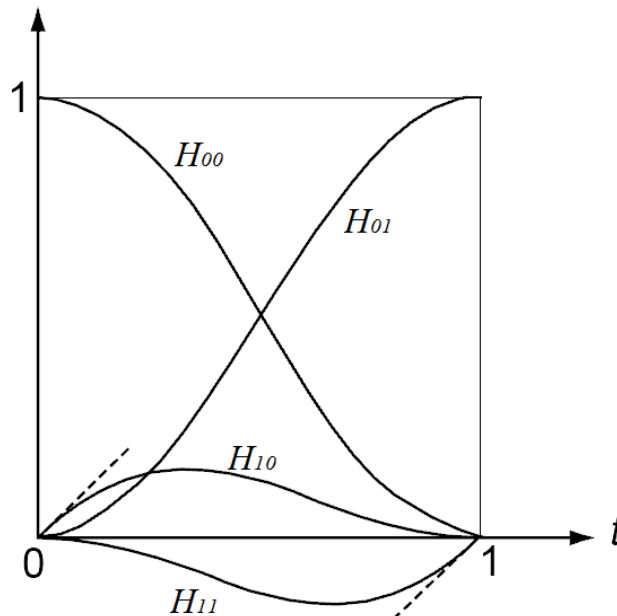
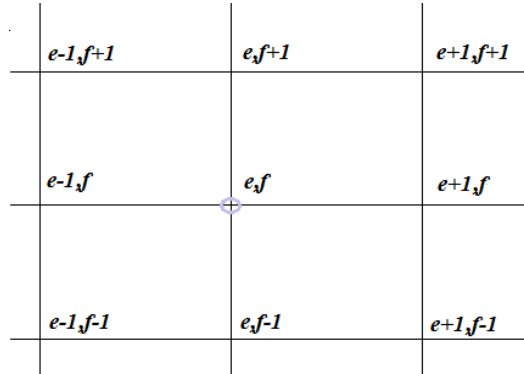


Abbildung 2.2: Hermite Basisfunktionen

## 2.3 Krümmungsminimierung

Da das Rechteckgitter, welches die finiten Elemente begrenzt, beliebig festzulegen sein soll, müssen für diejenigen Flächenelemente Vorkehrungen getroffen werden, in denen keine oder zu wenig Stützstellen beziehungsweise Beobachtungen vorliegen. Dies soll durch die Krümmungsminimierung geschehen.

Jedes Flächenelement benötigt mindestens 16 Höhendifferenzpunkte, um zur Bestimmung des Flächenverlaufs im Ausgleich nicht zu einem unterbestimmten System zu führen. Die Krümmungsminimierungen werden als Pseudobeobachtungen eingeführt und müssen sich so zu vier an der Zahl für jeden Gitterpunkt ergeben. Dies ergibt sich, wenn für jeden Knoten im Gitter jeweils eine Pseudobeobachtung für den Höhendifferenzwert selbst und die Ableitungen in  $x$ -,  $y$ - und  $xy$ -Richtung aufgestellt wird. In Anlehnung an die von EBNER et al. (1980) erläuterte Formel zu Krümmungsminimierung in einer 4er-Nachbarschaft, wird hierbei eine 8er-Nachbarschaft verwendet. Ein Flächenelement erstreckt sich über vier Knotenpunkte, sodass jeder Knotenpunkt  $P_{e,f}$  auch mit den von ihm aus in der Diagonalen liegenden Knoten  $P_{e-1,f+1}$ ,  $P_{e+1,f-1}$ ,  $P_{e-1,f-1}$  und  $P_{e+1,f+1}$  (vgl. Abb.2.3) in Verbindung steht und sich daher eine 8er-Nachbarschaft anbietet.



**Abbildung 2.3:** Umgebung des Knotenpunktes  $P_{e,f}$  (8er-Nachbarschaft)

Für jeden innenliegenden Knotenpunkt  $P_{e,f}$  ergeben sich die folgenden funktionalen Zusammenhänge für eine 8er-Nachbarschaft

$$0 + v^{e,f} = 8b^{e,f} - b^{e-1,f+1} - b^{e-1,f} - b^{e-1,f-1} - b^{e,f+1} - b^{e,f-1} - b^{e+1,f+1} - b^{e+1,f} - b^{e+1,f-1} \quad (2.6a)$$

$$0 + v_{\xi}^{e,f} = 8b_{\xi}^{e,f} - b_{\xi}^{e-1,f+1} - b_{\xi}^{e-1,f} - b_{\xi}^{e-1,f-1} - b_{\xi}^{e,f+1} - b_{\xi}^{e,f-1} - b_{\xi}^{e+1,f+1} - b_{\xi}^{e+1,f} - b_{\xi}^{e+1,f-1} \quad (2.6b)$$

$$0 + v_{\eta}^{e,f} = 8b_{\eta}^{e,f} - b_{\eta}^{e-1,f+1} - b_{\eta}^{e-1,f} - b_{\eta}^{e-1,f-1} - b_{\eta}^{e,f+1} - b_{\eta}^{e,f-1} - b_{\eta}^{e+1,f+1} - b_{\eta}^{e+1,f} - b_{\eta}^{e+1,f-1} \quad (2.6c)$$

$$0 + v_{\xi\eta}^{e,f} = 8b_{\xi\eta}^{e,f} - b_{\xi\eta}^{e-1,f+1} - b_{\xi\eta}^{e-1,f} - b_{\xi\eta}^{e-1,f-1} - b_{\xi\eta}^{e,f+1} - b_{\xi\eta}^{e,f-1} - b_{\xi\eta}^{e+1,f+1} - b_{\xi\eta}^{e+1,f} - b_{\xi\eta}^{e+1,f-1}. \quad (2.6d)$$

Für die im Randbereich liegenden Knotenpunkte fallen Nachbarschaften weg. Dort ist der Multiplikator vor dem Höhenwert des Knotenpunktes selbst entsprechend der Anzahl der Nachbarschaften anzupassen. Die nicht vorhandenen Nachbarschaften sind herauszunehmen. Für einen Eckpunkt ergibt sich damit eine 3er-Nachbarschaft, für einen Knoten im Seitenbereich eine 5er-Nachbarschaft. So verkürzt sich beispielsweise für den Eckpunkt links unten in einem Gitter das funktionale Modell zu dem folgenden aus vier Gleichungen bestehenden Gleichungsblock:

$$0 + v^{e,f} = 3b^{e,f} - b^{e,f+1} - b^{e+1,f+1} - b^{e+1,f} \quad (2.7a)$$

$$0 + v_{\xi}^{e,f} = 3b_{\xi}^{e,f} - b_{\xi}^{e,f+1} - b_{\xi}^{e+1,f+1} - b_{\xi}^{e+1,f} \quad (2.7b)$$

$$0 + v_{\eta}^{e,f} = 3b_{\eta}^{e,f} - b_{\eta}^{e,f+1} - b_{\eta}^{e+1,f+1} - b_{\eta}^{e+1,f} \quad (2.7c)$$

$$0 + v_{\xi\eta}^{e,f} = 3b_{\xi\eta}^{e,f} - b_{\xi\eta}^{e,f+1} - b_{\xi\eta}^{e+1,f+1} - b_{\xi\eta}^{e+1,f} \quad (2.7d)$$

Somit ergibt sich für die vier Seitenbereiche, für die vier Eckknoten und den Innenbereich jeweils ein Gleichungsblock. Diese sollen der Länge und geringen Komplexität halber hier nicht weiter ausgeführt werden. Insgesamt ergeben sich dann vier Gleichungen für jeden Knoten, sodass eine Unterbestimmung des Systems verhindert wird.



## 2.4 Restriktionen

Um eine Stetigkeit in der zweiten Ableitung (Stetigkeit der Krümmung) zu gewährleisten und um imstande zu sein, die Fläche in den Randbereichen besser zu kontrollieren, können Restriktionen eingeführt werden. Dabei soll der Ansatz des natürlichen Splines verfolgt werden. Dies hat zur Folge, dass die zweiten Ableitungen an den Eckpunkten des Gitters zu Null gesetzt werden.

So wird der Verlauf an den Seiten bei nur einem angesetzten Flächenelement von einem kubischen auf ein lineares Polynom beschränkt. Dies folgt aus der Tatsache, dass, wenn die zweite Ableitung Null ist, die erste Ableitung einem konstanten Wert entspricht. Eine Ableitung die einem konstanten Wert entspricht, ergibt sich allerdings nur durch ein Polynom mit dem Grad 1. Dies hat zur Folge, dass ein Gitter mit mindestens so vielen Flächenelementen über die Höhenpunkte gespannt werden sollte, dass der Grad des Polynoms welcher gewünscht ist um den Randbereich zu approximieren, verfolgt werden kann (s. Abschnitt 4.2).

An allen anderen Knotenpunkten wird die Stetigkeit in der Krümmung durch Differenzbildung erreicht. Dies betrifft die inneren Knoten und diejenigen, welche an den Seiten zwischen den Eckpunkten liegen.

Die Anwendung der Restriktionen ist optional, sodass ein Modellansatz ganz ohne Restriktionen möglich ist. Wendet man sie an, so ist zu entscheiden, ob alle Restriktionen oder auch nur ein Teil für die Approximation reichen. Durch die Anwendung der Restriktionen und die damit verbundene Stetigkeit der zweiten Ableitung (s. Abschnitt 3.3) in den Knotenpunkten wird die Fläche insgesamt steifer in ihrem Formverlauf. Im Nachfolgenden werden Restriktionen aufgestellt, welche die zweiten Ableitungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung sowie die gemischte zweite Ableitung zweimal in  $x$  und einmal in  $y$ -Richtung und die gemischte zweite Ableitung zweimal in  $y$  und einmal in  $x$ -Richtung betreffen.

Die zweiten Ableitungen der Funktion (2.4) ergeben sich in Anlehnung an die nach SCHUH (1984, S. 83) erläuterte erste Ableitung für globale Koordinaten zu

$$b_{\xi^2}(x, y) = \frac{1}{l^2} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \chi''(\xi_i) \chi(\eta_j) b^{m,n} + (-1)^i \psi''(\xi_i) \chi(\eta_j) l b_{\xi}^{m,n} \\ + (-1)^j \chi''(\xi_i) \psi(\eta_j) w b_{\eta}^{m,n} + (-1)^{i+j} \psi''(\xi_i) \psi(\eta_j) l w b_{\xi\eta}^{m,n} \quad (2.8)$$

$$b_{\eta^2}(x, y) = \frac{1}{w^2} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \chi(\xi_i) \chi''(\eta_j) b^{m,n} + (-1)^i \psi(\xi_i) \chi''(\eta_j) l b_{\xi}^{m,n} \\ + (-1)^j \chi(\xi_i) \psi''(\eta_j) w b_{\eta}^{m,n} + (-1)^{i+j} \psi(\xi_i) \psi''(\eta_j) l w b_{\xi\eta}^{m,n}. \quad (2.9)$$

$$\text{mit } \begin{array}{ll} \chi(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 & \chi''(t) = 12t - 6 \\ \psi(t) = t - 2t^2 + t^3 & \psi''(t) = 6t - 4. \end{array} \quad (2.10)$$

Die gemischten zweiten Ableitungen ergeben sich zu

$$b_{\xi^2\eta}(x, y) = \frac{1}{wl^2} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^j \chi''(\xi_i) \chi'(\eta_j) b^{m,n} + (-1)^{i+j} \psi''(\xi_i) \chi'(\eta_j) l b_{\xi}^{m,n} \\ + \chi''(\xi_i) \psi'(\eta_j) w b_{\eta}^{m,n} + (-1)^i \psi''(\xi_i) \psi'(\eta_j) l w b_{\xi\eta}^{m,n} \quad (2.11)$$

$$b_{\eta^2\xi}(x, y) = \frac{1}{lw^2} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^i \chi'(\xi_i) \chi''(\eta_j) b^{m,n} + \psi'(\xi_i) \chi''(\eta_j) l b_{\xi}^{m,n} \\ + (-1)^{i+j} \chi'(\xi_i) \psi''(\eta_j) w b_{\eta}^{m,n} + (-1)^j \psi'(\xi_i) \psi''(\eta_j) l w b_{\xi\eta}^{m,n}. \quad (2.12)$$

$$\text{mit } \chi'(t) = -6t + 6t^2 \\ \psi'(t) = 1 - 4t + 3t^2 \quad (2.13)$$

Diese gemischten Ableitungen werden nur auf die Innen-liegenden- und Seitenknoten durch Differenzbildung angewandt und nicht auf die Eckknoten zur Einbindung des natürlichen Splines, da dies das System zu stark einspannen würde.

Im Nachfolgenden werden die Funktionen auf einen Eckpunkt eines Flächenelements bezogen. Die Abbildung 2.4 soll dem Verständnis der Gleichungen dienen. Die Restriktionen zu einem Eckknoten ergeben sich immer nur jeweils für ein Flächenelement, jene zu den Seitenknoten nur in zwei Flächenelementen und die Restriktionen für einen inneren Knoten erstrecken sich über vier Flächenelemente.

|                                 |              |                               |              |
|---------------------------------|--------------|-------------------------------|--------------|
| $(x_a, y_e)$                    | $(x_e, y_e)$ | $(x_a, y_e)$                  | $(x_e, y_e)$ |
| <b><math>F_{e-1,f}</math></b>   |              | <b><math>F_{e,f}</math></b>   |              |
| $(x_a, y_a)$                    | $(x_e, y_a)$ | $(x_a, y_a)$                  | $(x_e, y_a)$ |
| $(x_a, y_e)$                    | $(x_e, y_e)$ | $(x_a, y_e)$                  | $(x_e, y_e)$ |
| <b><math>F_{e-1,f-1}</math></b> |              | <b><math>F_{e,f-1}</math></b> |              |
| $(x_a, y_a)$                    | $(x_e, y_a)$ | $(x_a, y_a)$                  | $(x_e, y_a)$ |

**Abbildung 2.4:** Aneinandergrenzende Flächenelemente

### 2.4.1 Natürliche Splines

Die Restriktionen für die Eckpunkte des Gitters ergeben sich auf Grundlage des Ansatzes zu natürlichen Splines wie folgt

$$\text{Für die linke obere Ecke: } b_{\xi^2}^{F_{e,f-1}}(x_a, y_e) = 0 \quad b_{\eta^2}^{F_{e,f-1}}(x_a, y_e) = 0 \quad (2.14a)$$

$$\text{Für die rechte obere Ecke: } b_{\xi^2}^{F_{e-1,f-1}}(x_e, y_e) = 0 \quad b_{\eta^2}^{F_{e-1,f-1}}(x_e, y_e) = 0 \quad (2.14b)$$

$$\text{Für die linke untere Ecke: } b_{\xi^2}^{F_{e,f}}(x_a, y_a) = 0 \quad b_{\eta^2}^{F_{e,f}}(x_a, y_a) = 0 \quad (2.14c)$$

$$\text{Für die rechte untere Ecke: } b_{\xi^2}^{F_{e-1,f}}(x_e, y_a) = 0 \quad b_{\eta^2}^{F_{e-1,f}}(x_e, y_a) = 0. \quad (2.14d)$$

Da nur die Knotenpunkte in die Formel einfließen und sich für diese  $\xi_i$  und  $\eta_j$  immer zu 0 oder 1 ergeben, vereinfachen sich die Formeln

$$\begin{array}{cccccc} \chi(0) = 1 & \chi'(0) = 0 & \chi''(0) = -6 & \psi(0) = 0 & \psi'(0) = 1 & \psi''(0) = -4 \\ \chi(1) = 0 & \chi'(1) = 0 & \chi''(1) = 6 & \psi(1) = 0 & \psi'(1) = 0 & \psi''(1) = 2. \end{array}$$

Die Bezeichnungen bei  $b^{e,f}$  gehen immer von dem jeweiligen betrachteten Eckpunkt als Punkt  $P_{e,f}$  aus, also nicht wie bisher immer für den Punkt links unten in dem Flächenelement (s. Abb. 2.3).

Die vereinfachten Formeln ergeben sich zu

$$b_{\xi^2}^{F_{e,f-1}}(x_a, y_e) = \frac{1}{l^2} (6b^{e+1,f} - 6b^{e,f}) - \frac{1}{l} (2b_{\xi}^{e+1,f} + 4b_{\xi}^{e,f}) = 0 \quad (2.15a)$$

$$b_{\eta^2}^{F_{e,f-1}}(x_a, y_e) = \frac{1}{w^2} (6b^{e,f-1} - 6b^{e,f}) + \frac{1}{w} (2b_{\eta}^{e,f-1} + 4b_{\eta}^{e,f}) = 0 \quad (2.15b)$$

$$b_{\xi^2}^{F_{e-1,f-1}}(x_e, y_e) = \frac{1}{l^2} (6b^{e-1,f} - 6b^{e,f}) + \frac{1}{l} (2b_{\xi}^{e-1,f} + 4b_{\xi}^{e,f}) = 0 \quad (2.15c)$$

$$b_{\eta^2}^{F_{e-1,f-1}}(x_e, y_e) = \frac{1}{w^2} (6b^{e,f-1} - 6b^{e,f}) + \frac{1}{w} (2b_{\eta}^{e,f-1} + 4b_{\eta}^{e,f}) = 0 \quad (2.15d)$$

$$b_{\xi^2}^{F_{e,f}}(x_a, y_a) = \frac{1}{l^2} (6b^{e+1,f} - 6b^{e,f}) - \frac{1}{l} (2b_{\xi}^{e+1,f} + 4b_{\xi}^{e,f}) = 0 \quad (2.15e)$$

$$b_{\eta^2}^{F_{e,f}}(x_a, y_a) = \frac{1}{w^2} (6b^{e,f+1} - 6b^{e,f}) - \frac{1}{w} (2b_{\eta}^{e,f+1} + 4b_{\eta}^{e,f}) = 0 \quad (2.15f)$$

$$b_{\xi^2}^{F_{e-1,f}}(x_e, y_a) = \frac{1}{l^2} (6b^{e-1,f} - 6b^{e,f}) + \frac{1}{l} (2b_{\xi}^{e-1,f} + 4b_{\xi}^{e,f}) = 0 \quad (2.15g)$$

$$b_{\eta^2}^{F_{e-1,f}}(x_e, y_a) = \frac{1}{w^2} (6b^{e,f+1} - 6b^{e,f}) - \frac{1}{w} (2b_{\eta}^{e,f+1} + 4b_{\eta}^{e,f}) = 0. \quad (2.15h)$$

### 2.4.2 Stetiger Übergang in der zweiten Ableitung

Für die inneren Knoten werden jeweils die beiden diagonal zueinander liegenden Flächenelemente, die nebeneinander- und untereinanderliegenden Flächenelemente für eine Restriktion betrachtet. Jeder innere Knoten hat durch Differenzbildung der zweiten Ableitung insgesamt 12 Restriktionen. Die Differenzbildung hat den Hintergrund, dass damit die Bedingung geschaffen wird, dass die zweite Ableitung der Flächenelemente in dem angrenzenden Knoten gleich gesetzt wird.

Für die diagonal zueinander liegenden Flächenelemente ergeben sich die folgende Restriktionen

$$b_{\xi^2}^{F_e, f}(x_a, y_a) - b_{\xi^2}^{F_{e-1}, f-1}(x_e, y_e) = 0 \quad (2.16a)$$

$$b_{\eta^2}^{F_e, f}(x_a, y_a) - b_{\eta^2}^{F_{e-1}, f-1}(x_e, y_e) = 0 \quad (2.16b)$$

$$b_{\xi^2}^{F_{e-1}, f}(x_e, y_a) - b_{\xi^2}^{F_e, f-1}(x_a, y_e) = 0 \quad (2.16c)$$

$$b_{\eta^2}^{F_{e-1}, f}(x_e, y_a) - b_{\eta^2}^{F_e, f-1}(x_a, y_e) = 0. \quad (2.16d)$$

Für die nebeneinander liegenden Flächenelemente ergeben sich die folgende Restriktionen

$$b_{\xi^2}^{F_e, f}(x_a, y_a) - b_{\xi^2}^{F_{e-1}, f}(x_e, y_a) = 0 \quad (2.17a)$$

$$b_{\eta^2}^{F_e, f}(x_a, y_a) - b_{\eta^2}^{F_{e-1}, f}(x_e, y_a) = 0 \quad (2.17b)$$

$$b_{\xi^2}^{F_{e-1}, f-1}(x_e, y_e) - b_{\xi^2}^{F_e, f-1}(x_a, y_e) = 0 \quad (2.17c)$$

$$b_{\eta^2}^{F_{e-1}, f-1}(x_e, y_e) - b_{\eta^2}^{F_e, f-1}(x_a, y_e) = 0. \quad (2.17d)$$

Außerdem ergeben sich für die untereinanderliegenden Flächenelemente folgende Restriktionen

$$b_{\xi^2}^{F_e, f}(x_a, y_a) - b_{\xi^2}^{F_e, f-1}(x_a, y_e) = 0 \quad (2.18a)$$

$$b_{\eta^2}^{F_e, f}(x_a, y_a) - b_{\eta^2}^{F_e, f-1}(x_a, y_e) = 0 \quad (2.18b)$$

$$b_{\xi^2}^{F_{e-1}, f}(x_e, y_a) - b_{\xi^2}^{F_{e-1}, f-1}(x_e, y_e) = 0 \quad (2.18c)$$

$$b_{\eta^2}^{F_{e-1}, f}(x_e, y_a) - b_{\eta^2}^{F_{e-1}, f-1}(x_e, y_e) = 0. \quad (2.18d)$$

Um die Funktionen zu vereinfachen, sind die in (2.15a) bis (2.15h) gegebenen Gleichungen in die Formeln (2.16a) bis (2.18d) einzusetzen.

Es ist leicht zu sehen, dass sich Teile der in (2.15a) bis (2.15h) dargestellten Funktionen untereinander entsprechen. So entspricht die Funktion (2.15a) der Funktion (2.15e), die Funktion (2.15b) der Funktion (2.15d), die Funktion (2.15c) der Funktion (2.15g) und die Funktion (2.15f) der Funktion (2.15h). Durch diese Entsprechungen ist es möglich die Gleichungen (2.16a) bis (2.18d) auf die Gleichungen (2.16a) und (2.16b) zu reduzieren, da alle anderen Funktionen hiervon linear abhängig sind oder sich die Funktionen von sich selbst subtrahieren, sodass sich auf beiden Seiten der Gleichung Null ergibt. Die übrig gebliebenen beiden Formeln, welche die Restriktionen für die inneren Knoten sind, ergeben sich in vereinfachter Form zu

$$\frac{1}{l^2} \left( 3b^{e+1, f} - 3b^{e-1, f} \right) - \frac{1}{l} \left( 4b_{\xi}^{e, f} + b_{\xi}^{e+1, f} + b_{\xi}^{e-1, f} \right) = 0 \quad (2.19a)$$

$$\frac{1}{w^2} \left( 3b^{e, f+1} - 3b^{e, f-1} \right) - \frac{1}{w} \left( 4b_{\eta}^{e, f} + b_{\eta}^{e, f+1} + b_{\eta}^{e, f-1} \right) = 0. \quad (2.19b)$$

Die Knoten an den Seiten des Gitters liegen nur an zwei Flächenelementen, daher werden dort auch nur diese in die Restriktion eingebunden.

Für die Knoten an den Seiten oben und unten des Gitters gilt somit die Restriktion (2.19a) und für die Knoten an den Seiten links und rechts des Gitters gilt die Restriktion (2.19b).

Die Restriktion in  $y$ -Richtung für die Seiten oben und unten des Gitters sowie die Restriktion in  $x$ -Richtung für die Seiten links und rechts des Gitters ergeben sich, nach dem Einsetzen von  $\xi_i$  und  $\eta_j$  durch 0 oder 1 und dem Aus-multiplizieren, auf beiden Seiten der Gleichung zu Null. Dies lässt sich auch leicht nachvollziehen, da es keine horizontale Ableitung an einem vertikalen Seitenknoten geben kann und keine vertikale Ableitung an einem horizontalen Seitenknoten.

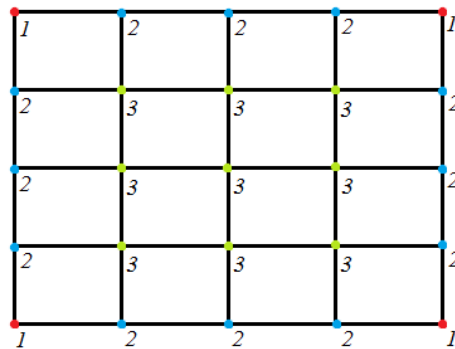
Für die Restriktionen bezüglich der gemischten zweiten Ableitungen ergeben sich auf ähnliche Weise die folgenden Formeln für die inneren Knoten des Gitters

$$\frac{1}{l^2} \left( 3b_{\eta}^{e+1,f} - 3b_{\eta}^{e-1,f} \right) - \frac{1}{l} \left( 4b_{\xi\eta}^{e,f} + b_{\xi\eta}^{e+1,f} + b_{\xi\eta}^{e-1,f} \right) = 0 \quad (2.20a)$$

$$\frac{1}{w^2} \left( 3b_{\xi}^{e,f+1} - 3b_{\xi}^{e,f-1} \right) - \frac{1}{w} \left( 4b_{\xi\eta}^{e,f} + b_{\xi\eta}^{e,f+1} + b_{\xi\eta}^{e,f-1} \right) = 0. \quad (2.20b)$$

Wie zuvor gilt für die Knoten an den Seiten oben und unten des Gitters die Restriktion (2.20a) und für die Knoten an den Seiten links und rechts des Gitters gilt die Restriktion (2.20b).

Führt man für die inneren Knoten alle vier Restriktionen ein, so ergibt sich die Bedingungsmatrix zu einer singulären Matrix. Der Rangdefekt ist gleich der Anzahl der innen-liegenden Knoten. Nimmt man eine der Restriktionen für die innen-liegenden Knoten heraus, so ist die Regularität der Bedingungsmatrix wieder gewährleistet. Die Anzahl der Restriktionen pro Knoten sollten deshalb wie in Abbildung 2.5 beispielhaft dargestellt, gewählt werden. Eine Begründung für die Singularität der Bedingungsmatrix ist möglicherweise darin zu sehen, dass bei vier Restriktionen pro inneren Knoten dies anzahllich den Parametern, welche diesen Knoten bestimmen, entspricht und diese damit zu stark einspannt. Zum Zeitpunkt dieser Bachelorarbeit wurde allerdings keine hinreichende Begründung hierfür gefunden.



**Abbildung 2.5:** Anzahl der Restriktionen am Beispiel eines  $4 \times 4 = 16$  Flächenelement großen Gitters (# Parameter = 100, # Restriktionen = 55)

Das Verhältnis zwischen der Anzahl der Restriktionen und der Anzahl der Parameter (vgl. Tab. 2.1) steigt mit der Anzahl an Flächenelementen.

**Tabelle 2.1:** Verhältnis Anzahl der Restriktionen zur Anzahl der Parameter bei quadratisch wachsender Anzahl an Flächenelementen

| # Flächenelemente | # Restriktionen | # Parameter | Verhältnis |
|-------------------|-----------------|-------------|------------|
| $2 \times 2 = 4$  | 15              | 36          | 0.42       |
| $3 \times 3 = 9$  | 32              | 64          | 0.50       |
| $4 \times 4 = 16$ | 55              | 100         | 0.55       |
| $6 \times 6 = 36$ | 119             | 196         | 0.61       |
| $8 \times 8 = 48$ | 207             | 324         | 0.64       |

Die Anzahl der Restriktionen ist ab 9 Flächenelementen mehr als halb so groß wie die Anzahl der Parameter, selbst wenn eine Restriktion (in der Implementierung immer die Restriktion (2.20b)) für die inneren Knoten weggelassen wird. Dies spannt das System bereits stark ein. Eine Restriktion, die eine Ableitung zweimal in  $x$ - und zweimal in  $y$ -Richtung zur Grundlage hat, wurde deshalb von Anfang an nicht weiter betrachtet. Ergänzend sei gesagt, dass diese auch einen erheblichen Mehraufwand in der Implementierung hätte, da jeder der 16 Parameter, die ein Flächenelement beschreiben in die Restriktion einfließen würden, und so in eine Restriktion statt der bisherigen 5 Parameter bis zu 28 Parameter einfließen würden. Dies liegt an den Hilfsfunktionen  $\chi$  und  $\psi$ , welche sich in der zweiten Ableitung für keinen Knoten zu Null ergeben. Es steht allerdings die Überlegung, dass durch die Implementation eben jener Restriktion die Möglichkeit besteht, die vier bis jetzt erläuterten Restriktionen zu verwerfen und trotzdem eine Stetigkeit der zweiten Ableitung in alle Richtungen zu erreichen. Dadurch würde sich auch die Zahl der Restriktionen verringern, was die Singularität der Bedingungsmatrix nach dem Einführen der vierten Restriktion eventuell behebt. Eine Möglichkeit den Rangdefekt, welche zur Zeit durch die Krümmungsminimierung behoben wird, mittels Restriktionen zu beheben, widerspricht diesem Ansatz allerdings.

## 2.5 Ausgleichung

Es wird ein lineares Gauß-Markoff-Modell (KOCH 2004, S. 166f.) zur Durchführung der Ausgleichung angesetzt. Damit ergeben sich die Beobachtungsgleichungen zum

$$\mathcal{L} + \mathcal{V} = \mathbf{A}\mathcal{X} \quad \text{mit} \quad \Sigma\{\mathcal{L}\} = \Sigma, \quad \mathcal{V}^T \mathcal{V} \dots \text{Min.} \quad (2.21)$$

Die zugrundeliegenden Beobachtungen stehen in einem linearen Zusammenhang mit den Parametern. Die Beobachtungen  $l_h$  sind die Höhendifferenzen, die durch das synthetische Beispiel generiert werden. Die Anzahl der Beobachtungen beträgt  $n$ . Da zusätzlich noch Pseudobeobachtungen  $l_{ps} = \mathbf{0}$  für die Krümmungsminimierung ergänzt werden, ergibt sich der Beobachtungsvektor zu

$$\mathbf{l}_{[(n+4m) \times 1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_h \\ \mathbf{l}_{ps} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{l}_{h[n \times 1]} & \dots \text{ Höhendifferenzen} \\ \mathbf{l}_{ps[4 \cdot m \times 1]} & \dots \text{ Pseudobeobachtungen} \\ n & \dots \# \text{ Beobachtungen } l_i \\ m & \dots \# \text{ Gitterpunkte.} \end{array} \quad (2.22)$$

Der zu bestimmende Parametervektor besteht aus den Höhendifferenzwerten an den Gitterpunkten, den Ableitungen einmal in  $x$ - und einmal in  $y$ -Richtung sowie die kombinierte Ableitung in  $x, y$ -Richtung an diesen Stellen. Er ist wie folgt aufgebaut:

$$\mathbf{x}_{[4 \cdot m \times 1]} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b_{\xi}^1 \\ b_{\eta}^1 \\ b_{\xi\eta}^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \\ b_{\xi}^m \\ b_{\eta}^m \\ b_{\xi\eta}^m \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{x}_{[4m \times 1]} & \dots \text{ Parametervektor} \\ b^k & \dots \text{ Höhendifferenzen an dem Gitterpunkt } k \\ b_{\xi}^k & \dots \text{ Steigung in } x\text{-Richtung an dem Gitterpunkt } k \\ b_{\eta}^k & \dots \text{ Steigung in } y\text{-Richtung an dem Gitterpunkt } k \\ b_{\xi\eta}^k & \dots \text{ Steigung in } xy\text{-Richtung an dem Gitterpunkt } k. \end{array} \quad (2.23)$$

Die Einträge der Designmatrix  $\mathbf{A}_h$  lässt sich somit aus dem funktionalen Zusammenhang (2.4) ableiten. Sie besitzt nur dann vollen Rang, wenn pro Knotenpunkt mindestens vier Höhendifferenzen beobachtet sind. Die Designmatrix  $\mathbf{A}_{ps}$  basiert auf den Formeln, die in Abschnitt 2.3 erläutert werden. Sie besitzt stets vollen Rang. Somit ergibt sich die Designmatrix  $\mathbf{A}$  zu

$$\mathbf{A}_{[(n+4m) \times 4m]} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_h \\ \mathbf{A}_{ps} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{A}_h & \dots \text{ Designmatrix für die Beobachtungen der Höhendifferenzen} \\ \mathbf{A}_{ps} & \dots \text{ Designmatrix für die Pseudobeobachtungen.} \end{array} \quad (2.24)$$

Durch die Designmatrix für die Pseudobeobachtungen besitzt die Designmatrix  $\mathbf{A}$  immer vollen Rang und die Parameter können wie folgt ausgeglichen werden

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{l} \quad \text{mit } \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} = (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A})^{-1}. \quad (2.25)$$

Die Gewichtung der Beobachtungen (Höhendifferenzen) zu den Pseudobeobachtungen ist anzupassen. Da die Pseudobeobachtungen nur da in das Gewicht der Berechnung fallen sollen, wo keine oder zu wenige Beobachtungen der Höhendifferenzen sind, ist ihr Gewicht sehr klein anzusetzen relativ zu dem der Beobachtungen (s. Abschnitt 4.2.2). Es besteht keine Korrelation zwischen ihnen.

$$\boldsymbol{\Sigma}\{\boldsymbol{\mathcal{L}}\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}\{\boldsymbol{\mathcal{L}}_h\} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}\{\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ps}\} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{\Sigma}\{\boldsymbol{\mathcal{L}}\} \quad \dots \text{ Kovarianzmatrix der Beobachtungen} \\ \boldsymbol{\Sigma}\{\boldsymbol{\mathcal{L}}_h\} \quad \dots \text{ Kovarianzmatrix der Höhendifferenzen} \\ \boldsymbol{\Sigma}\{\boldsymbol{\mathcal{L}}_{ps}\} \quad \dots \text{ Kovarianzmatrix der Pseudobeobachtungen.} \end{array} \quad (2.26)$$

Anschließend kann der Verbesserungsvektor  $\mathbf{v}$  und der geschätzte Varianzfaktor  $\tilde{s}_1^2$  berechnet werden:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad \hat{\mathbf{x}} \quad \dots \text{ ausgeglichene Parameter der ersten Stufe} \quad (2.27)$$

$$\tilde{s}_1^2 = \frac{\mathbf{v}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{v}}{n} \quad (2.28)$$

Sollen nun noch die Restriktionen eingeführt werden, ergibt sich das Ausgleichsmodell in zwei Stufen (SCHUH 2011). Das bisher erläuterte Modell bildet die erste Stufe. Die zweite Stufe besteht aus einem bedingten Modell. Die Bedingungsmatrix  $\mathbf{B}_{[p \times 4m]}^T$  mit  $p$  Restriktionsgleichungen ergibt sich gemäß der in Abschnitt 2.4 erläuterten Formeln. Das Modell ergibt sich zu

$$\mathbf{B}^T (\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{r}) = \mathbf{b} \quad \text{mit } \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} = (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A})^{-1}. \quad (2.29)$$

Da die sich die Restriktionen allesamt zu Null ergeben, ergibt sich  $\mathbf{b}$  zu einem Nullvektor, wodurch er bei der Berechnung der ausgeglichenen Parameter wegfällt. Diese ausgeglichenen Parameter der zweiten Stufe berechnen sich mit

$$\mathbf{r} = -\boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} \mathbf{B} \left( \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{x}} \quad (2.30)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{r} \quad \tilde{\mathbf{x}} \quad \dots \text{ ausgeglichene Parameter der zweiten Stufe} \quad (2.31)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\Sigma}\{\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} = \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} - \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} \mathbf{B} \left( \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\}$$

Zuletzt kann der geschätzte Varianzfaktor  $\tilde{s}_2^2$  der zweiten Stufe berechnet werden:

$$\tilde{s}_2^2 = \frac{\mathbf{r}^T \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\}^{-1} \mathbf{r}}{4m - p} \quad p \quad \dots \# \text{ Restriktionen} \quad (2.32)$$

Die geschätzte Varianz für den gesamten Ausgleich ergibt sich zu

$$\tilde{s}^2 = \frac{\mathbf{v}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{v} + \mathbf{r}^T \boldsymbol{\Sigma}\{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\}^{-1} \mathbf{r}}{(n + 4m) - p} \quad (2.33)$$



# 3. Stetigkeit der Polynomapproximation

## 3.1 Vorgehen zur Analyse der Stetigkeit

In Abschnitt 2.2 wurde davon ausgegangen, dass es durch den dort beschriebenen Parameterübergang möglich ist, eine stetige Fläche durch finite Elemente zu approximieren. Um die Stetigkeit dieser Fläche untersuchen zu können, die durch das in Kapitel 2 beschriebene Vorgehen approximiert wurde, wird nur ein Knoten betrachtet. Auf diesem Knoten wird die Gleichung (2.4) angewandt, wobei zwischen den vier Unbekannten  $b(i, j)$ ,  $b_\xi(i, j)$ ,  $b_\eta(i, j)$  und  $b_{\xi\eta}(i, j)$  unterschieden wird (SCHUH 1984, S. 82). Da ein Knoten sich im Inneren der Fläche immer auf die vier ihn umgebenden Flächenelemente auswirkt, sollen diese im Zusammenhang betrachtet werden. So ergibt sich, richtig zusammengesetzt, eine Fläche für jeden Funktionsteil von (2.4), die jeweils die Auswirkung des Knotens bezogen auf die für ihn ausgewerteten Unbekannten auf die umliegenden Flächenelemente zeigt.

Die sich ergebende Fläche sollte, damit sie stetig ist, an den Außenseiten der angrenzenden Flächenelemente zu Null verlaufen, sodass der Wert des Knotens keine Unstetigkeit am Rand der ihn umgebenden Flächenelemente aufweist. Treten innerhalb der Fläche Versprünge (Unstetigkeitsstellen) auf, so ist die Fläche bereits in sich selber nicht stetig. Weist die Fläche Knicke auf, so ist die Fläche nicht stetig differenzierbar. Diese Eigenschaften sollen im Folgenden grafisch untersucht werden.

Die Funktion

$$b(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \chi(\xi_i) \chi(\eta_j) b(i, j) + (-1)^i \psi(\xi_i) \chi(\eta_j) b_\xi(i, j) \\ + (-1)^j \chi(\xi_i) \psi(\eta_j) b_\eta(i, j) + (-1)^{i+j} \psi(\xi_i) \psi(\eta_j) b_{\xi\eta}(i, j), \quad (3.1)$$

$$\text{mit } \chi(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ \psi(t) = t - 2t^2 + t^3$$

(vgl. 2.4) besitzt dabei vier bereits angesprochene Funktionsteile. So ist Funktionsteil 1 von  $b(i, j)$ , Funktionsteil 2 von  $b_\xi(i, j)$ , Funktionsteil 3 von  $b_\eta(i, j)$  und Funktionsteil 4 von  $b_{\xi\eta}(i, j)$  abhängig. Die Werte für  $b(i, j)$  bis  $b_{\xi\eta}(i, j)$  werden immer zu Eins gesetzt. Gerechnet wird mit lokalen Koordinaten, sodass  $\xi$  und  $\eta$  in einem Intervall von Null bis Eins liegen. So ergeben sich die Funktionsteile zu

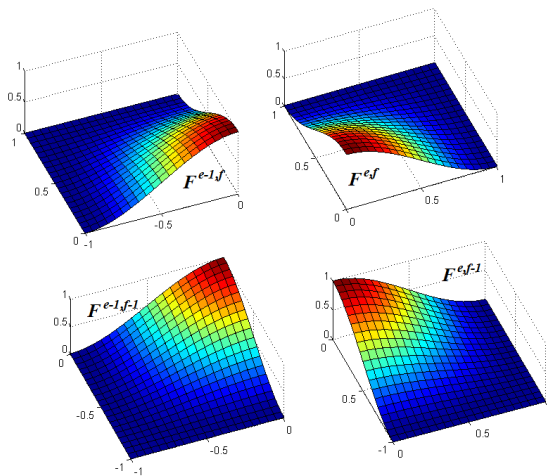
$$f_1(\xi, \eta) = \chi(\xi_i) \chi(\eta_j) \quad (3.2)$$

$$f_2(\xi, \eta) = (-1)^i \psi(\xi_i) \chi(\eta_j) \quad (3.3)$$

$$f_3(\xi, \eta) = (-1)^j \chi(\xi_i) \psi(\eta_j) \quad (3.4)$$

$$f_4(\xi, \eta) = (-1)^{i+j} \psi(\xi_i) \psi(\eta_j). \quad (3.5)$$

Die vier aneinandergrenzenden Flächenelemente, die in Abbildung 4.1 benannt wurden, sind nun jeweils auszuwerten. Ausgewertet wird jeweils der Punkt  $P_{e,f}$ . Für das Flächenelement  $F_{e,f}$  lässt sich so für jeden Funktionsteil eine Fläche berechnen. Diese Fläche hat eine Breite und Länge von Eins. Wertet man nun den gleichen Punkt für das Flächenelement  $F_{e-1,f}$ ,  $F_{e,f-1}$  und  $F_{e-1,f-1}$  aus und setzt die sich ergebenden Flächen entsprechend der Anordnung der Flächenelemente zusammen, ergibt sich eine Fläche von -1 bis 1 in  $x$ - und  $y$ -Richtung, wenn man dem ausgewerteten Punkt die Koordinaten  $(0,0)$  gibt. Für den Funktionsteil  $f_1(\xi, \eta)$  ergibt sich so für die Flächenelemente die in Abbildung 3.1 dargestellten Teilstücke, die dann zusammengesetzt werden müssen. Vergleicht man den nach innen weisenden Randverlauf der Flächen mit den Hermiteschen Interpolationspolynomen  $H_{00}$  und  $H_{01}$  (s. Abb. 2.2) so sind diese deckungsgleich, was die Richtigkeit der Fläche bestätigt.



**Abbildung 3.1:** Ausgewertete Flächenelemente für den Funktionsteil 1, die an den Punkt  $P_{e,f}$  mit den Koordinaten  $(0,0)$  grenzen

Die Gleichung (2.4) soll auch auf Stetigkeit in den Ableitungen untersucht werden. Die Ableitungen von (3.1) ergeben sich zu (SCHUH 1984, S. 83)

$$b_{\xi}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^i \chi'(\xi_i) \chi(\eta_j) b(i, j) + \psi'(\xi_i) \chi(\eta_j) b_{\xi}(i, j) \\ + (-1)^{i+j} \chi'(\xi_i) \psi(\eta_j) b_{\eta}(i, j) + (-1)^j \psi'(\xi_i) \psi(\eta_j) b_{\xi\eta}(i, j) \quad (3.6)$$

$$b_{\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^j \chi(\xi_i) \chi'(\eta_j) b(i, j) + (-1)^{i+j} \psi(\xi_i) \chi'(\eta_j) b_{\xi}(i, j) \\ + \chi(\xi_i) \psi'(\eta_j) b_{\eta}(i, j) + (-1)^i \psi(\xi_i) \psi'(\eta_j) b_{\xi\eta}(i, j) \quad (3.7)$$

$$b_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j} \chi'(\xi_i) \chi'(\eta_j) b(i, j) + (-1)^j \psi'(\xi_i) \chi'(\eta_j) b_{\xi}(i, j) \\ + (-1)^i \chi'(\xi_i) \psi'(\eta_j) b_{\eta}(i, j) + \psi'(\xi_i) \psi'(\eta_j) b_{\xi\eta}(i, j) \quad (3.8)$$

$$\text{mit } \chi'(t) = -6t + 6t^2 \\ \psi'(t) = 1 - 4t + 3t^2.$$

Die zweite Ableitung, welche bereits im Abschnitt 2.4 dargestellt wird, ergibt sich mit lokalen Koordinaten ausgedrückt zu

$$b_{\xi^2}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \chi''(\xi_i) \chi(\eta_j) b(i, j) + (-1)^i \psi''(\xi_i) \chi(\eta_j) b_{\xi}(i, j) \\ + (-1)^j \chi''(\xi_i) \psi(\eta_j) b_{\eta}(i, j) + (-1)^{i+j} \psi''(\xi_i) \psi(\eta_j) b_{\xi\eta}(i, j) \quad (3.9)$$

$$b_{\eta^2}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \chi(\xi_i) \chi''(\eta_j) b(i, j) + (-1)^i \psi(\xi_i) \chi''(\eta_j) b_{\xi}(i, j) \\ + (-1)^j \chi(\xi_i) \psi''(\eta_j) b_{\eta}(i, j) + (-1)^{i+j} \psi(\xi_i) \psi''(\eta_j) b_{\xi\eta}(i, j) \quad (3.10)$$

$$\text{mit } \chi''(t) = -6 + 12t \\ \psi''(t) = -4 + 6t.$$

Die gemischten zweiten Ableitungen, die in Abschnitt 2.4 ebenfalls bereits dargestellt werden, ergeben sich mit lokalen Koordinaten ausgedrückt zu

$$b_{\xi^2\eta}(x, y) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^j \chi''(\xi_i) \chi'(\eta_j) b(i, j) + (-1)^{i+j} \psi''(\xi_i) \chi'(\eta_j) b_{\xi}(i, j) \\ + \chi''(\xi_i) \psi'(\eta_j) b_{\eta}(i, j) + (-1)^i \psi''(\xi_i) \psi'(\eta_j) b_{\xi\eta}(i, j) \quad (3.11)$$

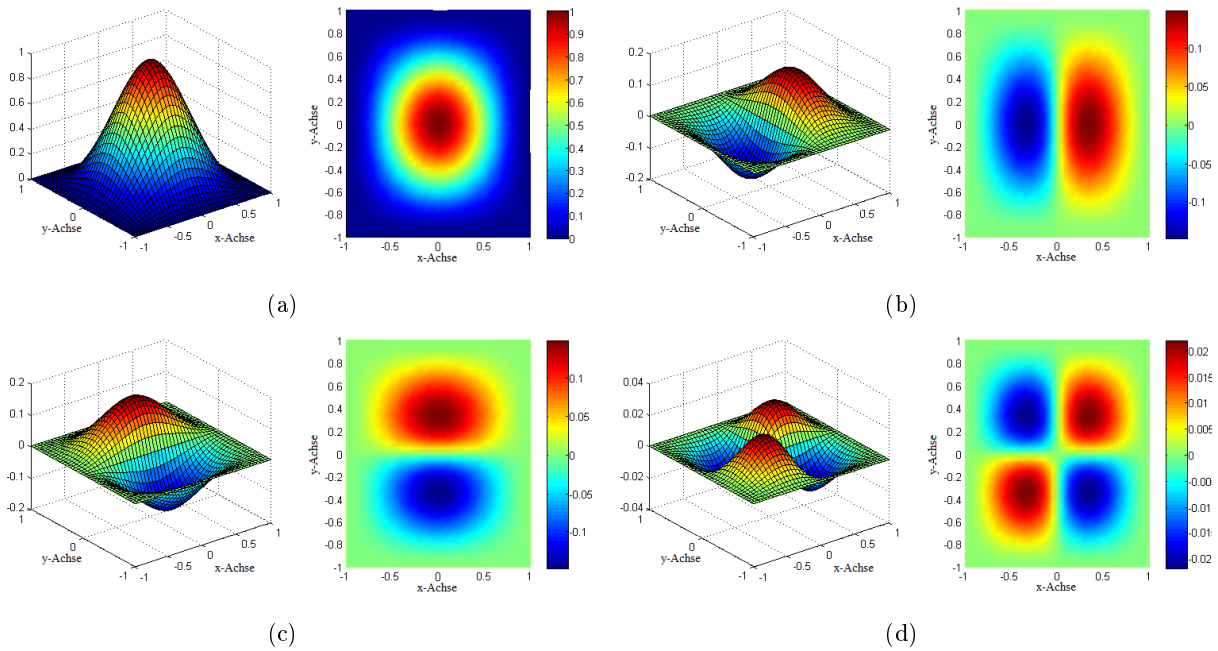
$$b_{\eta^2\xi}(x, y) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^i \chi'(\xi_i) \chi''(\eta_j) b(i, j) + \psi'(\xi_i) \chi''(\eta_j) b_{\xi}(i, j) \\ + (-1)^{i+j} \chi'(\xi_i) \psi''(\eta_j) b_{\eta}(i, j) + (-1)^j \psi'(\xi_i) \psi''(\eta_j) b_{\xi\eta}(i, j). \quad (3.12)$$

Die Funktionsteile zu diesen Ableitungen und die sich daraus ergebenden Flächen berechnen sich äquivalent zu der Berechnung dieser aus der Stammfunktion.

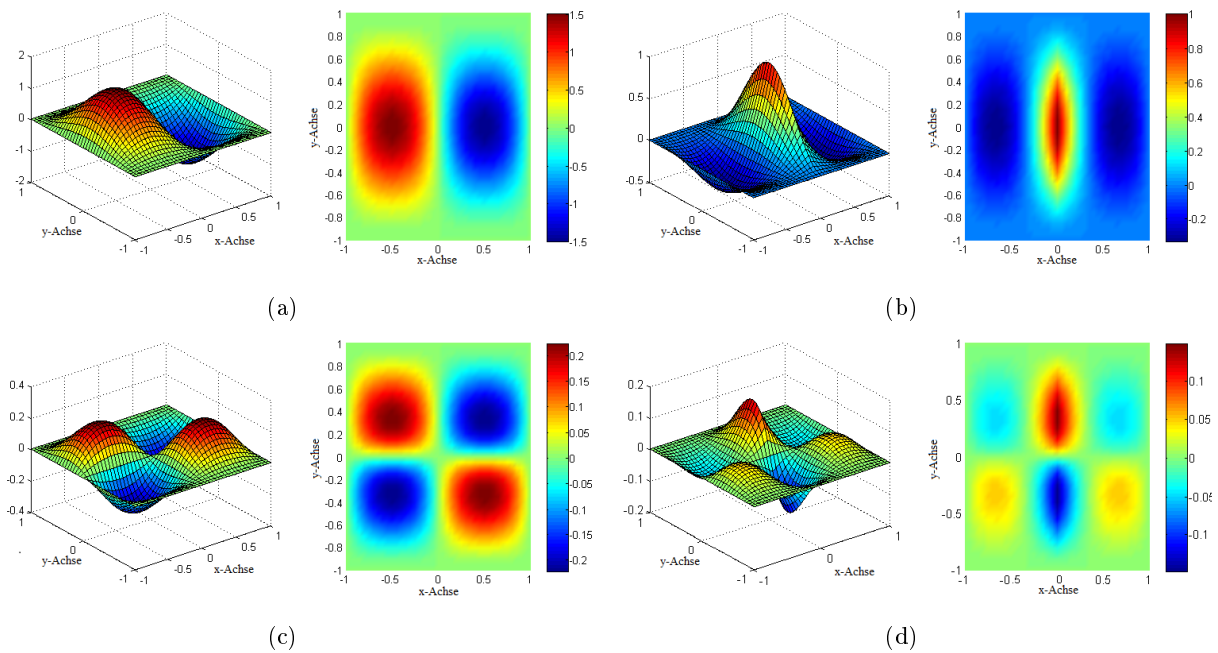
## 3.2 Ergebnisse der Stetigkeitsanalyse

Im Nachfolgenden sind die Ergebnisbilder der grafischen Auswertung dargestellt. Die Abbildung 3.2 zeigt, dass die Gleichung (3.1) beide Stetigkeitsbedingungen erfüllt. Die dargestellte Fläche weist keine Unstetigkeitsstellen auf und verläuft im Randbereich zu Null. Sie ist zudem stetig differenzierbar. So zeigen sich auch die Flächen der erste Ableitung in  $x$ - (Abb. 3.3) und  $y$ -Richtung (Abb. 3.4) sowie die gemischte Ableitung in  $xy$ -Richtung (Abb. 3.5) stetig. Diese sind allerdings in ihrer jeweiligen Richtung in der sie die Ableitung darstellen nicht mehr stetig differenzierbar. Das heißt, dass die Flächen, welche die erste Ableitung nach  $x$  darstellen (Abb. 3.3), zu den Funktionsteilen 2 und 4 in  $x$ -Richtung nicht mehr stetig differenzierbar sind. Das gleiche gilt für die Flächen zu den Funktionsteilen 3 und 4, welche die erste Ableitung nach  $y$  darstellen (Abb. 3.3). Diese sind nicht in  $y$ -Richtung stetig differenzierbar. Die Fläche zu dem Funktionsteil 2, welche die erste Ableitung nach  $xy$  darstellt (Abb. 3.5) ist in  $x$ -Richtung nicht stetig differenzierbar, die

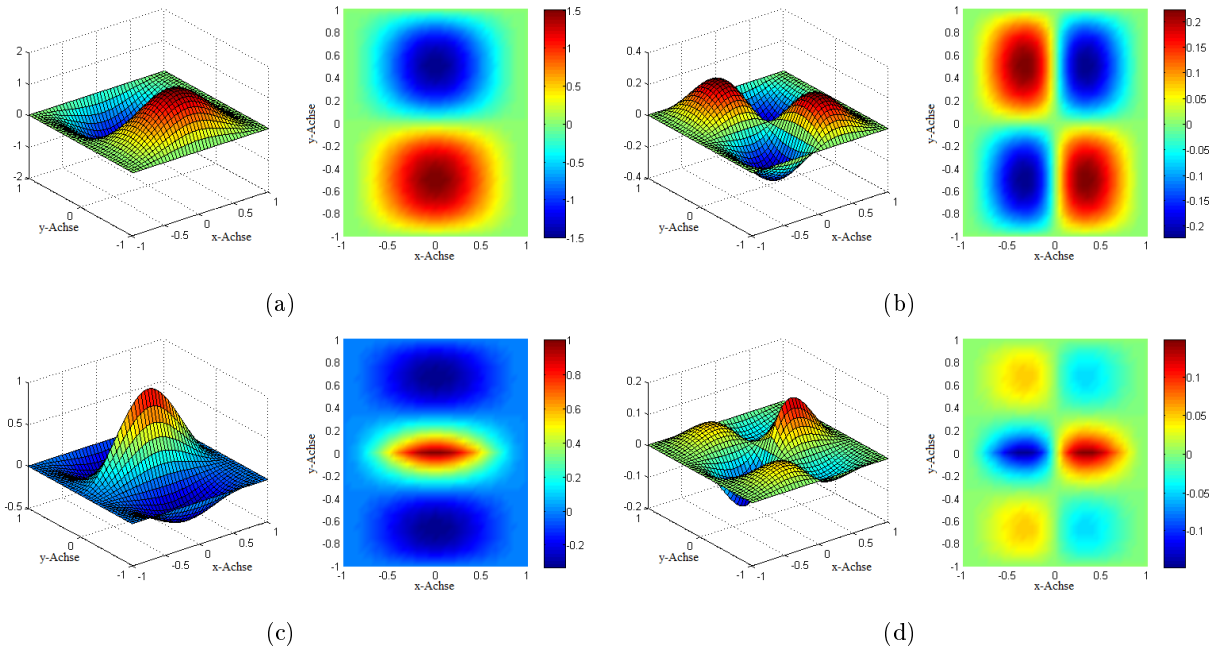
Fläche zu dem Funktionsteil 3 nicht in  $y$ -Richtung und die Fläche zu dem Funktionsteil 4 nicht in  $xy$ -Richtung. Dies führt dazu, dass die zweiten Ableitungen (Abb. 3.6 bis 3.9) nicht mehr stetig in den entsprechenden Flächen zu den zuvor genannten Funktionsteilen sind. Diese Flächen sollten sich durch Anwenden der Restriktionen aus Abschnitt 2.4 zu stetigen Flächen ergeben (s. Abschnitt 3.3).



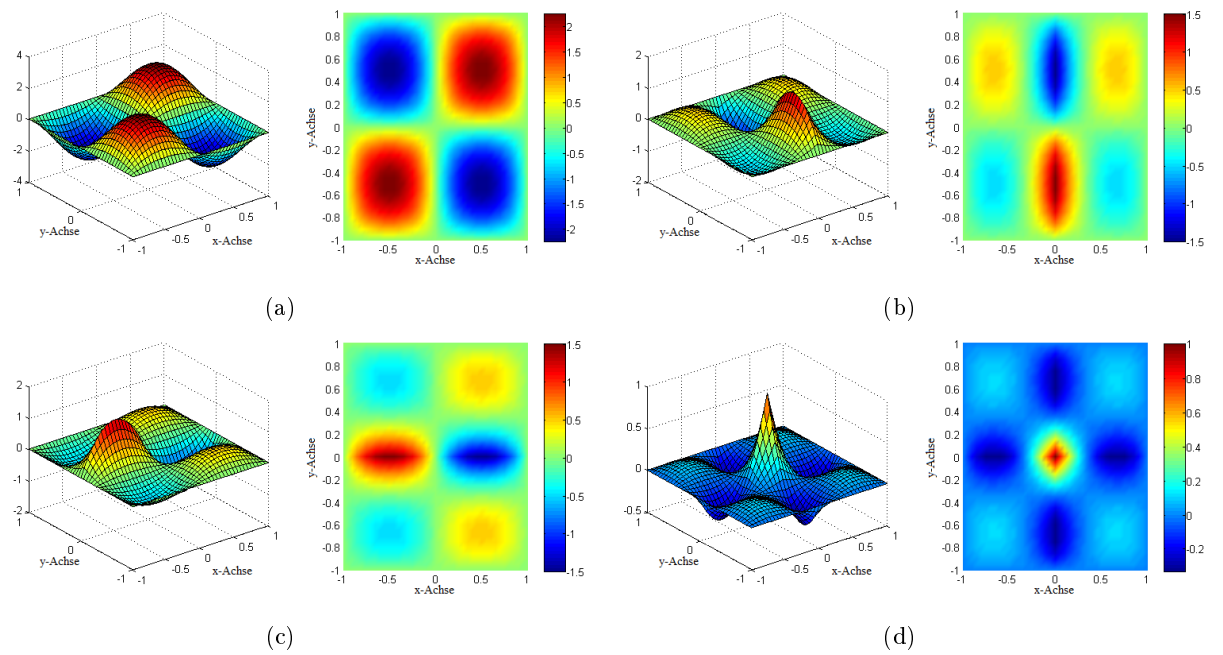
**Abbildung 3.2:** Ausgangsfunktion gemäß (2.4) (a)Fläche zu Funktionsteil 1, (b)Fläche zu Funktionsteil 2, (c)Fläche zu Funktionsteil 3, (d)Fläche zu Funktionsteil 4



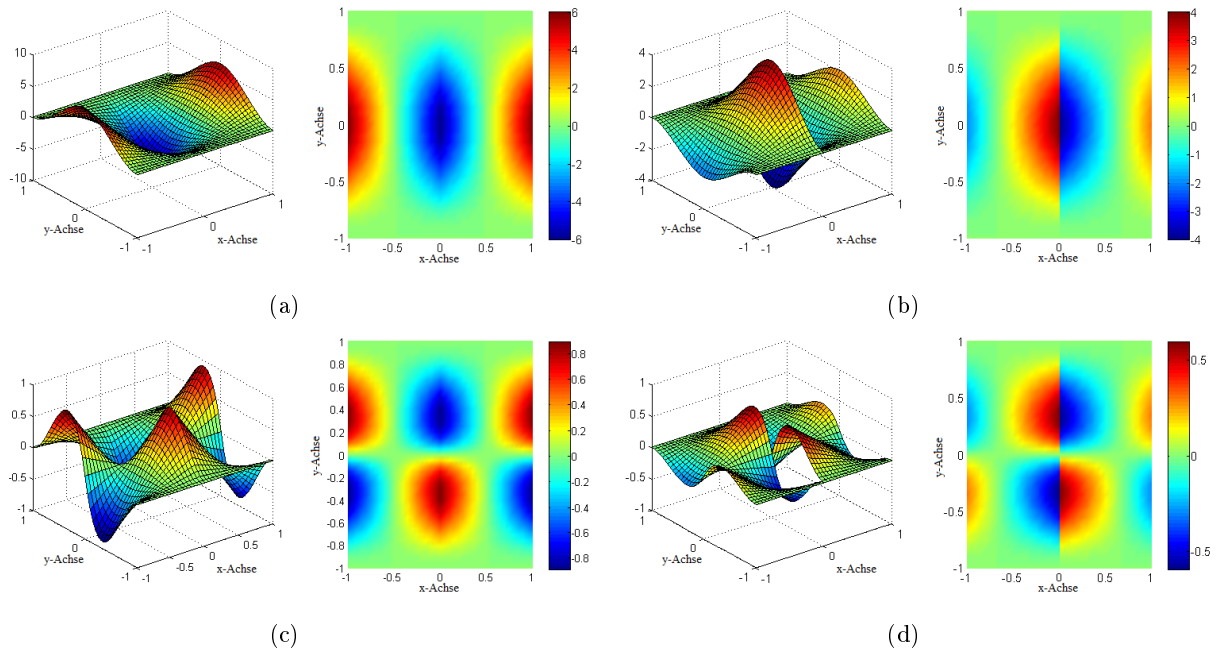
**Abbildung 3.3:** 1. Ableitung in  $x$ -Richtung gemäß der Funktion (3.6) (a)Fläche zu Funktionsteil 1, (b)Fläche zu Funktionsteil 2, (c)Fläche zu Funktionsteil 3, (d)Fläche zu Funktionsteil 4



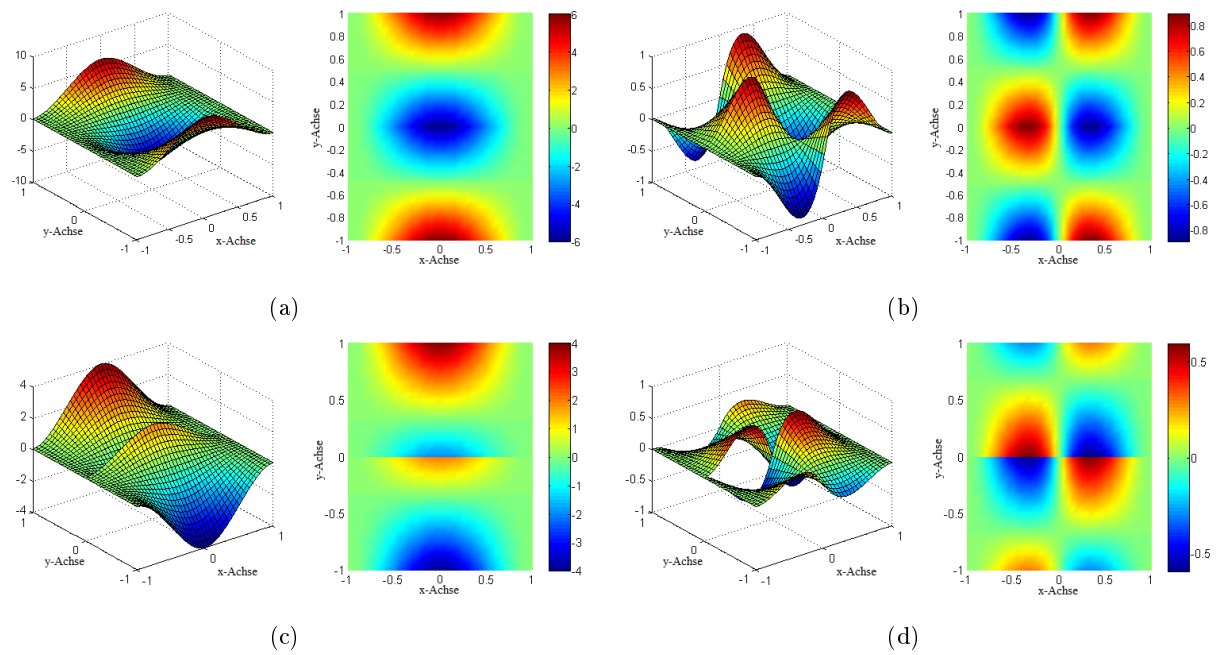
**Abbildung 3.4:** 1. Ableitung in  $y$ -Richtung gemäß der Funktion (3.7) (a)Fläche zu Funktionsteil 1, (b)Fläche zu Funktionsteil 2, (c)Fläche zu Funktionsteil 3, (d)Fläche zu Funktionsteil 4



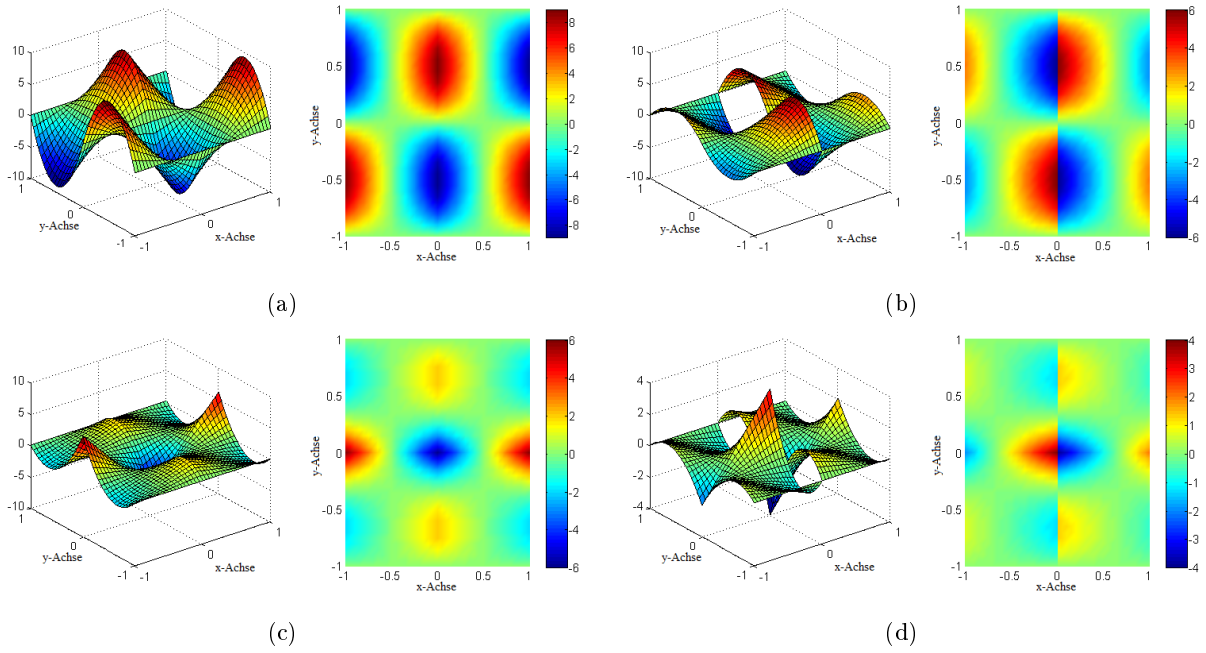
**Abbildung 3.5:** 1. Ableitung in  $xy$ -Richtung gemäß der Funktion (3.8) (a)Fläche zu Funktionsteil 1, (b)Fläche zu Funktionsteil 2, (c)Fläche zu Funktionsteil 3, (d)Fläche zu Funktionsteil 4



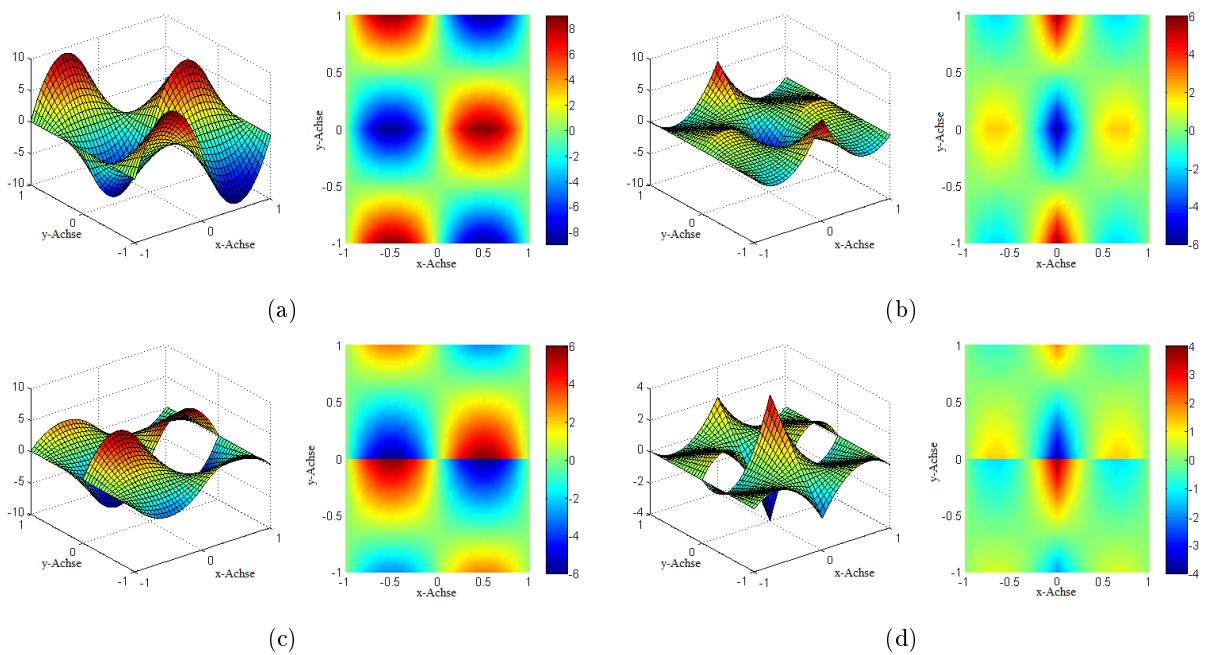
**Abbildung 3.6:** 2. Ableitung in  $x$ -Richtung gemäß der Funktion (3.9) (a)Fläche zu Funktionsteil 1, (b)Fläche zu Funktionsteil 2, (c)Fläche zu Funktionsteil 3, (d)Fläche zu Funktionsteil 4



**Abbildung 3.7:** 2. Ableitung in  $y$ -Richtung gemäß der Funktion (3.10) (a)Fläche zu Funktionsteil 1, (b)Fläche zu Funktionsteil 2, (c)Fläche zu Funktionsteil 3, (d)Fläche zu Funktionsteil 4



**Abbildung 3.8:** Gemischte 2. Ableitung zweimal in  $x$ - und einmal in  $y$ -Richtung gemäß der Funktion (3.11) (a)Fläche zu Funktionsteil 1, (b)Fläche zu Funktionsteil 2, (c)Fläche zu Funktionsteil 3, (d)Fläche zu Funktionsteil 4

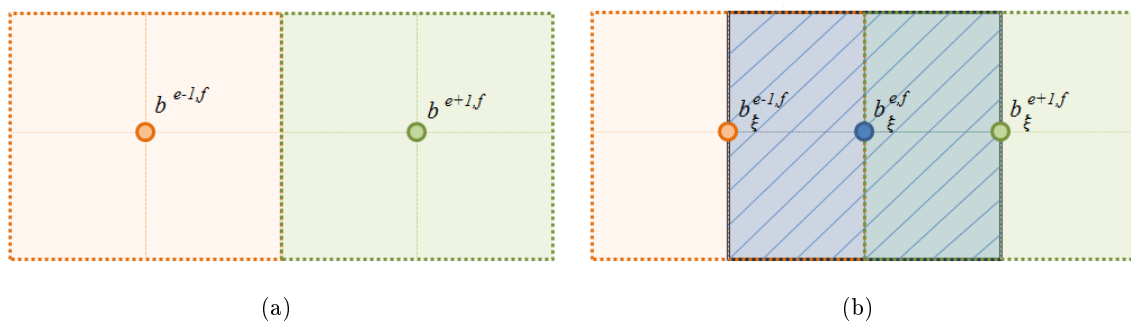


**Abbildung 3.9:** Gemischte 2. Ableitung zweimal in  $y$ - und einmal in  $x$ -Richtung gemäß der Funktion (3.12) (a)Fläche zu Funktionsteil 1, (b)Fläche zu Funktionsteil 2, (c)Fläche zu Funktionsteil 3, (d)Fläche zu Funktionsteil 4

### 3.3 Anwendung der Restriktionen auf die Flächen der zweiten Ableitungen

Durch die in Abschnitt 2.4 eingeführten Restriktionen soll die approximierte Fläche in der zweiten Ableitung stetig werden. Um die Auswirkung der Anwendung der Restriktionen auf diese grafische Darstellung der Funktionen zeigen zu können, müssen zusätzlich zu dem betreffenden Knoten die sich in der Formel der Restriktionen befindlichen Nachbarknoten betrachtet werden. Die sich durch die Differenz der Flächen, entsprechend der Restriktionen faktorisiert, ergebende Fläche sollte den Höhenwert Null an dem betreffenden Knoten  $P_{e,f}$  annehmen. Nur dann ist die Stetigkeit der approximierten Flächen nach dem Anwenden der entsprechenden Restriktionen in jener der Restriktion zugeordneten zweiten Ableitung gewährleistet. Dies bedeutet für die Restriktion, welche die zweite Ableitung in  $x$ -Richtung für die selben Knoten aneinandergrenzender Flächenelemente gleichsetzt, dass die in Abbildung 3.10 dargestellten zusammengesetzten Flächen in Differenz, entsprechend faktorisiert mit 3, -3, 4 oder 1, an dem betreffenden Knoten  $P_{e,f}$  Null werden sollten. Die Restriktion lautet für ein Flächenelement mit einer Breite und Länge von Eins

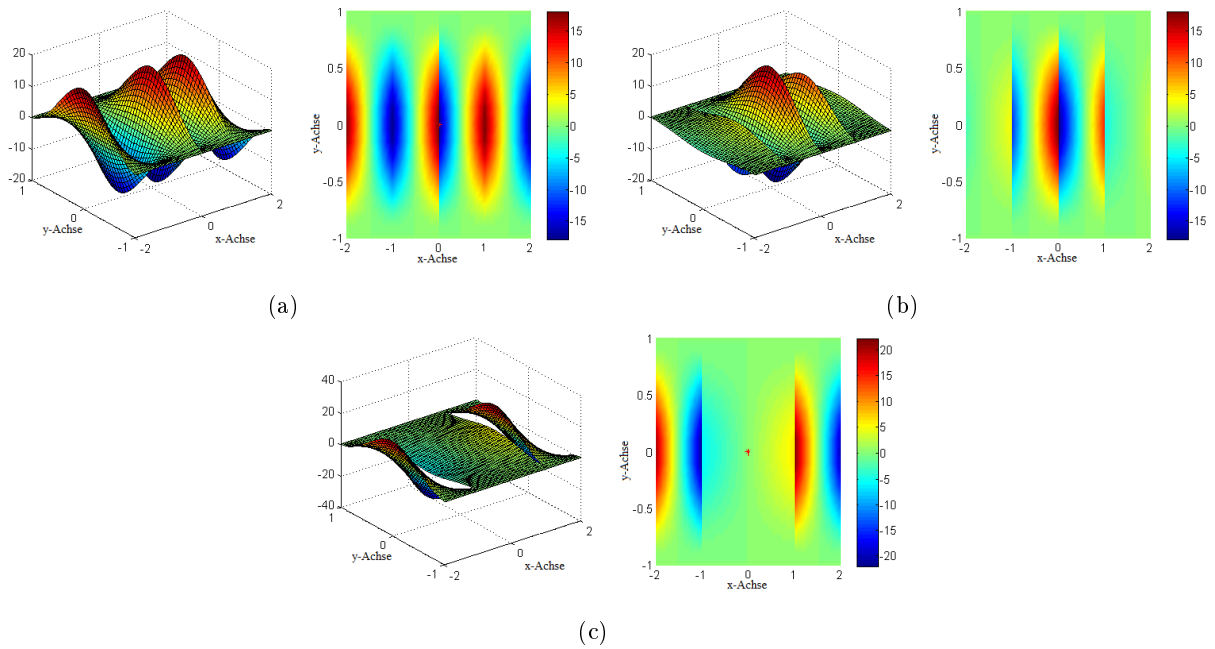
$$\left(3b^{e+1,f} - 3b^{e-1,f}\right) - \left(4b_{\xi}^{e,f} + b_{\xi}^{e+1,f} + b_{\xi}^{e-1,f}\right) = 0. \quad (3.13)$$



**Abbildung 3.10:** Flächen, die zur Anwendung der Restriktionen benötigt werden,  
 (a) Flächen, die sich zu Funktionsteil 1 ergeben,  
 (b) Flächen, die sich zu Funktionsteil 2 ergeben

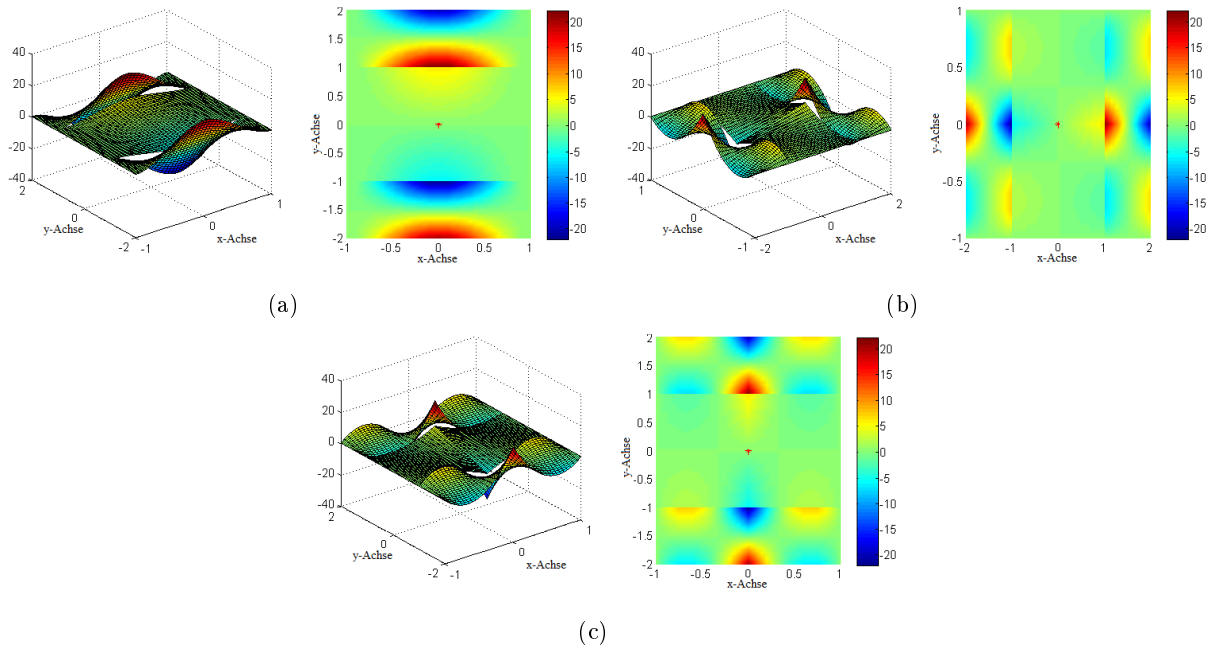
Dazu nutzt man die in Abbildung 3.6(a) und 3.6(b) dargestellten Flächen, faktorisiert sie und ordnet sie entsprechend der in Abbildung 3.10 darstellen Reihenfolge an. Das Ergebnis zeigt sich in Abbildung 3.11(a) und 3.11(b). Werden nun diese beiden entstanden Flächen gemäß der Restriktion subtrahiert, so ergibt sich die in Abbildung 3.11(c) dargestellte Fläche. Da der Höhenwert an dem betreffenden Knoten gleich Null ist, wird die oben bereits erwähnte Anforderung erfüllt. Die in  $x$ -Richtung aneinander gesetzten Flächenelemente würden, wenn sie entsprechend zusammengesetzt in  $y$ -Richtung nicht zu Null verlaufen, Einfluss auf die Stetigkeit des darüber liegenden Knotenpunktes haben, sodass dort im Rand die Fläche zu Null verlaufen muss. Da beide Anforderungen erfüllt sind, ist die approximierte Fläche nach Einführen der Restriktion in der zweiten Ableitung in  $x$ -Richtung stetig.





**Abbildung 3.11:** (a) Zusammengesetzte Fläche zu  $3b^{e+1,f} - 3b^{e-1,f}$ ,  
 (b) Zusammengesetzte Fläche zu  $4b_{\xi}^{e,f} + b_{\xi}^{e+1,f} + b_{\xi}^{e-1,f}$ ,  
 (c) Subtraktion von (a) und (b)

In der Abbildung 3.12 sind die Ergebnisbilder nach Anwendungen der übrigen Restriktionen auf die entsprechenden Flächen dargestellt. Es wurde das gleiche Vorgehen wie zuvor verfolgt. Die Ergebnisse aus Abbildung 3.12 und 3.11 zeigt, dass durch das Einführen jeder Restriktion aus Abschnitt 2.4 eine stetige Fläche in der dafür bestimmten Richtung erreicht wird.



**Abbildung 3.12:** Anwendung der Restriktion zur (a) zweiten Ableitung in  $y$ -Richtung,  
 (b) gemischten zweiten Ableitungen zweimal in  $x$ - und einmal in  $y$ -Richtung,  
 (c) gemischten zweiten Ableitungen zweimal in  $y$ - und einmal in  $x$ -Richtung  
 ...auf die entsprechenden Flächen zu den Funktionsteilen

# 4. Approximation eines synthetischen Beispiels

## 4.1 Synthetisches Beispiel

Um eine Approximation räumlich festgelegter Höhendifferenzen durchführen zu können, ist das Vorliegen von lagemäßig festgelegten Punkten, denen eine bestimmte Höhendifferenz als Beobachtung zugeordnet ist, unbedingt erforderlich. Damit die anschließende Approximation kontrollierbar wird, sollen diese nicht zufällig zugeordnet, sondern auf Grundlage einer synthetischen Fläche abgegriffen werden. Als Grundlage wird dazu eine reelle zwei-dimensionale Fourierreihe generiert. Diese unterscheidet sich durch ihren mathematischen Aufbau deutlich von einer zwei-dimensionalen Polynomfläche und stellt daher eine unabhängige Referenzfläche dar.

Die Lage der Punkte wird durch den Rechtswert  $x$  und den Hochwert  $y$  definiert. Die Formel für die ein-dimensionale Fourierreihe für die jeweilige Koordinatenrichtung gemäß PAPULA (2007) lautet

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \quad (4.1)$$

$$f(y) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) \quad (4.2)$$

mit  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $a_m, b_m, c_n, d_n \in \mathbb{R}$ .

Da die Fourierreihe eine Funktionsreihe trigonometrischer Funktionen (Sinus und Cosinus) ist, wird mit  $\tau_1$  in  $x$ -Richtung und  $\tau_2$  in  $y$ -Richtung die Periode festgelegt. Die Fourierkoeffizienten  $a_m, b_m, c_n$  und  $d_n$  bestimmen die Amplitude der jeweiligen trigonometrischen Funktion.

Durch die Multiplikation ergibt sich der zwei-dimensionale Fall. Der Funktionswert  $f(x, y)$  entspricht der Höhe und ergibt sich zu

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{a_0 c_0}{4} + \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) + \frac{c_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \right) \left( c_n \cos\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( a_0 \cos\left(\frac{0\pi x}{\tau_1}\right) + b_0 \sin\left(\frac{0\pi x}{\tau_1}\right) \right) \left( c_0 \cos\left(\frac{0\pi y}{\tau_2}\right) + d_0 \sin\left(\frac{0\pi y}{\tau_2}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( a_0 \cos\left(\frac{0\pi x}{\tau_1}\right) + b_0 \sin\left(\frac{0\pi x}{\tau_1}\right) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n \cos\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \right) \left( c_0 \cos\left(\frac{0\pi y}{\tau_2}\right) + d_0 \sin\left(\frac{0\pi y}{\tau_2}\right) \right) \\ &\quad + 1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m c_n \cos\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) + a_m d_n \cos\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) \\ &\quad + b_m c_n \sin\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) + b_m d_n \sin\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right). \end{aligned}$$

Wird nun die Multiplikation mit  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$  und 1 durch die Variable  $\lambda$  mit Fallunterscheidung ersetzt, die Summen bei Null begonnen und  $a_m c_n$  durch  $A_{mn}$ ,  $a_m d_n$  durch  $B_{mn}$ ,  $b_m c_n$  durch  $C_{mn}$  und  $b_m d_n$  durch  $D_{mn}$  ersetzt, so ergibt sich

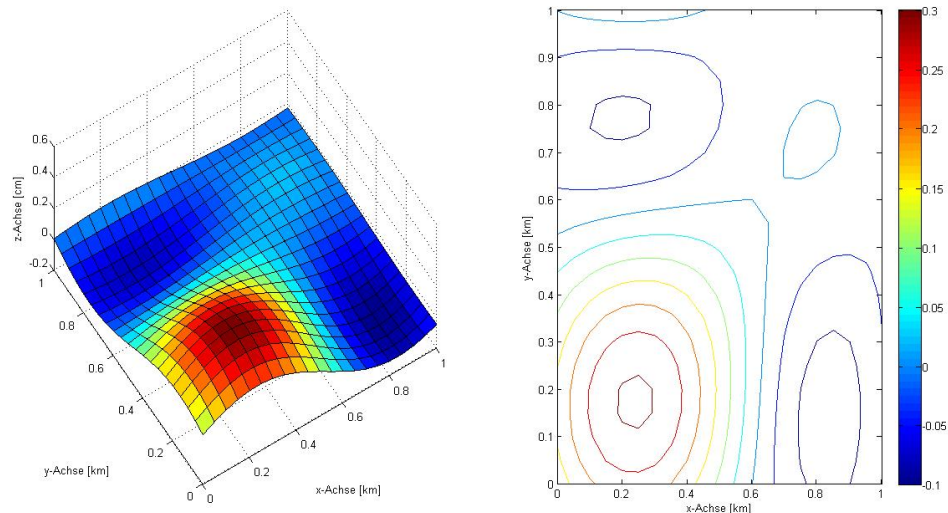
$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \left[ A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) + B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) \right. \quad (4.3)$$

$$\left. + C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) + D_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{\tau_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{\tau_2}\right) \right],$$

$$\text{mit } x, y \in \mathbb{R}, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}^+, n, m \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{wenn } m = n = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{wenn } m \neq 0 \text{ und } n = 0 \\ & \text{oder } n \neq 0 \text{ und } m = 0 \\ 1, & \text{wenn } m = n \neq 0 \end{cases}.$$

Die Variablen  $A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm}$  sind frei zu wählen. Durch das Verhältnis dieser zueinander, wird die Lage der Hoch- beziehungsweise Tiefpunkte innerhalb einer Periode kontrolliert. Die Größenordnung der Variablen definiert die Höhe der Extrempunkte. Um mehrere Nulldurchgänge je Periode zu simulieren, ist die Zahl der Summationen zu erhöhen. Dies geschieht durch die Erhöhung von  $m$  und  $n$ . Auch hiermit ist es folglich möglich, die Lage der Extrempunkte zu ändern.

Um für die spätere Approximation ein zur visuellen Kontrolle geeignetes Beispiel zu generieren, wird eine Fläche mit einem Hoch- und zwei Tiefpunkten erzeugt. Die Länge der Periode ( $\tau_1 = \tau_2 = 550m$ ) ist dabei nur wenig größer als die Hälfte der dargestellten Flächenseiten ( $= 1km$ ). Die Anzahl der Summationen ist in  $x$ - und  $y$ -Richtung mit  $m = 1$  und  $n = 1$  festgelegt. Die Fläche, die sich aufgrund dieser Einstellungen ergibt, wird in Abbildung 4.1 dargestellt.



**Abbildung 4.1:** Synthetische Fläche zum Abgreifen von Höhendifferenzwerten bei gegebenen Lagekoordinaten

## 4.2 Approximation mit und ohne Restriktionen

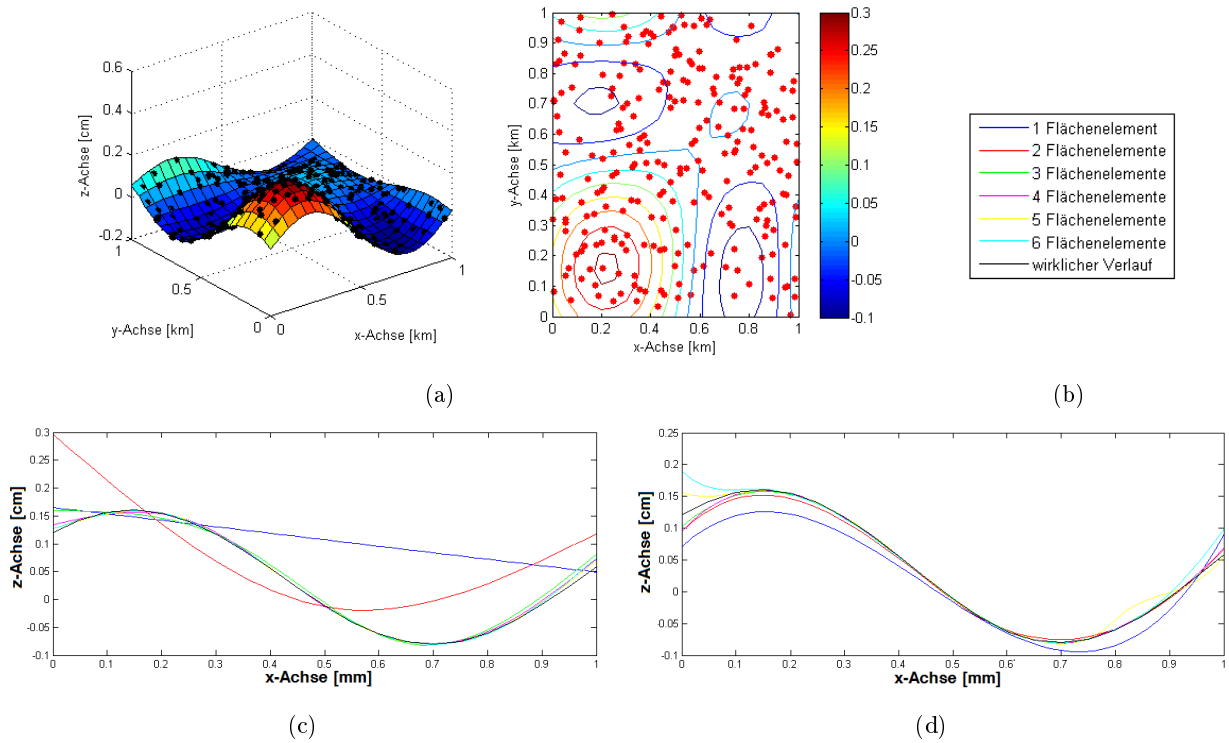
### 4.2.1 Randverlauf der approximierten Fläche

Wie bereits in Abschnitt 2.4 erwähnt, wird die approximierte Fläche bei nur einem Flächenelement durch den Ansatz des natürlichen Splines an den Seiten in einen linearen Verlauf gezwungen. Nun ist zu untersuchen, wie viele Flächenelemente mindestens angesetzt werden müssen, um jeglichen Verlauf, entsprechend der angesetzten Auflösung, approximieren zu können.

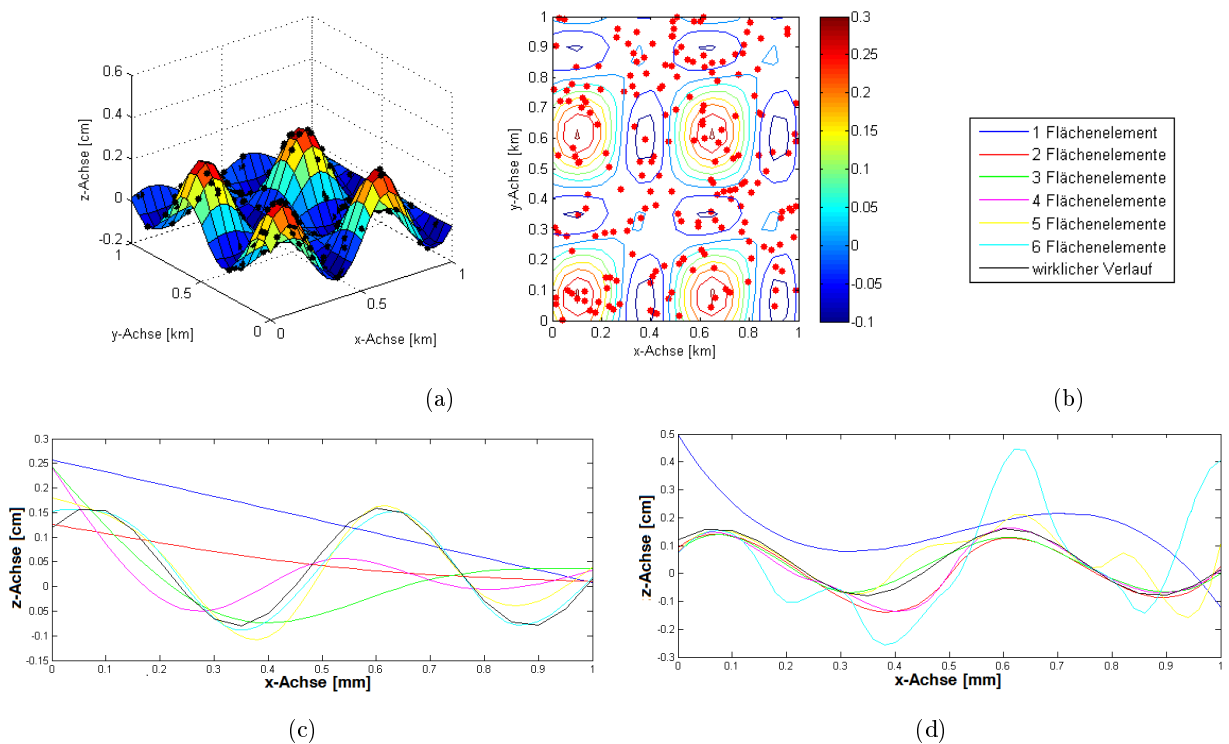
Es wurden für die inneren Knoten die Restriktionen angewandt, die auf den zweiten Ableitungen in  $x$ - und jene in  $y$ -Richtung, sowie auf der gemischten zweiten Ableitungen zweimal in  $x$ - und einmal in  $y$ -Richtung basieren. Für die Eck- und Seitenknoten wurden alle dafür vorgestellten Restriktionen eingeführt. Dies gilt auch für die weiteren Betrachtungen. Die Unterschiede zu einer Approximation mit weniger Restriktionen, zum Beispiel wenn diejenigen zu den gemischten Ableitungen weggelassen werden, sind in den betrachteten Randbereichen minimal, da die gemischten zweiten Ableitungen die Stetigkeit der Flächen in der Diagonalen der Flächenelemente regulieren. Daher ist die Betrachtung der gesamten approximierten Fläche, was die Unterschiede zwischen den Approximationen mit verschiedenen Anzahlen an eingebrachten Restriktionen betrifft, sinnvoller. Dies wird in Abschnitt 4.2.3 dargestellt. Zudem sind die Abweichungen sektoral begrenzt (s. Abb. 4.8). Das heißt, die Differenzen zwischen den Approximationen schwanken innerhalb eines Flächenelements um Null. Daher ist dies bei einer gesamtheitlichen Betrachtung des Randverlaufs nicht von Bedeutung.

Mit der Anzahl der Flächenelemente je Seite wächst der Grad des Polynoms, das an den Seiten approximiert werden kann. Dies zeigt die Abbildung 4.2(b). Die zu approximierende Fläche wurde als in den Seiten kubisches Polynom synthetisch generiert (s. Abb. 4.2(a)) und anschließend mit Restriktionen approximiert. Wird nur ein Flächenelement angesetzt, so zeigt sich ein linearer Verlauf, mit Zweien ein quadratischer und mit Dreien ein kubischer Verlauf. Je mehr Flächenelemente angesetzt werden, desto besser wird die Fläche approximiert.

Dass die Anzahl der Flächenelemente der Auflösung der Fläche angepasst werden muss, wird auch durch die Abbildung 4.3(b) deutlich. Hierzu wurde ein Randverlauf mit einem Polynomgrad von Fünf generiert (s. Abb. 4.3(a)). Mit fünf Flächenelementen kann die Fläche approximiert werden. Je mehr Flächenelemente angesetzt werden, desto besser wird diese approximiert. Deutlich wird auch der Unterschied zu der Approximation ohne Restriktionen (s. Abb. 4.3(c)), in welcher der Rand mit fünf und sechs Flächenelementen stark innerhalb eines Flächenelements von der zu approximierenden Fläche ausreißt. Die Oszillation ist vor allem dort festzustellen, wo nur wenige Beobachtungen zur Verfügung stehen. Die Lage der Höhendifferenzpunkte ist durch die in rot dargestellten Punkte in der Abbildung mit den Höhenlinien abzulesen. Maßnahmen, um dieses Ausreißen zu minimieren, werden im nachfolgenden Abschnitt erläutert.



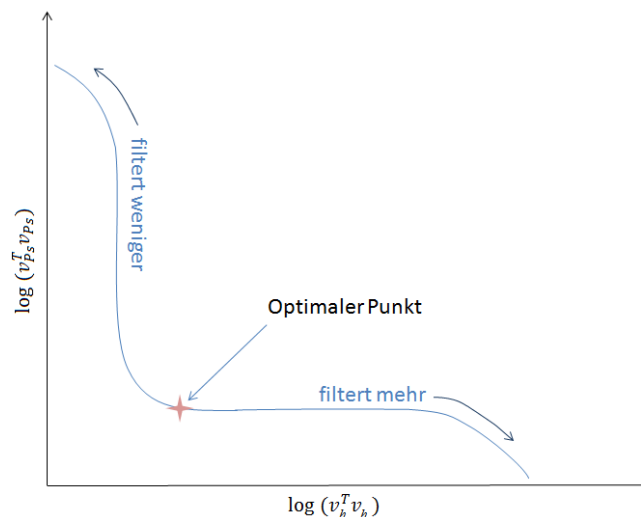
**Abbildung 4.2:** (a) Synthetisches Beispiel mit kubischem Verlauf an den Seiten, (b) Legende, (c) Approximation der unteren Seite mit Krümmungsminimierung und mit Restriktionen, (d) Approximation der unteren Seite mit Krümmungsminimierung aber ohne Restriktionen



**Abbildung 4.3:** (a) Synthetisches Beispiel mit dem Verlauf eines Polynoms 5. Grades an der unteren Seite, (b) Legende, (c) Approximation der unteren Seite mit Krümmungsminimierung und mit Restriktionen, (d) Approximation der unteren Seite mit Krümmungsminimierung aber ohne Restriktionen

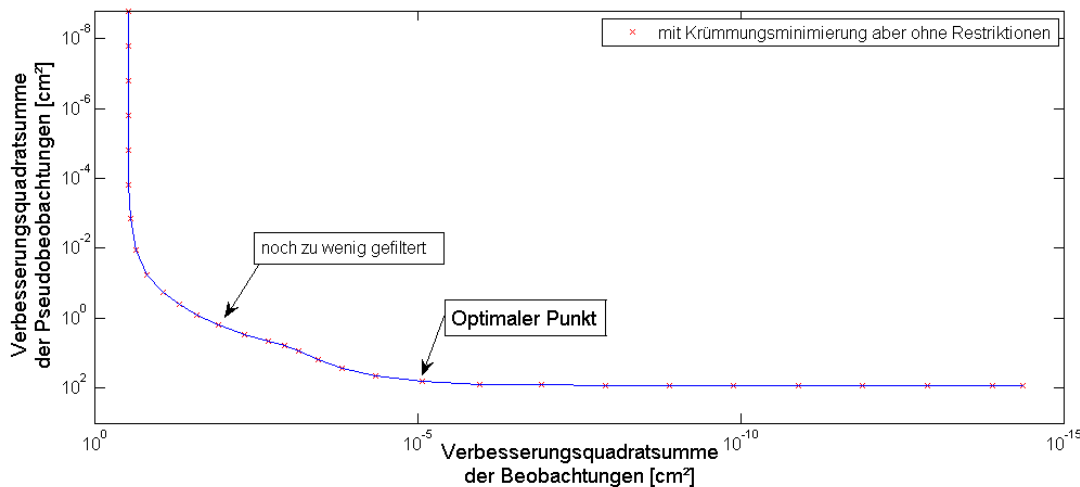
## 4.2.2 Optimale Gewichtung der Pseudobeobachtungen

Im diesem Abschnitt soll die optimale Gewichtung der Pseudobeobachtung ermittelt werden. Wie bereits im Abschnitt zuvor auffiel, ist besonders die Approximation ohne Restriktionen anfällig für Oszillationen. Sie zeigt ein Ausreißen der Fläche vom eigentlichen Verlauf in den Flächenelementen, in denen keine oder nur wenige Stützstellen vorliegen. Dies soll nun an der gesamten Fläche betrachtet werden. Die Anzahl der in Abbildung 4.6 angesetzten Flächenelemente beträgt  $4 \times 4 = 16$ . Die Anzahl der hierfür angesetzten Beobachtungen beträgt 30 Punkte. Die Approximation ohne Restriktionen zeigt Verlaufsänderungen innerhalb eines Flächenelements ohne Begründung durch dortige Beobachtungen (s. Abb. 4.6(c)). Entlang der Gitterlinien, also direkt zwischen den Knotenpunkten fällt die Fläche zum gewünschten Verlauf zurück. Diese approximierte Fläche ist durch die Restriktionen deutlich steifer in ihrer Bewegung, sodass sich eine ebenmäßiger Fläche ergibt (s. Abb. 4.6(d)). Dies führt allerdings dazu, dass der Vorteil finiter Elemente, dass lokale Phänomene nur lokale Auswirkungen auf die Fläche haben, zum Teil entfällt. Die Steifigkeit die Fläche bewirkt, dass die Auswirkungen lokaler Phänomene großflächiger werden. Dies kann vor allem bei fehlerbehafteten Datensätzen zu Problemen führen. Es bleibt somit abzuwägen, je nach Problemstellung, ob Restriktionen eingeführt werden sollen. Die Approximation ohne Restriktionen oder mit Restriktionen ist durch die Varianz/ Gewichtung der Pseudobeobachtungen, was die Oszillation betrifft, zu kontrollieren. Die Varianz darf nicht zu klein sein, da ansonsten die Pseudobeobachtungen den eigentlichen Beobachtungen zu große Konkurrenz machen und dadurch die Beobachtungen zu große Verbesserungen erhalten (zu wenig gefiltert). So läge eine schlechte Datenanpassung vor, die auf keinen Fall gewünscht sein kann. Sie sollte aber auch nicht zu klein werden. Dies würde folglich zwar zu einer guten Datenanpassung, aber zu einer schlecht konditionierten Normalgleichungsmatrix führen (zu stark gefiltert). Bei einem unterbestimmten System würde es immer mehr zu Interpolation der Beobachtungen führen. Eine Möglichkeit die optimale Varianz der Pseudobeobachtungen zu finden ist das sogenannte L-Kurven-Kriterium (HANSEN 1992). Der optimale Punkt wird in dieser Arbeit rein optisch bestimmt.



**Abbildung 4.4:** Die L-Kurve  
(optimaler Punkt = optimale Datenanpassung und optimal geringe Oszillation)

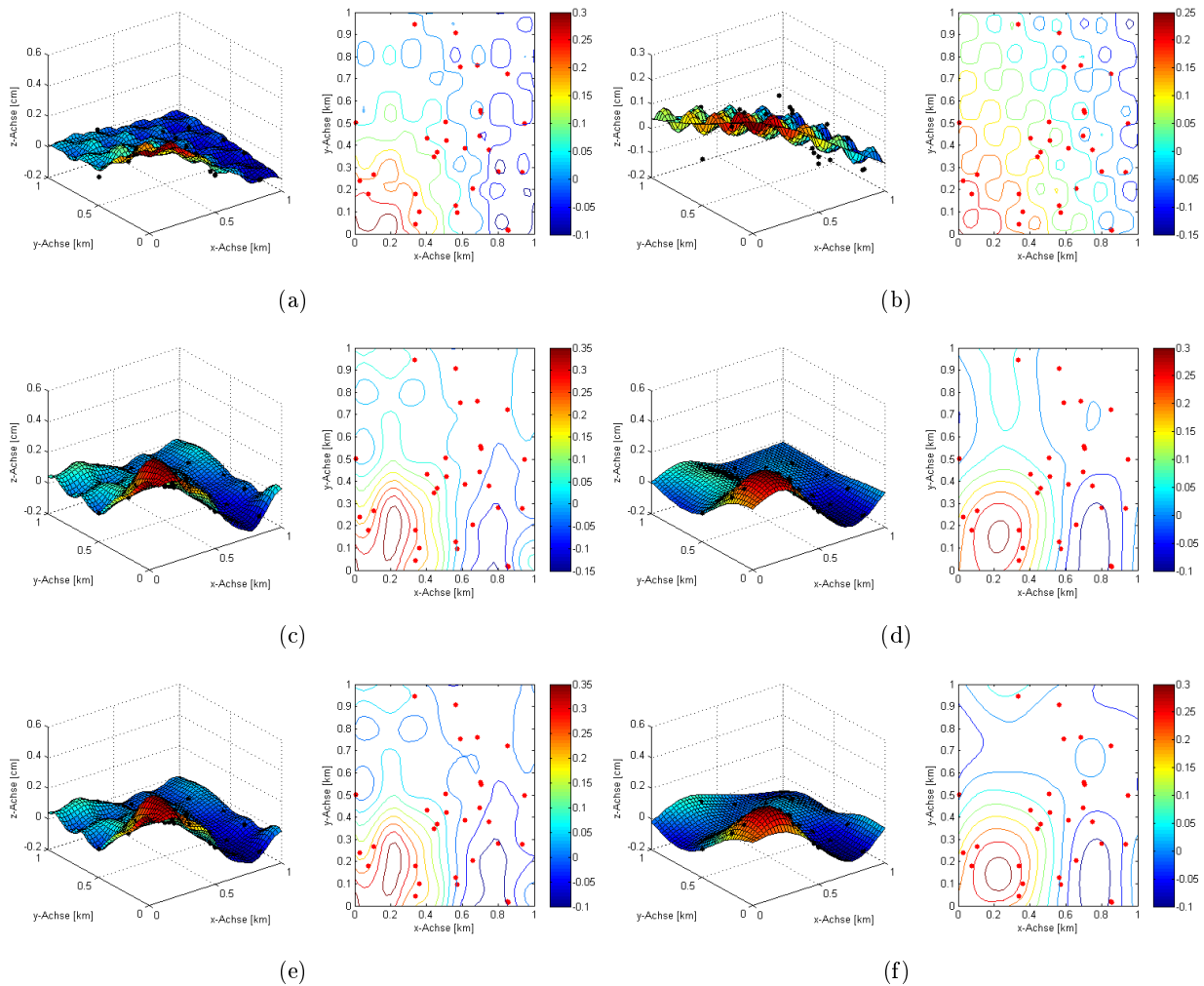
Wie die Abbildung 4.4 zeigt, wird bei der L-Kurve für diesen Anwendungsfall die Verbesserungsquadratsumme der Beobachtungen logarithmisch gegen die der Pseudobeobachtungen aufgetragen. Angewendet auf das zuvor bereits angesprochene Beispiel zeigt sich der in Abbildung 4.5 dargestellte Verlauf. Zu beachten ist die reverse Orientierung der  $y$ -Achse.



**Abbildung 4.5:** Empirische L-Kurve für 30 Beobachtungspunkte und einer Approximation mit Krümmungsminimierung durch 16 Flächenelemente  
(optimaler Punkt:  $\sigma_{0P_s}^2 = 10^{-6.5} \text{cm}^2$ , zu wenig gefiltert:  $\sigma_{0P_s}^2 = 10^{-2} \text{cm}^2$ )

Die a priori Varianz der Beobachtungen wurde mit  $1 \text{cm}^2$ , die der Pseudobeobachtungen für die Abbildung 4.6(a) mit  $10^{-2} \text{cm}^2$  und für die Abbildung 4.6(c) mit  $10^{-6.5} \text{cm}^2$  angesetzt. Die Beobachtungen und die Pseudobeobachtungen werden als gleich genau und unkorreliert gesehen (einfaches stochastisches Modell). Damit ist eine Gewichtung der Pseudobeobachtungen zu den Beobachtungen mit  $1 : 10^2/10^{6.5}$  gewählt. Die Gewichtung muss für dieses Beispiel unter  $1 : 10^{12}$  liegen. Dies begründet sich durch die Rechengenauigkeit des Programms MATLAB, mit dem diese Approximation gerechnet und dargestellt wurde. Die Rechengenauigkeit des Programms liegt bei  $10^{-16}$ . Würde man die Gewichtung für dieses Beispiel kleiner als  $10^{-12}$  wählen, so würde die Normalgleichungsmatrix, aufgrund deren schlechter Kondition mit  $\kappa = 10^{16}$  (Quotient des größten und kleinsten Eigenwertes einer Matrix), singular werden. Dies scheint auch nicht nötig, da die Abbildung 4.6(e) zeigt, dass auch nach weiterem Senken der Gewichtung der Pseudobeobachtungen die approximierte Fläche nur geringe Formänderungen aufweist. Daher ist der optimale Punkt der L-Kurve dann erreicht, wenn die Gewichtung der Pseudobeobachtungen nahezu keinen Einfluss mehr auf die Verbesserungsquadratsumme eben jener zeigt.

Die in Abbildung 4.6(d) und 4.6(f) dargestellten Flächen stellen Approximationen mit Restriktionen dar. Sie zeigen eine sehr gute Approximation in Hinblick auf die geringe Anzahl an Beobachtungen, wenn man sie der synthetischen Fläche gegenüberstellt. Sie zeigt eine verbesserte Approximation durch eine weitere Senkung der Gewichtung der Pseudobeobachtungen. Die richtige Gewichtung der Pseudobeobachtungen scheint für die Approximation ohne Restriktionen geringer als für die Approximation mit Restriktionen. Es sollte sich dennoch an die Gewichtung, die aus der nach der Approximation nur mit Krümmungsminimierung entstandene L-Kurve gerichtet werden, denn nach der Anwendung der Restriktionen ist in dem Verlauf der daraus resultierenden L-Kurve optisch kein optimaler Punkt zu bestimmen.



**Abbildung 4.6:** Auswirkung der Gewichtung der Pseudobeobachtung auf die Approximationen ohne Restriktionen (links) / mit Restriktionen (rechts) bei 4 Flächenelementen je Richtung

$$(a) \ \& \ (b) \ \sigma_{0P_s}^2 = 10^{-2} \text{cm}^2$$

$$(c) \ \& \ (d) \ \sigma_{0P_s}^2 = 10^{-6.5} \text{cm}^2$$

$$(e) \ \& \ (f) \ \sigma_{0P_s}^2 = 10^{-10} \text{cm}^2$$

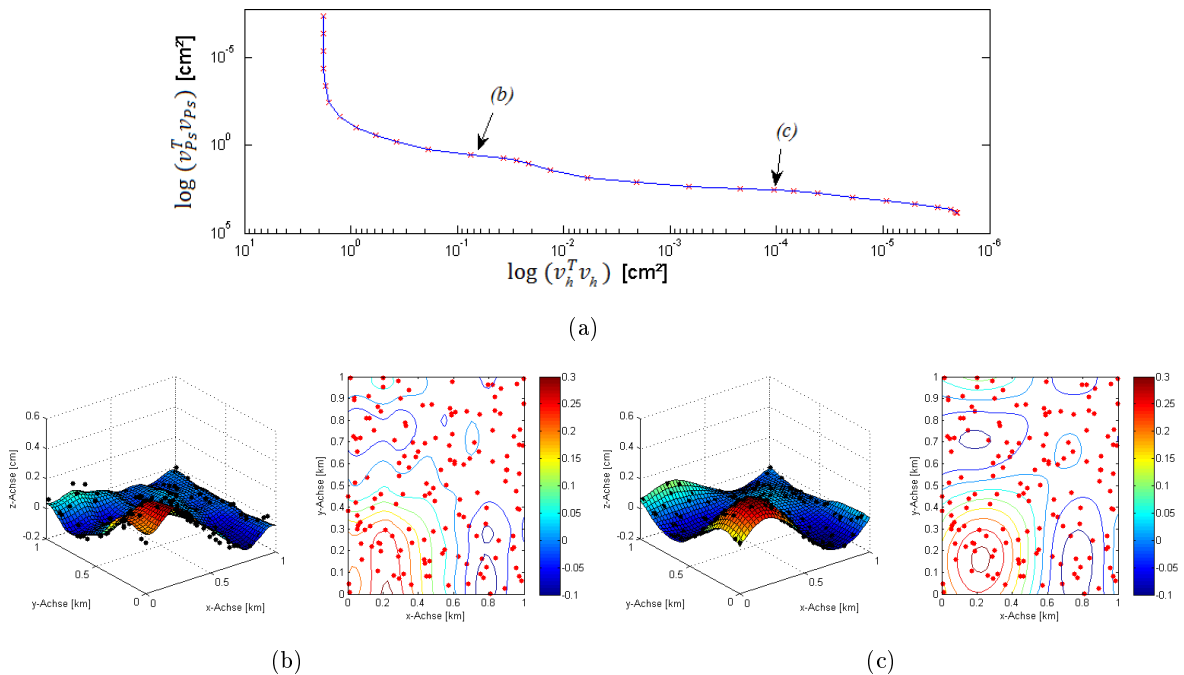
Bei einer Überbestimmung des Systems, zum Beispiel wie in Abbildung 4.7 mit 150 Punkten und 4 Flächenelementen pro Richtung (Bedingungsichte = 0.3) zeigt sich ein weniger eindeutiges L in der L-Kurve, hier ist allerdings die Gewichtung der Pseudobeobachtung nicht mehr so entscheidend für die Approximation der Fläche wie im Fall zuvor. Wichtig ist, dass die Varianz der Pseudobeobachtungen deutlich unter jener der Beobachtungen liegt und die Normalgleichungsmatrix nicht singulär wird.

Es gibt eine weitere Möglichkeit, die optimale Gewichtung der Pseudobeobachtungen zu realisieren. Die Varianzkomponentenschätzung (KOCH 2004, S. 258) basiert auf einem iterativen Verfahren, welches die a posteriori Varianz der Beobachtungen berechnet und diese dann im Anschluss wieder als a priori Varianz in das Modell gibt. Dieses Verfahren führt dazu, dass die Varianz minimal ist und der Schätzer unverzerrt, da er nach der Konstruktion erwartungstreu ist (FÖRSTNER 1979). Anders ausgedrückt führt die Varianzkomponentenschätzung zu einer besten invarianten quadratischen erwartungstreuen Schätzung. Ihre Anwendung ist nicht Teil dieser Arbeit.



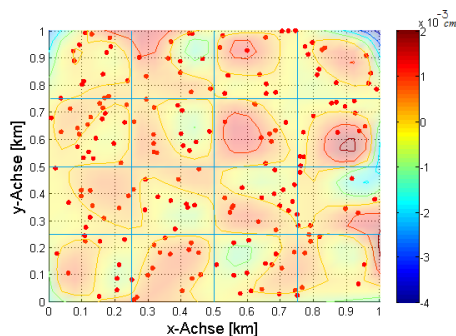
Die a posteriori Varianz berechnet sich in diesem Fall für ein Modell ohne Restriktionen mit

$$\tilde{s}_{h_1}^2 = \frac{\mathbf{v}_h^T \boldsymbol{\Sigma} \{ \mathcal{L}_h \}^{-1} \mathbf{v}_h}{n - sp \left( \frac{\mathbf{A}_h^T \boldsymbol{\Sigma} \{ \mathcal{L}_h \}^{-1} \mathbf{A}_h}{\mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A}} \right)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_h = \mathbf{A}_h \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}_h. \quad (4.4)$$



**Abbildung 4.7:** Auswirkung der Gewichtung der Pseudobeobachtung auf die Approximationen ohne Restriktionen bei 4 Flächenelementen je Richtung und 150 angesetzten Höhendifferenzpunkten, überbestimmtes System, (a) L-Kurve (b)  $\sigma_{Ps}^2 = 10^{-2} \text{ cm}^2$  (c)  $\sigma_{Ps}^2 = 10^{-6.5} \text{ cm}^2$

### 4.2.3 Anzahl der Restriktionen



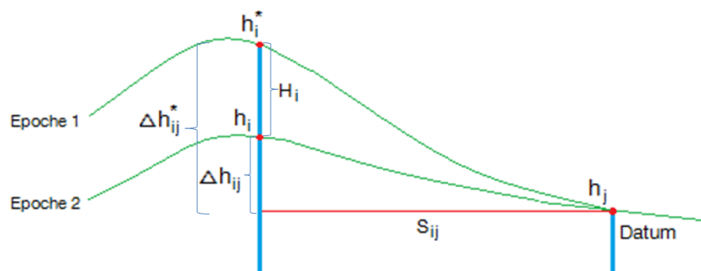
**Abbildung 4.8:** Differenz zwischen der Approximationen mit allen Restriktionen (innere Knoten: #3, Seitenknoten: #2, Eckknoten: #1) und nur einem Teil (innere Knoten: #2, Seitenknoten: #1, Eckknoten: #1)

Aufgrund der in Abschnitt 4.2.1 dargestellten Überlegung, zeigt die Abbildung 4.8, dass es bei einer maximalen Höhendifferenz von  $0.3 \text{ cm}$  maximal  $0.4 \text{ mm}$  ( $\sim \frac{1}{10}$ ) Unterschied in der Approximation macht, ob alle vorgestellten Restriktionen (soweit die Regularität der Bedingungsmatrix gewährleistet ist) oder nur diejenigen, welche nicht auf den gemischten Ableitungen basieren, implementiert werden.

# 5. Approximation mit einem komplexen stochastischen Modell

## 5.1 Datengenerierung

Bis jetzt wurden Höhendifferenzpunkte mit ihren Lagekoordinaten von einer synthetisch generierten Fläche abgegriffen. Sie sollen mit ihrer Höhendifferenz den Höhenunterschied eines Höhenpunktes zwischen zwei Epochen imitieren. Die Ergebnisse eines Leitnivellements sind allerdings Höhenunterschiede zwischen zwei Punkten zum Zeitpunkt einer Epoche. Die Abbildung 5.1 soll der Unterscheidung zwischen Höhenunterschied und Höhendifferenzwert dienen. Durch die Festlegung eines Datums, ist es möglich, die absolute Höhe (für einen Punkt) relativ zu anderen Epochen zu bestimmen, um dann damit den Höhendifferenzwert zu berechnen. Zur Vereinfachung der Darstellung wurde der Punkt  $h_j$  in Abbildung 5.1 direkt als Datumspunkt festgelegt, sodass die Höhenunterschiede verkürzten absoluten Höhen entsprechen. Wie man stabile Punkte findet, um diese zur Datumsfestlegung zu nutzen, wurde von HALSIG (2010) beschrieben und soll hier nicht weiter behandelt werden. Um ein stochastisch komplexes Modell auf Grund einer Datumsfestlegung künstlich zu generieren, dient die in Abschnitt 5.1.1 erläuterte Herleitung. In dieser noch synthetischen Fläche werden beliebige Punkte als Datum genutzt, sodass die Möglichkeit besteht, die Auswirkungen der Lage eines Datumspunktes in Zusammenhang mit der für ihn gewählten Genauigkeit auf die approximierte Fläche zu untersuchen.



**Abbildung 5.1:** Höhendifferenzwert in Zusammenhang mit den gemessenen Höhenunterschieden, vereinfacht von dem Datumspunkt aus gesehen

Der Höhendifferenzwert berechnet sich durch die Differenz der Höhenunterschiede zu

$$H_i = \Delta h_{ij}^* - \Delta h_{ij} \quad \text{mit } \Delta h_{ij}^* \dots \text{Höhenunterschied zur Epoche 1} \quad (5.1)$$

$$\Delta h_{ij} \dots \text{Höhenunterschied zur Epoche 2.} \quad (5.2)$$

Sieht man nun die Höhendifferenzwerte aller Höhendifferenzpunkte in einem Vektor und gibt dazu die im späteren hergeleitete Kovarianzmatrix für  $\Delta h_{ij}$  beziehungsweise  $\Delta h_{ij}^*$  an, ergibt sich nach WELSCH et al. (2000, S. 376) eine Kovarianzmatrix für die Höhendifferenzpunkte zu

$$\Sigma\{\mathcal{H}\} = \Sigma\{\Delta\mathcal{H}^*\} + \Sigma\{\Delta\mathcal{H}\}. \quad (5.3)$$

Da die Einträge in der Kovarianzmatrix der Höhenunterschiede nur von den Strecken zwischen den Punkten gemäß (5.8) abhängen, ist diese für jede Epoche gleich. Somit ergibt sich

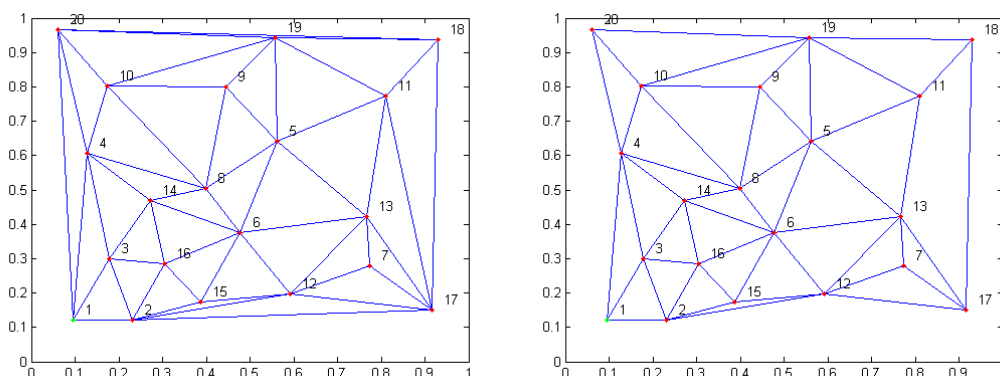
$$\Sigma\{\mathcal{H}\} = 2 \cdot \Sigma\{\Delta\mathcal{H}\}. \quad (5.4)$$

Da die Kovarianzmatrix im Späteren durch den Mittelwert der Varianzen dividiert wird, um sie mit einem einfachen stochastischen Modell (Einheitsmatrix) vergleichen zu können, ist auch die Multiplikation mit der Zwei zu vernachlässigen. So ergibt sich für die flächenhafte Approximation, dass die einfließenden Beobachtungen, also die Höhendifferenzwerte der jeweiligen Punkte, folgende Kovarianzmatrix besitzen

$$\Sigma\{\mathcal{L}_h\} = \Sigma\{\Delta\mathcal{H}\}. \quad (5.5)$$

Da die Kovarianzmatrix somit nur noch auf den Höhenunterschieden einer Epoche basiert, bietet sich eine freie Lagerung des stochastischen Modells ohne Datumsfestlegung an. Dies wird in Abschnitt 5.1.2 dargestellt.

Die aus dem Leitnivellement resultierenden Höhenunterschiede sollen nun von den Höhendifferenzpunkten des synthetischen Beispiels künstlich abgeleitet werden. Dazu werden immer die Höhenwerte zweier sich lagemäßig nahe liegenden Punkte von einander abgezogen. Die Höhenwerte müssen nicht vorliegen, da sie nicht in die Kovarianzinformationen einfließen. Sie werden nur theoretisch betrachtet. Um die nahe liegenden Punkte bestimmen zu können, wird eine Delaunay-Dreiecksvermaschung durchgeführt. In dieser Form von Dreiecksvermaschung wird der kleinste Innenwinkel über alle Dreiecke maximiert. Sie werden aber vor allem deshalb hier angewandt, weil innerhalb des Umkreises der einzelnen Dreiecke keine anderen Punkte liegen. Sollten mehrere Punkte auf einem Kreis liegen, so wird ein Vieleck gebildet, welches sich aber auf einfache Weise „nachtriangulieren“ lässt (KLEIN 2005, S. 231-234). Somit sind nahe liegende Punkte über Verbindungen vermascht, wodurch sich ein Netz ergibt. In diesem befinden sich allerdings noch unverhältnismäßig lange Strecken zwischen den Punkten, die in einem realen Nivellementnetz nicht zu finden wären. Daher werden diese gelöscht, wenn die dadurch verbundenen Punkte weiterhin mindestens drei Verbindungen haben (s. Abb. 5.2).



**Abbildung 5.2:** Netzbild durch Delauney-Triangulation (links), nach dem Löschen zu langer Strecken (rechts) für 20 Punkte (rot), Verbindungen (blau)

Die in dem Netz vorhandenen Verbindungen geben an, zwischen welchen Punkten  $i$  und  $j$  die Höhenunterschiede gemessen wurden. Ein Höhenunterschied ergibt sich zu

$$\Delta h_{ij} = h_j - h_i. \quad (5.6)$$

### 5.1.1 Herleitung eines komplexen stochastischen Modells mit Datumsfestlegung

Als Parameter des Modells sind die Höhen der Punkte anzusetzen. Das funktionale Modell (5.6) dient der Erstellung der Designmatrix. Hierfür ist, um eine Singularität der Designmatrix vorzubeugen, eine Datumsfestlegung notwendig. Gewählt wird hierzu ein beliebiger Höhendifferenzpunkt  $h_n$ . Die Spalte der Designmatrix, welche die partiellen Ableitungen zu dem Parameter, der als Datum festgelegt wurde, beinhaltet, wird dazu herausgelöscht. Die Designmatrix ergibt sich so zu

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta h_{12}}{\partial h_1} & \frac{\partial \Delta h_{12}}{\partial h_2} & \frac{\partial \Delta h_{12}}{\partial h_3} & \cdots & \frac{\partial \Delta h_{12}}{\partial h_{n-1}} \\ \frac{\partial \Delta h_{13}}{\partial h_1} & \frac{\partial \Delta h_{13}}{\partial h_2} & \frac{\partial \Delta h_{13}}{\partial h_3} & \cdots & \frac{\partial \Delta h_{13}}{\partial h_{n-1}} \\ \frac{\partial \Delta h_{n-1n}}{\partial h_1} & \frac{\partial \Delta h_{n-1n}}{\partial h_2} & \frac{\partial \Delta h_{n-1n}}{\partial h_3} & \cdots & \frac{\partial \Delta h_{n-1n}}{\partial h_{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Die Kovarianzmatrix der Höhenunterschiede ist eine Gewichtsmatrix. Da die Genauigkeit eines durch ein Nivellement gemessenen Höhenunterschieds abhängig von der überbrückten Distanz ist, werden die Einträge in der Diagonalen der Gewichtsmatrix  $P$  zu

$$p_{ii} = \frac{1}{s_{ij} [km]} \quad \text{mit } s_{ij} \dots \text{ Distanz zwischen den Punkten } i \text{ und } j \quad (5.8)$$

gewählt. Somit ergibt sich das komplex stochastische Modell für die flächenhafte Approximation zu

$$\Sigma \{\mathcal{L}_h\} = (\mathbf{A}_l^T \mathbf{P} \mathbf{A}_l)^{-1}. \quad (5.9)$$

Da die Approximation der Fläche alle Punkte die gegeben sind, nutzen sollte, muss für der Datumspunkt eine Varianz hinzugefügt werden. Dazu wird eine Spalte und eine Zeile in der Kovarianzmatrix ergänzt und an deren Überschneidung die Varianz eingetragen. Eine Korrelation zu den anderen Punkten wird als nicht gegeben festgelegt. Dies ist auch für die spätere Anwendung für ein reales Nivellementnetz wichtig, da dort meist mehrere Punkte als Datumspunkte ausgewählt werden. Der Datumspunkt sollte eine mittlere Varianz erhalten. Würde sie zu klein angesetzt werden, dann würde die Fläche auf diesen Punkt gezogen werden, zu hoch angesetzt, würde der Punkt kaum in den Ausgleich eingehen.

### 5.1.2 Herleitung eines komplexen stochastischen Modells ohne Datumsfestlegung

Ohne Datumsfestlegung ergibt sich eine singuläre Designmatrix, in der die für die Datumsfestlegung zuvor herausgelöschte Spalte bestehen bleibt. Wenn keine Datumsfestlegung stattfinden soll, so ist die Inverse des Kovarianzmatrix in dem nachfolgenden Ausgleich verwenden

$$\Sigma \{\mathcal{L}_h\}^{-1} = \mathbf{A}_l^T \mathbf{P} \mathbf{A}_l. \quad (5.10)$$

Die nachfolgende Berechnung für die Approximation der Fläche wird mit der Moore-Penrose-Inversen (MERTIUS 2010, S. 367-369), einer Pseudoinversen, berechnet. Da die inverse Kovarianzmatrix der Beobachtungen singulär ist, also keinen vollen Rang besitzt, und die anschließende Multiplikation mit der Designmatrix eine singuläre Normalgleichungsmatrix ( $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \Sigma \{\mathcal{L}_h\}^{-1} \mathbf{A}$ ) ergibt, muss, um die ausgeglichenen Parameter berechnen zu können, eine singuläre Matrix invertiert werden. Dies ist über die Moore-Penrose-Inverse, gekennzeichnet durch ein  $+$ , möglich. Dabei wird die Eigenwertzerlegung der Normalgleichungsmatrix mit  $\mathbf{N} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^T$  durchgeführt. Zu der Diagonalmatrix  $\mathbf{S}_{[n \times n]} = (s_{rc})$  definiert man dann die Pseudoinverse  $\mathbf{S}_{[n \times n]}^+ = (s_{cr}^+)$  durch

$$s_{cr}^+ = \begin{cases} \frac{1}{s_{rr}}, & \text{wenn } s_{rr} \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Pseudoinverse der Normgleichungsmatrix ergibt sich dann zu

$$\mathbf{N}^+ = \mathbf{U} \mathbf{S}^+ \mathbf{U}^T. \quad (5.11)$$

So sind nachfolgend die ausgeglichenen Parameter der ersten Stufe durch

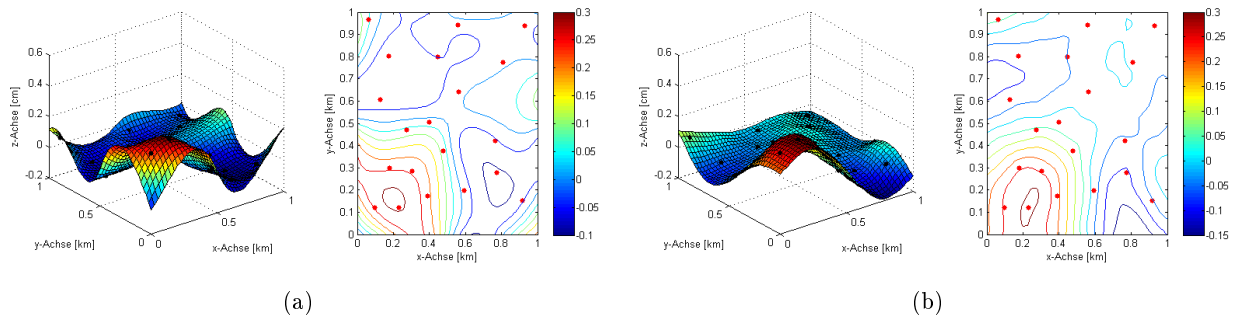
$$\hat{\mathbf{x}} = \left( \mathbf{A}^T \Sigma \{\mathcal{L}_h\}^{-1} \mathbf{A} \right)^+ \mathbf{A}^T \Sigma \{\mathcal{L}_h\}^{-1} \mathbf{l} \quad \text{mit } \Sigma \{\hat{\mathbf{x}}\} = \left( \mathbf{A}^T \Sigma \{\mathcal{L}_h\}^{-1} \mathbf{A} \right)^+ \quad (5.12)$$

zu berechnen.

## 5.2 Ergebnisse

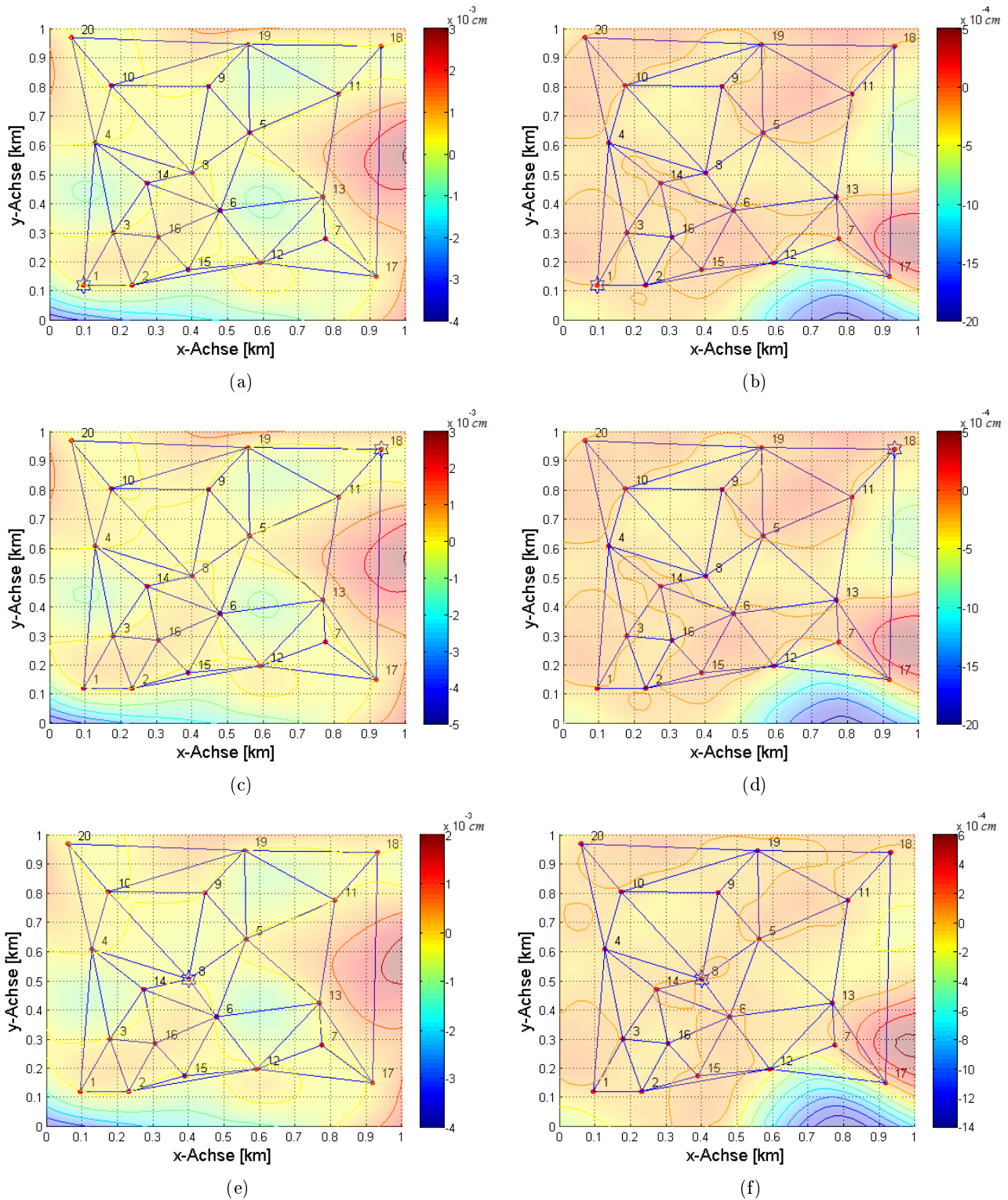
Um die Auswirkungen eines komplex stochastischen Modells auf die Flächenapproximation zu untersuchen, werden die durch das Delauney-Netz verbundenen 20 Höhendifferenzpunkte aus Abbildung 5.2 angesetzt. Das gewonnene stochastisch komplexe Modell wird dann einmal in die Approximation ohne Restriktionen gegeben und einmal in die Approximation mit Restriktionen. Die approximierte Fläche, in deren Ausgleich Restriktionen eingebunden sind, kann ab drei Flächenelementen einen kubischen Verlauf verfolgen. Um der Fläche etwas mehr Freiheit im Verlauf zu gewähren, werden allerdings vier Flächenelemente pro Richtung angesetzt. Gleiches gilt für die Approximation ohne

Restriktionen, welche bereits innerhalb eines Flächenelementes einen kubischen Verlauf verfolgen kann, sodass hier zwei Flächenelemente pro Richtung angesetzt wurden. In Abbildung 5.3 sind die Approximationen zu sehen. Die Pseudobeobachtungen sind mit  $10^{-7}$  gewichtet. In beiden Abbildungen wurde das komplex stochastische Modell durch die darin enthaltene mittlere Varianz geteilt, sodass die Größenordnung des Modells mit dem eines einfachen stochastischen Modells übereinstimmt und die anschließende Approximation durch die Gewichtung zu den Pseudobeobachtungen nicht verändert wird.



**Abbildung 5.3:** Approximation mit komplex stochastisch bzw. einfach stochastischen Modell, (a) ohne Restriktionen (2 Flächenelemente pro Richtung), (b) mit Restriktionen (4 Flächenelemente pro Richtung)

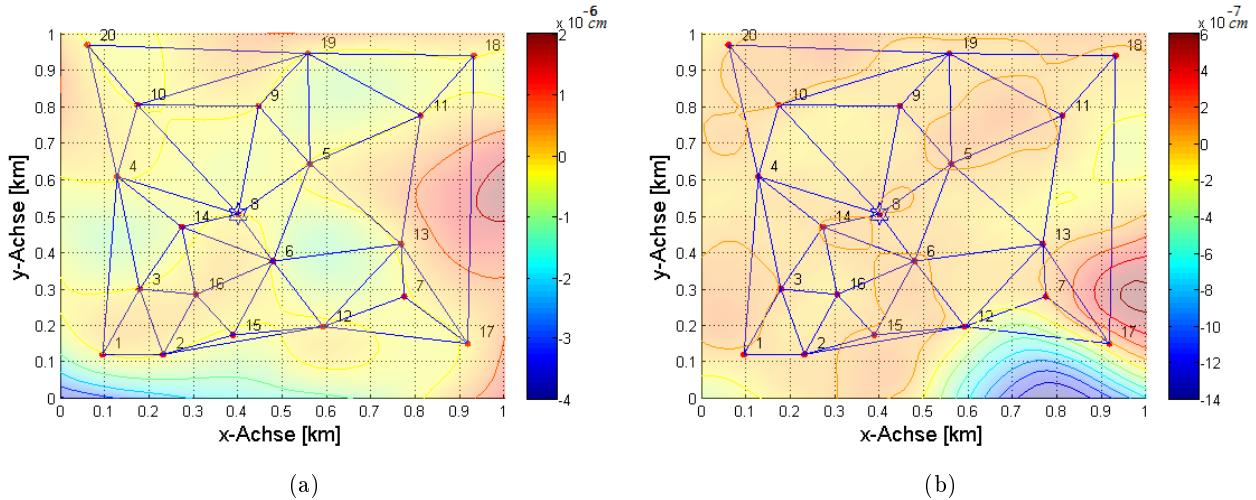
Im Nachfolgenden sind Differenzbilder der Flächen zu sehen, die einmal durch das Ansetzen eines komplexen und einmal durch das Ansetzen eines einfachen stochastischen Modells entstehen. In Abbildung 5.4 wurden das Datum an unterschiedlichen Punkten festgelegt. Es zeigt sich, dass es nur einen irrelevanten Unterschied macht, wo der Datumspunkt liegt. Dies ist auch selbstverständlich, da dem Datumspunkt eine mittlere Varianz zugeteilt wurde, womit er nicht anders als alle anderen Beobachtungen in den Ausgleich einfließt. Es zeigt sich neben der Tatsache, dass die Datumsfestlegung keinerlei Auswirkung auf die Approximation mit einem komplex stochastischen Modell zeigt, dass die Approximation mit Restriktionen durch ein komplex stochastisches Modell weniger beeinflusst wird als eine Approximation ohne Restriktionen. Die Differenzbilder zeigen eine Differenzspanne in der Größenordnung von  $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ . Diese ist geringer als jene, die sich nach der Approximation ohne Restriktionen zeigt ( $7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ ). Die maximale Höhendifferenz des synthetischen Beispiels wurde mit  $0,3 \text{ cm}$  abgebildet. Sollte dieser auf bis zu  $30 \text{ cm}$ , wie im praktischen Anwendungsfall, der von EICHBORN (2010) beschrieben wurde, ansteigen, so würde die Approximation immer noch bis auf maximal  $2 \text{ mm}$  beziehungsweise für die Approximation ohne Restriktionen auf  $5 \text{ mm}$  mit der auf Grundlage des einfachen stochastischen Modells übereinstimmen. Eine Senkung der Gewichtung der Pseudobeobachtungen auf  $10^{-10}$  bewirkt in diesem Fall keine sichtbare Veränderung der approximierten Flächen aus Abbildung 5.3, aber, wie Abbildung 5.5 zeigt, eine deutliche Senkung der Differenzspanne zwischen der Approximation mit komplex und der mit einfach stochastischem Modell. Die hier gezeigten Differenzspannen sind allerdings in einer Größenordnung ( $10^{-6} \text{ cm}$ ), die für praktische Anwendungen ( $10^{-4} \text{ cm}$ ) nicht von Bedeutung sein sollten. Die Approximation wird, desto mehr die Pseudobeobachtungen herunter gewichtet werden, immer mehr zur Interpolation. Dies folgt der Tatsache, dass das System ohne Krümmungsminimierung unterbestimmt ist. In dem Fall, dass der Modellansatz ohne Restriktionen gewählt wird, und die Pseudobeobachtungen



- Höhenlinien der Differenzfläche
- Höhenpunkte (Beobachtungen für die Approximation der Fläche)
- Datumspunkt
- Verbindung der Höhenpunkte, für die Höhendifferenzen als Beobachtungen für das komplex stochastische Modell genutzt wurden

**Abbildung 5.4:** Differenzbilder mit Datumsfestlegung (Unterschiede zwischen der Approximation mit komplexen und einfachem stochastischen Modell, ohne Restriktionen (links), mit Restriktionen (rechts))  
 (a)&(b) Datumspunkt bei 1, (c)&(d) Datumspunkt bei 18,  
 (e)&(f) Datumspunkt bei 8

nicht hinzu gerechnet werden, würde ein Rangdefekt von  $9 \cdot 4 - 20 = -16$  vorliegen. Bei dem Modellansatz mit Restriktionen würde, aufgrund der höheren Anzahl an Flächenelementen sogar ein Rangdefekt von  $25 \cdot 4 - 20 = -80$  vorliegen.



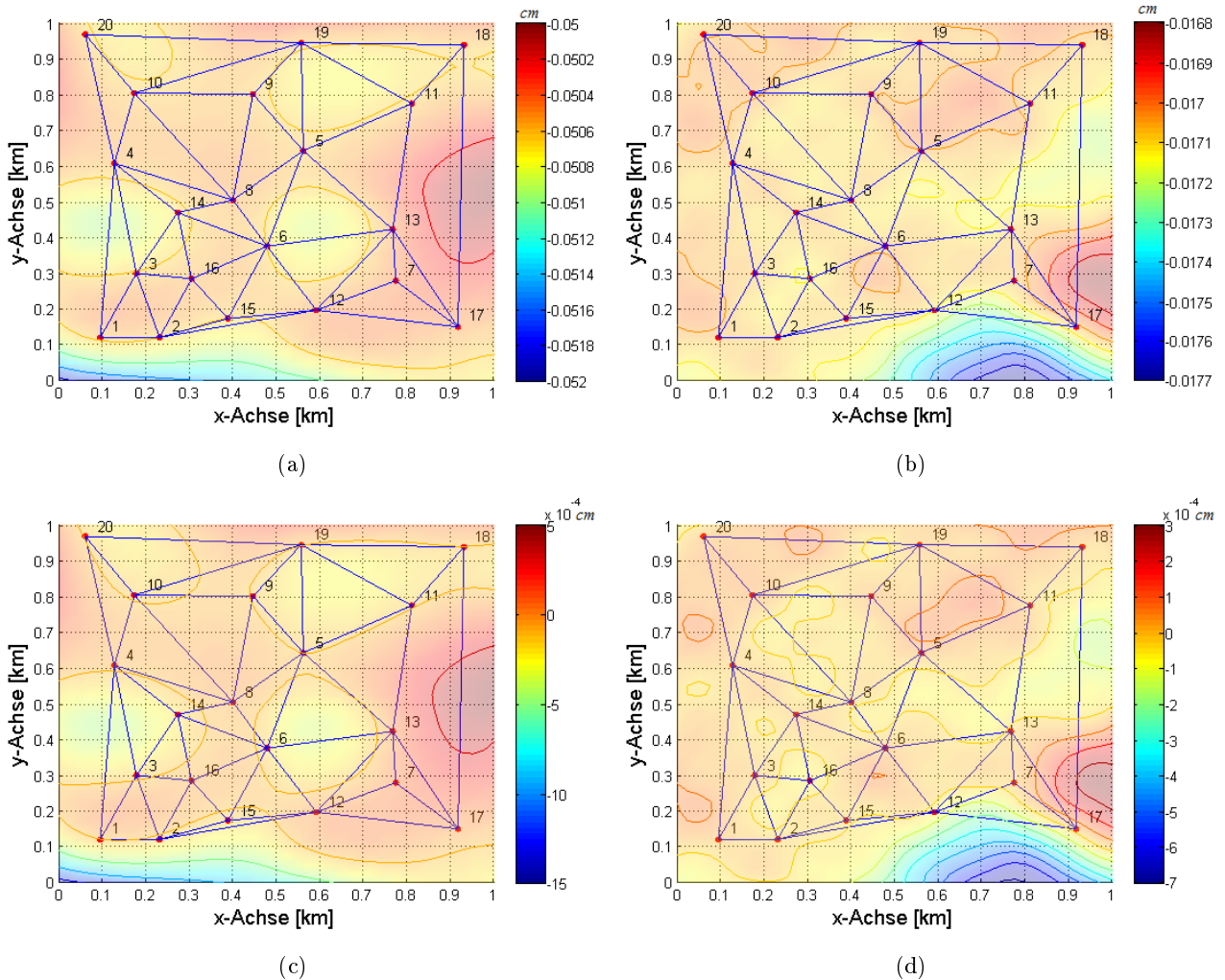
**Abbildung 5.5:** Differenzbilder nach geringerer Gewichtung der Pseudobeobachtungen (Unterschiede zwischen der Approximation mit komplexen und einfachem stochastischen Modell, mit Datumsfestlegung)  
(a) ohne Restriktionen, (b) mit Restriktionen

Die nachfolgende Abbildung 5.6 zeigt Differenzbilder, die durch das Ansetzen von komplex stochastischen Modellen ohne Datumsfestlegung entstehen. Beide Modellansätze, derjenige ohne Restriktionen und derjenige mit Restriktionen zeigen in dem jeweiligen Differenzbild (Abb. 5.6(a) und 5.6(b)) eine ähnliche Form wie diejenigen, die durch eine Datumsfestlegung zustande kommen. Die größten Differenzen treten vor allem im Randbereich mit wenigen Beobachtungen auf. Spannen die Beobachtungen in der Nähe der Randbereiche die Fläche nicht so stark ein, weil ihnen eine hohe Varianz im komplex stochastischen Modell zugewiesen wurden, so hat diese Fläche eine höhere Beweglichkeit und schwingt zum Rand hin leicht aus. Da die Approximation mit Restriktionen durch die daraus resultierende Steifigkeit nicht so stark zur Oszillation neigt, sind hier die Spitzen der Differenzspanne nicht so groß. Die Oszillation ist sowohl mit Datumsfestlegung als auch ohne festzustellen.

Einzig deutlicher Unterschied zu den Approximationen mit Datumsfestlegung ist, dass die Differenzbilder durch einen konstanten Wert von Null versetzt sind. So liegt das Differenzbild zu dem Modellansatz ohne Restriktionen im Mittel um den Wert  $0.051\text{cm}$  und jenes zu dem Modellansatz mit Restriktionen um den Wert  $0.0173\text{cm}$ . Dies liegt an der unterschiedlichen Lagerung der Approximation mit dem einfachen stochastischen und der mit dem komplex stochastischen Modell, welche bei der Berechnung mittels Pseudoinversen verschoben wird. Dass ein unterschiedlicher konstanter Wert bezogen auf den Modellansatz vorliegt, basiert auf der Tatsache, dass in den beiden Fällen eine unterschiedliche Anzahl an Parametern aufgrund der unterschiedlichen Anzahl an angesetzten Flächenelementen bestimmt wird.



Subtrahiert man den Mittelwert (s. Abb. 5.6(c) und 5.6(d)), so ist die Differenzspanne um mehr als die Hälfte kleiner als diejenige, die bei gleicher Gewichtung der Pseudobeobachtungen mit Datumsfestlegung entsteht (s. Abb. 5.4). Für den praktischen Anwendungsfall (30cm maximale Höhendifferenz), würde die Approximation immer noch bis auf maximal 0.7mm beziehungsweise für die Approximation ohne Restriktionen auf 0.15mm mit der auf Grundlage des einfachen stochastischen Modells übereinstimmen. Die Genauigkeit der Approximation ist nicht aussagekräftig, da die Gewichtung der Pseudobeobachtungen ( $10^{-7}$ ) zu sehr in diese einfließt.



**Abbildung 5.6:** Differenzbilder (Unterschiede zwischen der Approximation mit komplexen und einfachem stochastischen Modell, ohne Datumsfestlegung)  
 (a) Differenzbild, (b) Mittelwert abgezogen

# 6. Zeitliche Approximation

## 6.1 Modellansatz

Im Gegensatz zu WELSCH et al. (2000), welcher zeitliche Approximation in einem Gesamtausgleich einführt, soll sie hier als eine weitere Stufe in den Ausgleich einfließen. Durch den separierten Ausgleich ist es möglich den Vorausgleich (Ausgleich in zwei Stufen, Abschnitt 2.5) zu optimieren und anschließend die zeitliche Approximation durchzuführen. Ist der Vorausgleich berechnet, so dienen die ausgeglichenen Parameter, also die Knotenparameter, als Beobachtungen für die zeitliche Approximation. Durch diese regelmäßig, im Gitter angeordneten Beobachtungen sollte eine flächendeckende Deformationsanalyse und damit auch zeitliche Approximation mit Trendabschätzung möglich sein. Für die zeitliche Approximation in Bezug auf die Schätzung der Geschwindigkeit ist das Vorliegen mindestens zweier Höhendifferenznetze notwendig. Soll auch die Beschleunigung geschätzt werden, so sind mindestens drei Höhendifferenznetze notwendig. Da die Zeit nur relativ in die Approximation einfließt, müssen die verwendeten Höhendifferenznetze auf der selben Epoche, im Folgenden als Nullepoche bezeichnet, basieren. Diejenige andere Epoche die zur Erzeugung des Höhendifferenznetzes dient, soll Referenzeпоche heißen. Der Zeitpunkt der Messung der Referenzeпоche dient der zeitlichen Festlegung des entsprechenden Höhendifferenznetzes. Dem ersten Höhendifferenznetz wird eine Zeitdifferenz  $\Delta t$  von 0 zugewiesen. Allen Weiteren wird eine zu diesem Höhendifferenznetz relative Zeitdifferenz zugewiesen. Der funktionale Zusammenhang für die Schätzung der Geschwindigkeit lautet

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(d)} + \mathbf{v}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{(d)} = \mathbf{y} + \dot{\mathbf{y}}\Delta t^{(d)} \quad (6.1)$$

mit  $\mathbf{y}$ ... Höhenwert der Fläche und dessen Ableitungen

$\dot{\mathbf{y}}$ ... Geschwindigkeit des Höhenwertes und dessen Ableitung

$d$ ... spricht das jeweilige Höhendifferenznetz an.

Soll auch die Beschleunigung geschätzt werden, so lautet der funktionale Zusammenhang

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(d)} + \mathbf{v}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{(d)} = \mathbf{y} + \dot{\mathbf{y}}\Delta t^{(d)} + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{y}}\Delta t^{(d)2} \quad (6.2)$$

mit  $\ddot{\mathbf{y}}$ ... Beschleunigung des Höhenwertes und dessen Ableitung.

Die Designmatrix setzt sich aus hauptsächlich aus Einheitsmatrizen  $I$  zusammen. Sie hat für die Approximation nur mit der Geschwindigkeit folgenden Aufbau (WELSCH et al. 2000, S.420-422)

$$\mathbf{A}_{v[\max(d)4m \times 4m]} = \begin{bmatrix} I_{[4m \times 4m]} & \Delta t^{(0)} I_{[4m \times 4m]} \\ I_{[4m \times 4m]} & \Delta t^{(1)} I_{[4m \times 4m]} \\ \vdots & \vdots \\ I_{[4m \times 4m]} & \Delta t^{(d)} I_{[4m \times 4m]} \end{bmatrix}.$$

Die Designmatrix, welche die Schätzung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung ermöglicht, lautet

$$\mathbf{A}_a[\max(d)4m \times 4m] = \begin{bmatrix} I_{[4m \times 4m]} & \Delta t^{(0)} I_{[4 \cdot m \times 4 \cdot m]} & \frac{1}{2} \Delta t^{(0)^2} I_{[4m \times 4m]} \\ I_{[4m \times 4m]} & \Delta t^{(1)} I_{[4m \times 4m]} & \frac{1}{2} \Delta t^{(1)^2} I_{[4m \times 4m]} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{[4m \times 4m]} & \Delta t^{(d)} I_{[4m \times 4m]} & \frac{1}{2} \Delta t^{(d)^2} I_{[4m \times 4 \cdot m]} \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Der Beobachtungsvektor setzt sich aus den ausgeglichenen Parametervektoren zusammen, die sich aus den Approximationen der Höhendifferenznetze ergeben. Er lautet somit

$$\mathbf{l}_z[\max(d)4m \times 1] = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^{(0)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}^{(d)} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \Sigma\{\mathcal{L}_z\} = \begin{bmatrix} \Sigma\{\tilde{\mathbf{x}}\}^{(0)} & & & \mathbf{0} \\ & \Sigma\{\tilde{\mathbf{x}}\}^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \Sigma\{\tilde{\mathbf{x}}\}^{(d)} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Der zu bestimmende Parametervektor lautet

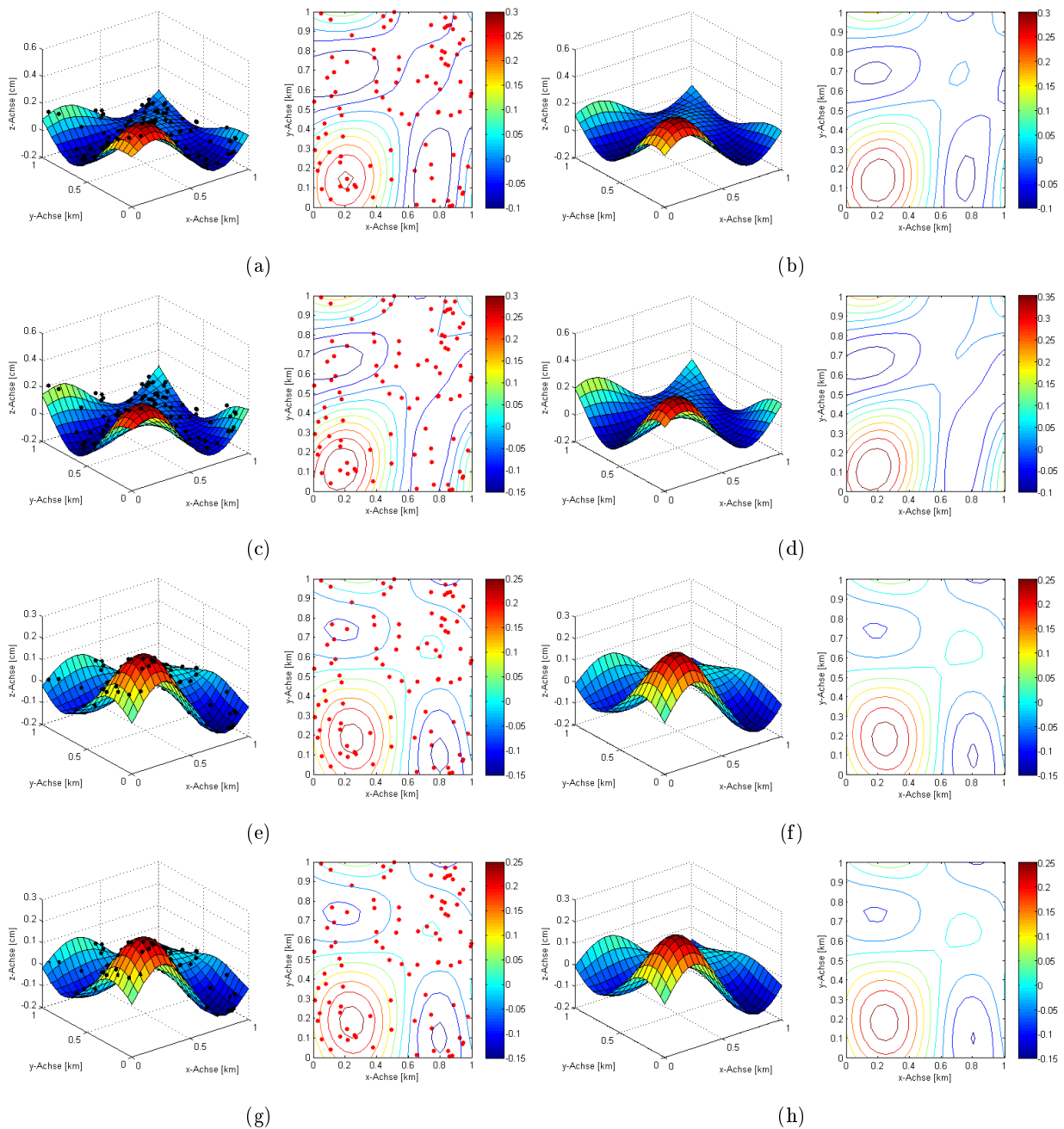
$$\mathbf{y}_v[8m \times 1] = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y}_a[12m \times 1] = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Die Parameter für die zeitliche Approximation können dann auf Grundlage des Gauß-Markoff-Modells (KOCH 2004, S. 166f.) wie folgt ausgeglichen werden

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_v &= \left( \mathbf{A}_v^T \Sigma\{\mathcal{L}_z\}^{-1} \mathbf{A}_v \right)^{-1} \mathbf{A}_v^T \Sigma\{\mathcal{L}_z\}^{-1} \mathbf{l}_z & \text{mit } \Sigma\{\tilde{\mathbf{y}}_v\} &= \left( \mathbf{A}_v^T \Sigma\{\mathcal{L}_z\}^{-1} \mathbf{A}_v \right)^{-1} \\ \tilde{\mathbf{y}}_a &= \left( \mathbf{A}_a^T \Sigma\{\mathcal{L}_z\}^{-1} \mathbf{A}_a \right)^{-1} \mathbf{A}_a^T \Sigma\{\mathcal{L}_z\}^{-1} \mathbf{l}_z & \text{mit } \Sigma\{\tilde{\mathbf{y}}_a\} &= \left( \mathbf{A}_a^T \Sigma\{\mathcal{L}_z\}^{-1} \mathbf{A}_a \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

## 6.2 Ergebnisse

In der nachfolgenden Abbildung ist eine Zeitreihe für die in Kapitel 4 vorgestellte synthetische Fläche dargestellt. Um diese zu generieren, ist der Parameter A der zweidimensionalen Fourierreihe für die Zeit  $\Delta t = 0$  auf 0.6 gesetzt. Für die nachfolgenden Zeitschritte wurde der Parameter immer um 0.3 erhöht. Die synthetischen Flächen sind auf der rechten Seite der Abbildung 6.1 dargestellt, die jeweilige Approximation auf der Linken. Dazu wurden jeweils 90 Höhendifferenzpunkte von der synthetischen Fläche abgegriffen. Ein  $5 \times 5$  großes Gitter wurde aufgespannt und dann flächenhaft mit allen Restriktionen approximiert. Die Gewichtung der Pseudobeobachtungen liegt bei  $1 : 10^8$ .



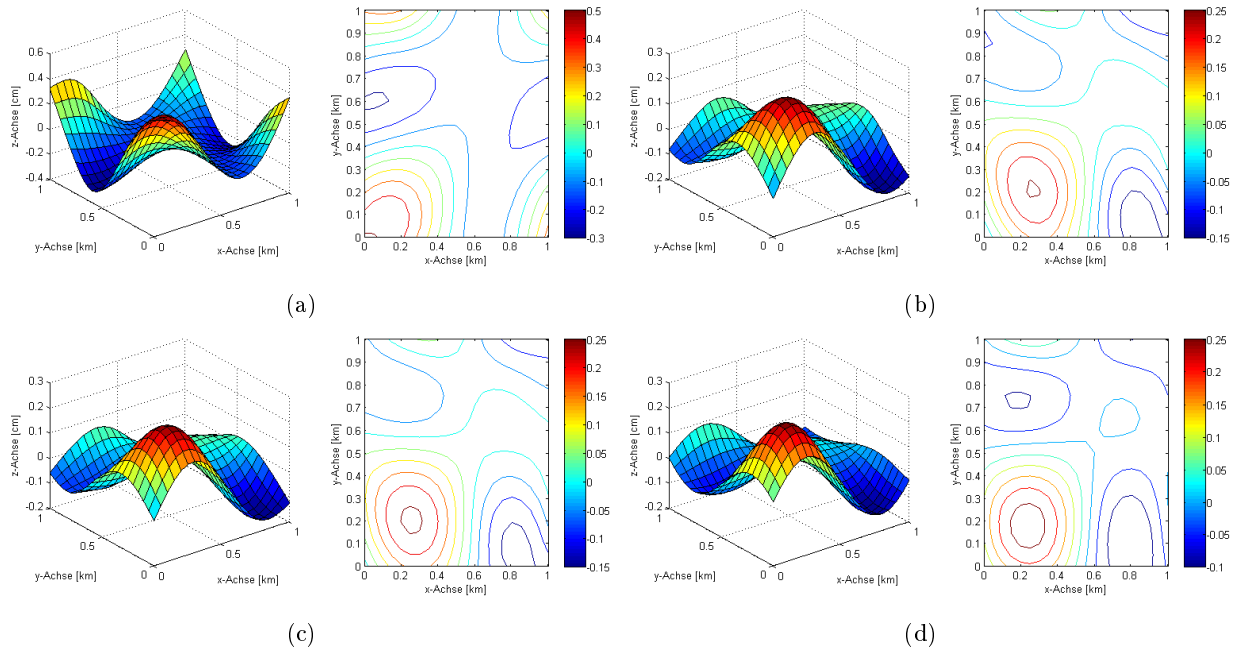
**Abbildung 6.1:** Approximation mit Restriktionen (links) einer synthetischen Zeitreihe von Höhendifferenznetzen (rechts)

(a)&(b) Flächen zu Zeitpunkt 0, (c)&(d) Flächen zu Zeitpunkt 1,  
 (e)&(f) Flächen zu Zeitpunkt 2, (g)&(h) Flächen zu Zeitpunkt 3

Das Ergebnis der Trendschätzung nach einem Ausgleich, der die Geschwindigkeit des Ortes schätzt, ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Mit nur zwei Zeitschritten zeigt die zeitliche Approximation mit der Geschwindigkeit noch keine brauchbaren Ergebnisse (s. Abb. 6.2(a)). Dahingegen zeigen die Approximationen nach drei (s. Abb. 6.2(b)) beziehungsweise vier (s. Abb. 6.2(c)) Zeitschritten eine gute Näherung für den tatsächlichen Trend (s. Abb. 6.2(c)).

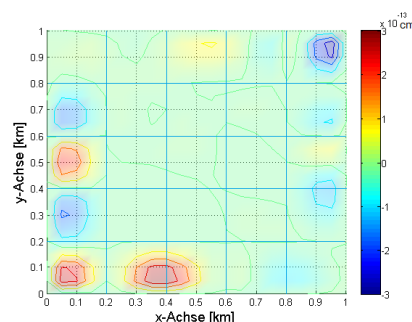
Je mehr Epochen für die Approximation zur Verfügung stehen, desto besser ist die Trendschätzung.

Die Trendschätzung ohne Überbestimmung (aufgrund zweier Flächenapproximationen) ist nicht brauchbar.



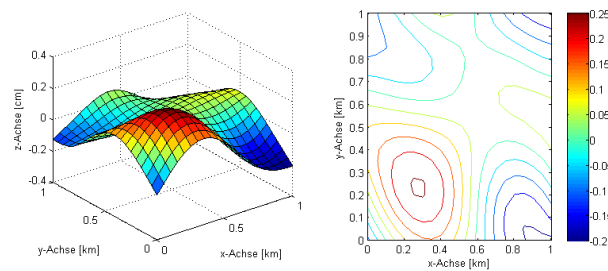
**Abbildung 6.2:** Trendschätzung mit der Geschwindigkeit  
 (a) aufgrund zweier Flächenapproximationen, (b) aufgrund dreier Flächenapproximationen,  
 (c) aufgrund vierer Flächenapproximationen, (d) tatsächlicher Trend

Die Kovarianzmatrix für die Beobachtungen  $\Sigma \{ \mathcal{L}_z \}$  konnte nicht mit ihrer vollen Information in das Ausgleichsmodell zur zeitlichen Approximation einfließen. Eben jene Kovarianzmatrix, die aus der ersten oder zweiten Stufe der flächenhaften Approximation resultiert, ist so schlecht konditioniert (hier nach der ersten Stufe  $\kappa = 2 \cdot 10^{17}$  bzw. nach der zweiten Stufe  $\kappa = 5 \cdot 10^{18}$ ), dass es aufgrund des daraus resultierenden großen Rangdefektes nicht möglich ist, diese in den Ausgleich einfließen zu lassen. Es wurde als Kompromiss deshalb nur die Varianzinformation der zweiten Stufe, da immer mit allen Restriktionen gerechnet wurde, in die Kovarianzmatrix gegeben. Die Kondition der sich daraus ergebenden Matrix ist  $\kappa = 1 \cdot 10^6$ . Hiermit ist ein Ausgleich möglich. Vergleicht man dies mit der Trendschätzung, die eine Einheitsmatrix als Kovarianzmatrix nutzt, so liegen die Differenzen zwischen den sich daraus ergebenden Flächen bei maximal  $10^{-13}$  (s. Abb. 6.3).



**Abbildung 6.3:** Differenz zwischen der zeitlichen Approximationen mit Geschwindigkeit mit einem einfachen stochastischen Modells und einem komplexen (hellblau: Grenzen der Flächenelemente)

Die Unterschiede in dem Differenzbild ergeben sich vor allem deshalb, weil die ausgeglichenen Parameter der flächenhaften Approximation für die Ableitungen der Knotenpunkte eine deutlich größere Varianz haben, als der Höhenwert selbst. Für dieses Beispiel ist die durchschnittliche Varianz des Höhenwertes  $8.7\text{cm}^2$ , für die Ableitung in  $x$ -Richtung  $1567\text{cm}^2$ , für die Ableitung in  $y$ -Richtung  $1807\text{cm}^2$  und für die Ableitung in  $xy$ -Richtung liegt sie bei  $1.4 \cdot 10^5\text{cm}^2$ . Durch diese Verhältnisse, welche in dem einfachen stochastischen Modell durch die Einheitsmatrix nicht berücksichtigt werden, ergibt sich natürlich eine Differenz zwischen den Approximationen. Dennoch ist diese nicht allzu groß, sodass sie die Güte der zeitlichen Approximation nicht wesentlich beeinflussen. Daher ist die zeitliche Approximation durch die Geschwindigkeit mit einem Teil der Kovarianzinformation der Beobachtungen nicht von derjenigen mit einem einfachen stochastischen Modell zu unterscheiden. Gleiches gilt für die Schätzung mit Geschwindigkeit und Beschleunigung. Hierbei ergibt sich ebenfalls keine gute Näherung, wenn das System nicht überbestimmt ist. Erst bei Approximationen aufgrund vierer Flächenapproximationen ergibt sich eine sinnvolle Trendabschätzung (s. Abb. 6.4). Auch hier verbessert sich die die Trendschätzung, je mehr Flächenapproximationen als Grundlage dienen.



**Abbildung 6.4:** Trendschätzung mit Geschwindigkeit und Beschleunigung aufgrund vierer Flächenapproximationen

# 7. Schlussbemerkungen

## 7.1 Fazit

Die flächenhafte Approximation ist durch die hier vorgestellten Modellansätze möglich. Es ist möglich eine  $C^1$ -stetige Fläche und auf Wunsch mit geringen Mehraufwand auch eine  $C^2$ -stetige Fläche mittels stückweise bikubischer Polynome zu approximieren (Kapitel 2 und 3). Durch die Variabilität der Approximation gibt das Verfahren dem Anwender großzügige Freiheiten, eben diese auf den gegebenen Datensatz anzupassen. Allerdings entstehen dadurch auch viele Aspekte die, um eine optimale Approximation zu erreichen, beachtet werden müssen. Während keine Rücksicht auf Datenlücken zu nehmen ist, so ist die richtige Gewichtung der Pseudobeobachtungen ein wesentlicher Faktor für eine gelungene Approximation. Durch die angesetzten stückweise bikubischen Polynome ergeben sich neben vielerlei Vorteilen, wie der guten Datenanpassung, auch der Nachteil, dass sie stark zur Oszillation neigen. Diese kann durch die richtige Gewichtung der Pseudobeobachtungen reguliert werden. Aber auch die Restriktionen, die damit verbundene Stetigkeit in der zweiten Ableitung und die daraus resultierende Steifigkeit der Fläche reduzieren die Oszillation.

Das grundlegende Aspekte beachtet werden müssen, zeigt auch die Approximation mit einem komplex stochastischen Modell. Ist die Gewichtung der Pseudobeobachtungen richtig gewählt und die Anzahl der Flächenelemente dem Modellansatz und der zu approximierenden Fläche angepasst (Kapitel 4), so ist der Unterschied zu einer Approximation mit einem einfachen stochastischen Modell in dem Maße klein, dass auch eine zeitliche Approximation mit diesem Modell sinnvoll erscheint. Eine Datumsfestlegung ist nicht notwendig beziehungsweise sie verfälscht das stochastische Modell, da der Datumspunkt anschließend wieder im Modell zu finden sein soll. Die Approximation ohne Datumsfestlegung ist unproblematisch und führt zu einem ähnlichen Ergebnis (Kapitel 5).

Die zeitliche Approximation und eine damit verbundene Trendschätzung ist daher auch ohne Datumsfestlegung für ein komplex stochastisches Modell möglich. Wichtig ist hier für eine gelungene Schätzung vor allem eine hohe Anzahl an Epochen. Für eine zeitliche Approximation ist so das Vorliegen von mindestens vier Epochen (Nullepoche plus drei Referenzepochen) notwendig, um für die hier künstliche Zeitreihe eine sinnvolle Trendschätzung zu erhalten (Kapitel 6).

## 7.2 Ausblick

Um die Anwendung des Modells auf realistische Nivellementnetze durchführen zu können, sollte die richtige Gewichtung der Pseudobeobachtungen durch die Varianzkomponentenschätzung oder durch die rechnerische Bestimmung des optimalen Punktes in der L-Kurve realisiert werden. Bisher konnte eine gelungene zeitliche Approximation nur durch ein vorgegebenes einfaches stochastisches Modell, welches nur die Varianzen der einfließenden Beobachtungen nutzt, realisiert werden. Das Verwenden der vollen Kovarianzinformation aus dem Zwei-Stufen-Ausgleich der flächenhaften Approximation konnte nicht in die zeitliche Approximation implementiert werden, da die Kovarianzmatrix eine

solch schlechte Kondition besitzt, dass kein Ausgleich möglich ist. Die schlechte Kondition der Matrix kommt auch durch die Gewichtung der Pseudobeobachtungen zustande. Aufgrund der vielseitigen Nachteile der Approximation mit Pseudobeobachtungen sollte ein Weg gefunden werden, der ohne die Anwendung der Krümmungsminimierung eine gelungene Approximation ermöglicht. Die eingeführten Restriktionen können einen Großteil des durch eine Unterbestimmung entstehenden Rangdefekts der Normalgleichungsmatrix innerhalb eines Gesamtausgleichs beseitigen. Dazu sei ergänzt, dass durch die Laplace-Gleichung, welche die Summe der zweiten Ableitungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung zu Null setzt (GOTTWALD et al. 1995, S. 744), die Singularität der Bedingungsmatrix umgangen werden könnte und für die inneren Knoten so kein Freiheitsgrad übrig bleiben würde. Dadurch wären um eine Approximation auszuführen, nur noch Beobachtungen am Rand notwendig. Außerdem könnte durch die Anwendung der Krümmungsminimierung nur an den Knotenpunkten, an denen eine Unterbestimmung vorliegt, eine Minimierung der Kondition der Kovarianzmatrix erreicht werden. Sollten diese Möglichkeiten überprüft sein, so ist eine Übertragung der vorgestellten Modellierung des bis dahin künstlichen Netzes auf die realen Höhendifferenznetze sinnvoll.



# A. Bezeichnungen

## Allgemeines

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| #                              | Anzahl  |
| $n$                            | Anzahl Beobachtungen (Höhendifferenzpunkt)  |
| $m$                            | Anzahl Gitterpunkte   |
| $v^{e,f}, v_{\xi}^{e,f} \dots$ | Verbesserungen der Pseudobeobachtung  |
| $C^1$                          | tangentiale Stetigkeit (gleiche Richtung und Betrag des Tangentialvektors, führt zu einer Unterbindung scharfer Kanten) |
| $C^2$                          | Krümmungsstetigkeit (gleiche Richtung und Betrag des Krümmungsvektors)  |
| $sp$                           | Spur einer Matrix (Summe der Diagonaleinträge)  |

## Flächenhafte Approximation

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| $\xi_i, \eta_j$                     | lokale Koordinaten ( $\epsilon \in [0, 1]$ ) innerhalb eines Flächenelementes  |
| $x, y$                              | globale Koordinaten  |
| $\chi(t), \psi(t)$                  | Hilfsfunktionen  |
| $H_{00}(t), H_{10}(t), \dots$       | Hermiteische Interpolationspolynome  |
| $P_{e,f}$                           | Knotenpunkt innerhalb eines Gitters mit dem Rechtswert $e$ und dem Hochwert $f$ in einem lokalen System (s. lokale Koordinaten)                              |
| $F^{e,f}$                           | Flächenelement mit dem linken unteren Knotenpunkt $P_{e,f}$  |
| $b(x, y)$                           | Höhendifferenzwert an der Position $(x, y)$ , festgelegt durch die Funktionswerte der Knotenpunkte des entsprechend umgebenden Rechtecks                     |
| $b, b_{\xi}, b_{\eta}, b_{\xi\eta}$ | Funktionswerte von Knotenpunkten<br>(Höhendifferenzwert und entsprechende Ableitungen)   |
| $b^{m,n}, b_{\xi}^{m,n} \dots$      | Funktionswerte der Knotenpunkte innerhalb eines Rechtecks  |
| $b^{e,f}, b_{\xi}^{e,f} \dots$      | Funktionswert an dem Knotenpunkt $P_{e,f}$   |
| $b_{\xi^2}^{F_{e,f}}(x_a, y_a)$     | zweite Ableitung in $x$ -Richtung des Höhendifferenzwert für $F_{e,f}$ , ausgewertet an dem Punkt $(x_a, y_a)$ , also an dem Punkt links unten von $F_{e,f}$ |

## Vektoren - Zufallsvariablen

|               |                     |
|---------------|---------------------|
| $\mathcal{L}$ | Beobachtungsvektor  |
| $\mathcal{V}$ | Verbesserungsvektor |
| $\mathcal{X}$ | Parametervektor     |

**Vektoren - Realisierungen**

- $l$  Beobachtungsvektor
- $v$  gesamter Verbesserungsvektor der ersten Stufe (bedingtes Modell)
- $v_h$  Verbesserungsvektor der Beobachtungen der ersten Stufe (bedingtes Modell)
- $v_{ps}$  Verbesserungsvektor der Pseudobeobachtungen der ersten Stufe (bedingtes Modell)
  
- $x$  Parametervektor
- $\hat{x}$  ausgeglichener Parametervektor der ersten Stufe (bedingtes Modell)
- $r$  Verbesserungsvektor der zweiten Stufe (bedingtes Modell)
- $\tilde{x}$  ausgeglichener Parametervektor der zweiten Stufe (bedingtes Modell)

**Matrizen**

- $A$  Designmatrix
- $B^T$  Bedingungsmatrix
- $\Sigma\{\mathcal{L}\}$  Kovarianzmatrix der Beobachtungen
- $\Sigma\{\hat{\mathcal{X}}\}$  Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Parameter der ersten Stufe
- $\Sigma\{\tilde{\mathcal{X}}\}$  Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Parameter der zweiten Stufe

**Zeitliche Approximation**

- $d$  Nummer des Höhendifferenznetzes
- $y$  ausgeglichener Höhenwert nach der Trendschätzung an den Knotenpunkten & dessen Ableitungen
- $\dot{y}$  Geschwindigkeit des Parameters  $y$
- $\ddot{y}$  Beschleunigung des Parameters  $y$

**Vektoren - Realisierungen**

- $l_z$  Beobachtungsvektor
- $v_{\tilde{x}}$  Verbesserungsvektor der Beobachtungen
  
- $y_v$  Parametervektor (Trendschätzung mit Geschwindigkeit)
- $y_a$  Parametervektor (Trendschätzung mit Geschwindigkeit und Beschleunigung)
- $y_a, y_a$  entsprechend ausgeglichene Parametervektoren

**Matrizen**

- $A_a$  Designmatrix (Trendschätzung mit Geschwindigkeit)
- $A_v$  Designmatrix (Trendschätzung mit Geschwindigkeit und Beschleunigung)
- $\Sigma\{\mathcal{L}_z\}$  Kovarianzmatrix der Beobachtungen
- $\Sigma\{\tilde{\mathcal{Y}}_a\}, \Sigma\{\tilde{\mathcal{Y}}_v\}$  Kovarianzmatrix der entsprechend ausgeglichenen Parameter

# Abbildungsverzeichnis

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Das Bogner-Fox-Schmit-Element . . . . .   | 2  |
| 2.2  | Hermite Basisfunktionen . . . . .   | 6  |
| 2.3  | Umgebung des Knotenpunktes $P_{e,f}$ (8er-Nachbarschaft) . . . . .                                    | 7  |
| 2.4  | Aneinandergrenzende Flächenelemente . . . . .   | 10 |
| 2.5  | Anzahl der Restriktionen am Beispiel eines $4 \times 4 = 16$ Flächenelement großen Gitters            | 13 |
| 3.1  | Zusammensetzen der ausgewerteten Flächenelemente für den Beweis der Stetigkeit .                      | 18 |
| 3.2  | Stetigkeit der Funktion (2.4) . . . . .   | 20 |
| 3.3  | Stetigkeit der ersten Ableitung in $x$ -Richtung . . . . .  | 20 |
| 3.4  | Stetigkeit der ersten Ableitung in $y$ -Richtung . . . . .  | 21 |
| 3.5  | Stetigkeit der ersten Ableitung in $xy$ -Richtung . . . . .   | 21 |
| 3.6  | Stetigkeit der zweiten Ableitung in $x$ -Richtung . . . . .   | 22 |
| 3.7  | Stetigkeit der zweiten Ableitung in $y$ -Richtung . . . . .   | 22 |
| 3.8  | Stetigkeit der gemischten zweiten Ableitung zweimal in $x$ - und einmal in $y$ -Richtung              | 23 |
| 3.9  | Stetigkeit der gemischten zweiten Ableitung zweimal in $y$ - und einmal in $x$ -Richtung              | 23 |
| 3.10 | Flächen, die zur Anwendung der Restriktionen benötigt werden . . . . .                                | 24 |
| 3.11 | Anwendung der Restriktion zur 2. Ableitung in $x$ -Richtung . . . . .                                 | 25 |
| 3.12 | Anwendung der Restriktion zur 2. Ableitung in $y$ -Richtung & den gemischten 2. Ableitungen . . . . . | 25 |
| 4.1  | Synthetische Fläche zum Abgreifen von Höhendifferenzwerten bei gegebenen Lagekoordinaten . . . . .    | 27 |
| 4.2  | Einschränkung und Vorteil von Restriktionen, kubisches Beispiel . . . . .                             | 29 |
| 4.3  | Einschränkung und Vorteil von Restriktionen, Beispiel Polynom 5.Grades . . . . .                      | 29 |
| 4.4  | Die L-Kurve . . . . .   | 30 |
| 4.5  | Die empirische L-Kurve . . . . .  | 31 |

---

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.6 | Auswirkung der Gewichtung der Pseudobeobachtung auf die Approximation . . . . .  | 32 |
| 4.7 | Auswirkung der Gewichtung der Pseudobeobachtung bei einem überbestimmten System  | 33 |
| 4.8 | Differenz zwischen der Approximationen mit allen Restriktionen und nur einem Teil .  | 33 |
| 5.1 | Höhendifferenzwert in Zusammenhang mit den gemessenen Höhenunterschieden . . .   | 34 |
| 5.2 | Netzbild mit 20 Punkten . . . . .  | 35 |
| 5.3 | Untersuchte Approximationen mit stochastisch komplexen Modell . . . . .  | 38 |
| 5.4 | Differenzbilder (mit Datumsfestlegung) . . . . .   | 39 |
| 5.5 | Differenzbilder (mit Datumsfestlegung) nach geringerer Gewichtung der Pseudobeobachtungen . . . . .  | 40 |
| 5.6 | Differenzbilder (keine Datumsfestlegung) . . . . .   | 41 |
| 6.1 | flächenhafte Approximation einer synthetischen Zeitreihe . . . . .   | 44 |
| 6.2 | Trendschätzung mit der Geschwindigkeit . . . . .   | 45 |
| 6.3 | Differenz zwischen der zeitlichen Approximationen mit Geschwindigkeit mit einem einfachen stochastischen Modells und einem komplexen . . . . . | 45 |
| 6.4 | Trendschätzung mit Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .  | 46 |

---

# Tabellenverzeichnis

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Verhältnis Anzahl der Restriktionen zur Anzahl der Parameter bei quadratisch wachsender Anzahl an Flächenelementen . . . . . | 14 |
|-----|--|----|

# Literatur

- BOGNER, F. K., R. L. FOX und L. A. SCHMIT (1965) The generation of inter-element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas. *Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, 397–444.
- BOJE, R., W. GSTIRNER, D. SCHULER und M. SPATA (2008) Leitnivellements in Bodenbewegungsgebieten des Bergbaus - eine langjährige Kernaufgabe der Landesvermessung in Nordrhein-Westfalen. *NÖV 3/2008*, 33–42.
- BRAESS, D. (1991) *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, Bochum.
- CIARLET, P. G. (1976) *Numerical Analysis of the finite Element Method*. Universität von Montreal, Montreal.
- EBNER, H., B. HOFMANN-WELLENHOF, P. REISS und F. STEIDLER (1980) HIFI - Ein Minicomputer-Programmsystem für Höheninterpolation mit finiten Elementen. *ZfV 5/1980*, 216–219.
- EICHBORN, M. (2010) *Lokalisierung und Modellierung von Senkungen in einem Braunkohleabbaugebieten*. Bachelorarbeit. Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn, Bonn.
- FÖRSTNER, W. (1979) Ein Verfahren zur Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten. *AVN 11-12/1979*, 446–453.
- GOTTWALD, S., H. KÄSTNER und H. RUDOLPH (1995) *Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik*. 14. Auflage. Meyers Lexikonverlag, Mannheim u. a.
- HAHN, H. G. (1975) *Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre*. 3. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main.
- HALSIG, S. (2010) *Identifikation von identen Punkten in Höhennetzen aus mehreren Epochen*. Bachelorarbeit. Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn, Bonn.
- HANSEN, C. (1992) Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review*, Vol 34, No. 4, 12/1992, 561–580.
- KLEIN, R. (2005) *Algorithmische Geometrie*. 2. Auflage. Springer, Berlin.
- KOCH, K. R. (2004) *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. 4. Auflage. Dümmler, Bonn.
- MERTIUS, A. (2010) *Signaltheorie*. 2. Auflage. Vieweg und Teubner, Wiesbaden, Stuttgart.

- PAPULA, L. (2007) *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2*. 11. Auflage. Vieweg, Wiesbaden.
- SCHUH, W.-D. (1984) *Analyse und Konvergenzbeschleunigung der Methode der konjugierten Gradienten*. Dissertation. Geodätisches Institut der Technischen Universität Graz, Graz.
- SCHUH, W.-D. (2011) *Statistik und Ausgleichsrechnung III, Vorlesung zum Sommersemester*. Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn, 2011.
- SCHWARZ, H. R. (1991) *Methode der Finiten Elemente*. 3. Auflage. Teubner Studienbücher Mathematik, Stuttgart.
- WELSCH, W., O. HEUNECKE und H. KUHLMANN (2000) *Handbuch Ingenieurgeodäsie, Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen*. Möser, Müller, Schlemmer, Werner (Hrsg.); Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.